数理解析研究所講究録
1506 巻 2006 年 202-210

On the Kiefer type information inequality applicable to a family of truncated distributions

筑波大・数理物質　赤平　昌文 (M. Akahira)
(Graduate School of Pure and Applied Science, University of Tsukuba)
筑波大・数理物質　大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)
(Graduate School of Pure and Applied Science, University of Tsukuba)

1. はじめに

統計的推定論において, 推定量を評価するために情報不等式は重要な役割を果す. 正則な場合には, 情報不等式として Cramér-Rao の不等式とそれを精密化した Bhattacharyya の不等式がよく知られている. 一方, 非正則な場合には, Chapman-Robbins の不等式が知られているが, その不等式による下界は必ずしも達成されない. しかし, 一方向型分布族の場合には, 局所的に分散 0 をもつ不偏推定量が存在することが示される (Akahira and Takeuchi(1995)). また, Bayes 的観点から, 推定量の Bayes リスクに関する情報不等式も考察され, その達成についても論じられている (Vincze(1992), Akahira and Ohyauchi(2003, 2006a), Ohyauchi(2004), Ohyauchi and Akahira(2005)).

本論においては, Bayes 的観点から, 漸近不偏推定量の分散に関する情報不等式を導出する. これは Kiefer(1952) による情報不等式を漸近的な場合に拡張したものになっている. そして, 切断分布族の場合に, その情報不等式による漸近下界が達成可能であることも示す.

2. Kiefer 型情報不等式による漸近下界

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立に, いずれも (σ-有限測度 μ に関する) 確率密度関数 (p.d.f.) $p(x,\theta)$ をもつ分布に従う確率変数列とする. ただし, $x \in \mathcal{X}$, $\theta \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^1$ とし, $\mathcal{X}$ は標本空間, Ω は母数空間とする. ここで, $\mathcal{X}$ の直積空間を $\mathcal{X}^n$ とし,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta), \quad \boldsymbol{x} := (x_1,\cdots,x_n) \in \mathcal{X}^n$$

とする. ただし, $\boldsymbol{X} := (X_1,\cdots,X_n)$ とする. また, 各 $\theta \in \Omega$ について

$$\Omega_{\theta,n} := \left\{\omega \,\middle|\, \theta + \frac{\omega}{n} \in \Omega\right\}$$

とし, λ_{1n}, λ_{2n} を $\Omega_{\theta,n}$ 上の事前確率測度とし, それらによる事前平均を

$$E_{in}(\omega) = \int_{\Omega_{\theta,n}} \omega d\lambda_{in}(\omega) \quad (i = 1,2)$$

とする. さらに $\boldsymbol{X}$ に基づく θ の漸近不偏推定量を $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(\boldsymbol{X})$, すなわち

$$E_\theta(\hat{\theta}_n)=\theta+b_n(\theta), \quad \theta\in\Omega$$

で, $b_n(\theta)=o(1/n)$ とする. ここで, 次の条件を仮定する.

(A1) ある $\alpha>0$ と Ω 上の非負値関数 $a(\cdot)$ が存在して,

$$\left|b_n\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)\right|\le\frac{a\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)}{n^{1+\alpha}}, \quad \omega\in\Omega_{\theta,n}$$

であり, また, n に無関係な定数 $M_\theta^{(1)}$ が存在して

$$\int_{\Omega_{\theta,n}}a\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)d\lambda_{in}(\omega)\le M_\theta^{(1)} \quad (i=1,2)$$

である.

このとき, 次のことが成り立つ.

定理 2.1 条件 (A1) を満たす θ の任意の漸近不偏推定量を $\hat{\theta}_n$ とすれば, $n\to\infty$ のとき

$$E_\theta\left[\{\hat{\theta}_n(\boldsymbol{X})-\theta\}^2\right] \ge \frac{(1/n^2)\{E_{1n}(\omega)-E_{2n}(\omega)\}^2+O\left(1/n^{2+\alpha}\right)}{\int_{\mathcal{X}^n}\frac{1}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)}\left\{\int_{\Omega_{\theta,n}}f_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{x},\theta+(\omega/n)\right)d\lambda_{1n}(\omega)-\int_{\Omega_{\theta,n}}f_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{x},\theta+(\omega/n)\right)d\lambda_{2n}(\omega)\right\}^2d\mu(\boldsymbol{x})}. \tag{2.1}$$

証明は, Kiefer(1952) と同様に, Schwarz の不等式を用いればよい (詳しくは, Akahira and Ohyauchi(2006b) 参照). 特に, $\theta\in\Omega_{\theta,n}$, $\lambda_{2n}(\{0\})=1$ とすれば (2.1) より

$$E_\theta\left[\{\hat{\theta}_n(\boldsymbol{X})-\theta\}^2\right]\ge\sup_{\lambda_{1n}}\frac{(1/n^2)\{E_{1n}(\omega)\}^2+O\left(1/n^{2+\alpha}\right)}{J_{\lambda_{1n}}(\theta)}, \tag{2.2}$$

となる. ただし,

$$J_{\lambda_{1n}}(\theta):=E_\theta\left[\left\{\frac{h^\theta_{\lambda_{1n}}(\boldsymbol{X})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X},\theta)}\right\}^2\right]-1 \tag{2.3}$$

$$h^\theta_{\lambda_{1n}}(\boldsymbol{x}):=\int_{\Omega_{\theta,n}}f_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{x},\theta+\frac{\omega}{n}\right)d\lambda_{1n}(\omega)$$

とする. ここで, 情報不等式 (2.2) は Kiefer の不等式の漸近的な拡張版になっている. また

$$E_\theta\left[\{\hat{\theta}_n(\boldsymbol{X})-\theta\}^2\right]=V_\theta(\hat{\theta}_n)+b_n^2(\theta)=V_\theta(\hat{\theta}_n)+O\left(\frac{1}{n^{2(1+\alpha)}}\right)$$

となるから, (2.2) より

$$V_\theta(\hat{\theta}_n)\ge\sup_{\lambda_{1n}}\frac{(1/n^2)\{E_{1n}(\omega)\}^2}{J_{\lambda_{1n}}(\theta)}+O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right), \tag{2.4}$$

になる．ただし，$V_\theta(\cdot)$ は分散を表わす．

3. 切断分布族における漸近不偏推定量の分散の下界

まず，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を (Lebesgue 測度に関する)p.d.f.

$$p(x,\theta) = \begin{cases} C(\theta)e^{S(x)} & (x > \theta), \\ 0 & (x \le \theta) \end{cases}$$

をもつ左切断分布に従う確率変数列とする．ただし，$\theta \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^1$ で，$C(\theta)$ は正規化定数とする．なお，この分布の母数に関する不偏推定については，Voinov and Nikulin(1993) 等で論じられている．ここで，$C(\theta)$ は θ について 2 回連続微分可能とする．さて，$\boldsymbol{X}$ の同時 (j.)p.d.f. は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta) = \begin{cases} C^n(\theta)e^{\sum_{i=1}^n S(x_i)} & (x_{(1)} > \theta), \\ 0 & (x_{(1)} \le \theta) \end{cases}$$

になる．ただし，$x_{(1)} := \min_{1 \le i \le n} x_i$ とする．いま，$\Omega = (0,\infty)$ とする．このとき

$$\Omega_{\theta,n} = \{\omega | \omega > -n\theta\}$$

になる．また，$\omega > 0$ について

$$\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta)}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x},\theta+(\omega/n))} = \left\{\frac{C(\theta)}{C(\theta+(\omega/n))}\right\}^n$$

となるから，事前確率測度として

$$\frac{d\lambda_{1n}}{d\omega} = k_n(\theta)\left\{\frac{C(\theta)}{C(\theta+(\omega/n))}\right\}^n, \quad \omega > 0$$

となるように取る．ただし，$k_n(\theta)$ は正規化定数とする．ここで

$$D_{in}(\theta) := \int_0^\infty \omega^i \left\{\frac{C(\theta)}{C(\theta+(\omega/n))}\right\}^n d\omega \quad (i = 0,1) \tag{3.1}$$

とおくと

$$\begin{aligned} E_{1n}(\omega) &= \int_0^\infty \omega d\lambda_{1n}(\omega) = \{D_{0n}(\theta)\}^{-1}\int_0^\infty \omega \left\{\frac{C(\theta)}{C(\theta+(\omega/n))}\right\}^n d\omega \\ &= \{D_{0n}(\theta)\}^{-1} D_{1n}(\theta), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$h^\theta_{\lambda_{1n}}(\boldsymbol{x}) := \int_0^\infty f_{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{x},\theta+\frac{\omega}{n}\right)d\lambda_{1n}(\omega) = C^n(\theta)\{D_{0n}(\theta)\}^{-1} n(x_{(1)}-\theta)e^{\sum_{i=1}^n S(x_i)} \tag{3.3}$$

になる．そして，(2.3) と (3.3) より

$$J_{\lambda_{1n}}(\theta) + 1 = E_\theta\left[\left\{\frac{h^\theta_{\lambda_{1n}}(\boldsymbol{X})}{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X},\theta)}\right\}^2\right] = \frac{1}{D^2_{0n}(\theta)}E_\theta\left[\{n(X_{(1)}-\theta)\}^2\right] \tag{3.4}$$

になる．ただし，$X_{(1)} := \min_{1\le i\le n} X_i$ とする．よって，(2.4), (3.2), (3.4) より，$n\to\infty$ のとき

$$V_\theta(\hat{\theta}_n) \ge \frac{D_{1n}^2(\theta)/D_{0n}^2(\theta)}{n^2\left\{\frac{1}{D_{0n}^2(\theta)}E_\theta\left[\left\{n(X_{(1)}-\theta)\right\}^2\right]-1\right\}} + O\left(\frac{1}{n^{2+\alpha}}\right) \tag{3.5}$$

となる．

次に，不等式 (3.5) による下界を漸近的に評価するために，まず平均値の定理より

$$\begin{aligned}\left\{\frac{C(\theta)}{C\left(\theta+(\omega/n)\right)}\right\}^n &= \exp\left[n\left\{\log C(\theta)-\log C\left(\theta+\frac{\omega}{n}\right)\right\}\right]\\ &= e^{-C'(\xi)/C(\xi)}\end{aligned}$$

になる．ただし，$\theta<\xi<\theta+(\omega/n)$ とする．ここで，次の条件を仮定する．

(A2)　正の定数 $M_\theta^{(2)}$ が存在して，任意の $\omega>0$ について

$$\exp\left\{-\frac{C'(\xi)}{C(\xi)}\omega\right\} \le \exp\left(-M_\theta^{(2)}\omega\right)$$

が成り立つ．

このとき，(3.1) と Lebesgue の収束定理より，$n\to\infty$ のとき

$$D_{0n}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\frac{C'(\xi)}{C(\xi)}\omega}d\omega = \frac{C(\theta)}{C'(\theta)} + o(1), \tag{3.6}$$

$$D_{1n}(\theta) = \int_0^\infty \omega e^{-\frac{C'(\theta)}{C(\theta)}\omega}d\omega = \left\{\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right\}^2 + o(1) \tag{3.7}$$

になる．また，$t>0$ について

$$\begin{aligned}P_\theta\left\{n(X_{(1)}-\theta)\le t\right\} &= 1-\left[1-\left\{C(\theta)\int_\theta^{\theta+(t/n)}e^{S(x)}dx\right\}\right]^n\\ &= 1-\left\{\frac{C(\theta)}{C\left(\theta+(t/n)\right)}\right\}^n\end{aligned}$$

になるから，$T_n := n(X_{(1)}-\theta)$ の p.d.f.

$$f_{T_n}(t,\theta) = \begin{cases} C(\theta)e^{S(\theta+(t/n))}\left\{\frac{C(\theta)}{C(\theta+(t/n))}\right\}^{n-1} & (t>0),\\ 0 & (t\le 0)\end{cases} \tag{3.8}$$

は，条件 (A2) により，$n\to\infty$ のとき，ある確率変数 T の p.d.f.

$$f_T(t,\theta) = \begin{cases} C(\theta)e^{S(\theta)}\exp\left\{-\frac{C'(\theta)}{C(\theta)}t\right\} & (t>0),\\ 0 & (t\le 0)\end{cases}$$

に収束する．ここで，さらに次の条件を仮定する．

(A3)　任意の $t>0$ について, $K_\theta(t)$ が存在して,

$$e^{S(\theta+(t/n))} \le K_\theta(t),$$
$$\int_0^\infty K_\theta(t)t^i \exp\left(-\frac{1}{2}M_\theta^{(2)}t\right)dt < \infty \quad (i=0,2)$$

である.

ここで, 条件 (A2), (A3) と (3.8) から $f_{T_n}(t,\theta)$ は関数

$$f_0(t,\theta) := C(\theta)K_\theta(t)\exp\left(-\frac{1}{2}M_\theta^{(2)}t\right)$$

によって支配されるから

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left[n(X_{(1)}-\theta)\right] = E_\theta(T) = \frac{C(\theta)}{C'(\theta)}, \tag{3.9}$$

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta\left[\left\{n(X_{(1)}-\theta)\right\}^2\right] = E_\theta(T^2) = 2\left\{\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right\}^2 \tag{3.10}$$

になり, $X_{(1)}$ は (3.9) より θ の漸近不偏推定量ではないことが分かる. そこで偏り補正した推定量

$$\hat{\theta}_n^*(\boldsymbol{X}) := X_{(1)} - \frac{C(X_{(1)})}{nC'(X_{(1)})}$$

を考えると,

$$\hat{\theta}_n^*(\boldsymbol{X}) = X_{(1)} - \frac{C(\theta)}{nC'(\theta)} - \frac{1}{n^2}\left\{1 - \frac{C(\xi)C''(\xi)}{(C'(\xi))^2}\right\}n(X_{(1)}-\theta) \tag{3.11}$$

となる. ただし, $|\xi-\theta| < |X_{(1)}-\theta|$ とする. そこで, $T_n = n(X_{(1)}-\theta)$ であるから, (3.11) より

$$E_\theta\left[n(\hat{\theta}_n^*-\theta)\right] = E_\theta(T_n) - \frac{C(\theta)}{C'(\theta)} - \frac{1}{n}E_\theta\left[\left\{1-\frac{C(\xi)C''(\xi)}{(C'(\xi))^2}\right\}T_n\right] \tag{3.12}$$

になり, $E_\theta(\hat{\theta}_n^*)$ を $o(1/n)$ まで評価するために, (3.8) から

$$f_{T_n}(t,\theta) = C(\theta)e^{S(\theta)}e^{-\frac{C'(\theta)}{C(\theta)}t}\left\{1 + \frac{\alpha(\theta)}{n}t - \frac{\beta(\theta)}{n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

を得る. ただし

$$\alpha(\theta) = S'(\theta) + \frac{C'(\theta)}{C(\theta)}, \quad \beta(\theta) = \frac{1}{2}\left(\log C(\theta)\right)''$$

とする. このとき

$$E_\theta(T_n) = \frac{C(\theta)}{C'(\theta)} + \frac{2}{n}\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)^2\left\{\alpha(\theta) - 3\beta(\theta)\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になり, (3.12) から

$$E_\theta\left[n(\hat{\theta}_n^* - \theta)\right] = \frac{2}{n}\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)^2\left\{\alpha(\theta) - 3\beta(\theta)\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)\right\}$$
$$-\frac{1}{n}E_\theta\left[\left\{1 - \frac{C(\xi)C''(\xi)}{(C'(\xi))^2}\right\}T_n\right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.13}$$
$$= \frac{1}{n}a_0(\theta) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

になる. ここで, Schwarz の不等式より

$$|a_0(\theta)| \le 2\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)^2\left|\alpha(\theta) - 3\beta(\theta)\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)\right|$$
$$+\left(E_\theta\left[\left\{1 - \frac{C(\xi)C''(\xi)}{(C'(\xi))^2}\right\}^2\right]\right)^{1/2}\left(E_\theta(T_n^2)\right)^{1/2} \tag{3.14}$$

になり, (3.10) から任意の $\varepsilon > 0$ について, 十分大きい n をとれば

$$E_\theta\left(T_n^2\right) \le 2\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)^2 + \varepsilon$$

になる. いま

$$a_1(\theta) := 2\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)^2\left|\alpha(\theta) - 3\beta(\theta)\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)\right|$$
$$+\left(E_\theta\left[\left\{1 - \frac{C(\xi)C''(\xi)}{(C'(\xi))^2}\right\}^2\right]\right)^{1/2}\left\{2\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)^2 + \varepsilon\right\}^{1/2} \tag{3.15}$$

とおいて, 次の条件を仮定する.

(A1)* ある定数 M_θ^* が存在して

$$\int_0^\infty a_1\left(\theta + \frac{\omega}{n}\right)d\lambda_{1n}(\omega) \le M_\theta^*$$

が成り立つ.

このとき, (3.13), (3.14), (3.15) より, 条件 (A1)* が成り立てば, 条件 (A1) が成り立ち, また $\hat{\theta}_n^*$ は θ の漸近不偏推定量になる. さらに, (3.10), (3.11) から, $n \to \infty$ のとき

$$E_\theta\left[\left\{n(\hat{\theta}_n^* - \theta)\right\}^2\right] = E_\theta\left(T_n^2\right) - \left\{\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right\}^2 + o(1)$$
$$= \left\{\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right\}^2 + o(1) \tag{3.16}$$

になり, (3.5), (3.6), (3.7), (3.10) から

$$B_n(\theta) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right\}^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる. 一方, (3.16) から

$$V_\theta(\hat{\theta}_n^*) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right\}^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

になる. よって, 条件 (A1)*, (A2), (A3) の下で, θ の漸近不偏推定量 $\hat{\theta}_n^*$ は情報不等式 (3.5) による下界を達成するという意味で漸近有効推定量になる.

上記において左切断分布族について論じたが, 右切断分布族についても同様に論じることができる.

4. 切断正規分布の場合

まず, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を p.d.f.

$$p(x,\theta) = \begin{cases} C(\theta)e^{-x^2/2} & (x > \theta), \\ 0 & (x \le \theta) \end{cases}$$

をもつ左切断正規分布に従う確率変数列とする. ただし, $\theta > 0$ で,

$$C(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\{1 - \Phi(\theta)\}}$$

とし, Φ は標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数とする. いま, ϕ を $N(0,1)$ の p.d.f. として

$$g(\theta) := \frac{C'(\theta)}{C(\theta)} = \frac{\phi(\theta)}{1 - \Phi(\theta)}$$

とおくち, これは区間 $(0,\infty)$ 上で単調増加関数であるから, 条件 (A2) において $M_\theta^{(2)}$ として $g(\theta)$ とすれば, それは満たされる. また, $S(x) = -x^2/2$ であるから

$$e^{S(\theta+(t/n))} = e^{-\frac{1}{2}(\theta+(t/n))^2} \le 1$$

になり, 条件 (A3) において, $K_\theta(t) \equiv 1$ とすると

$$\int_0^\infty t^i \exp\left\{-\frac{1}{2}g(\theta)t\right\}dt < \infty \quad (i = 0, 2)$$

になるから, 条件 (A3) は満たされる. また

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{C(\theta)}{C'(\theta)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{\theta\to\infty}\frac{C(\theta)}{C'(\theta)} = 0,$$

$$\lim_{\theta\to 0}(\log C(\theta))'' = \lim_{\theta\to 0}\frac{\phi(\theta)\{\phi(\theta) - \theta(1 - \Phi(\theta))\}}{\{1 - \Phi(\theta)\}^2} = \frac{8}{\pi}, \quad \lim_{\theta\to\infty}(\log C(\theta))'' = 1,$$

$$\lim_{\theta\to 0} S'(\theta) = \lim_{\theta\to 0}(-\theta e^{-\theta^2/2}) = 0, \quad \lim_{\theta\to\infty} S'(\theta) = 0$$

になるから, $C(\theta)/C'(\theta)$, $(\log C(\theta))''$, $S'(\theta)$ は区間 $(0,\infty)$ 上で有界になる. さらに

$$\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)' = 1 - \frac{C(\theta)C''(\theta)}{(C'(\theta))^2} = \frac{-\phi(\theta) + \theta\left(1 - \Phi(\theta)\right)}{\phi(\theta)}$$

であるから

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)' = -1, \quad \lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{C(\theta)}{C'(\theta)}\right)' = 0$$

となり, $(C(\theta)/C'(\theta))'$ は区間 $(0,\infty)$ 上で有界になり, 条件 (A1)* が満たされる. よって, θ の漸近不偏推定量

$$\hat{\theta}_n^*(\boldsymbol{X}) = X_{(1)} - \frac{1}{n\phi(X_{(1)})}\left\{1 - \Phi(X_{(1)})\right\}$$

の分散は, $n\to\infty$ のとき

$$V_\theta(\hat{\theta}_n^*) = \frac{1}{n^2}\left\{\frac{1-\Phi(\theta)}{\phi(\theta)}\right\}^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となり, 情報不等式 (3.5) による下界を達成する.

上記と同様にして, 右切断正規分布の場合にも論じることができる.

参考文献

Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2003). An information inequality for the Bayes risk applicable to non-regular cases. *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci.*, **1334**, Kyoto University, 183–191.

Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2006a). A Bayesian view of the Hammersley-Chapman-Robbins type inequality. In revision in *Statistics*.

Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2006b). The asymptotic bound by the Kiefer type information inequality and its attainment. *Mathematical Research Note* 2006–001, Institute of Mathematics, University of Tsukuba.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Lecture Notes in Statistics 107, Springer, New York.

Kiefer, J. (1952). On minimum variance estimators. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 627–629.

Ohyauchi, N. (2004). The Vincze inequality for the Bayes risk. *J. Japan Statist. Soc.*, **34**, 65–74.

Ohyauchi, N. and Akahira, M. (2005). Lower bounds for the Bayes risk of unbiased estimators in non-regular cases. (In Japanese). *Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci.*, **1439**, Kyoto University, 247–253.

Vincze, I. (1992). On nonparametric Cramér-Rao inequalities. In: *Order Statistics and Nonparametrics: Theory and Applications* (P. K. Sen and I. A. Salama, eds. Elsevier Science Publishers B. V.), 439–454.

Voinov, V. G. and Nikulin, M. S. (1993). *Unbiased Estimators and Their Applications. Vol. 1: Univariate Case.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.