数理解析研究所講究録
1506巻 2006年 115-136

Equivariant estimation in the linear regression model

筑波大・数理物質　辻　邦彦 (Kunihiko Tsuji)
Graduate School of Pure and Applied Science
University of Tsukuba
筑波大・数理物質　赤平　昌文 (Masafumi Akahira)
Graduate School of Pure and Applied Science
University of Tsukuba

1 はじめに

統計的推測において, 位置尺度母数分布モデルは基本的であり, 適当な損失関数の下でリスクを最小にする推定量を求める問題は重要である. いくつかの損失関数の下での最小のリスクをもつ共変推定量 (minimum risk equivariant, 略して MRE 推定量) の形は既に得られていて, そこでは補助統計量に基づく条件付分布が重要な役割を果たし, 特に, 2 乗損失の下での MRE 推定量を具体的に求めることができる (Reid [R95], Lehmann and Casella [LC98]). 一方, 実験などにおいては, 時間に比例して観測されるデータを扱うことがある. このような場合, 線形回帰モデルが有用であり, これは位置尺度母数分布族と類似したモデルと捉えられる. しかし, この線形回帰モデルの下での共変推定量については, 従来あまり論じられていなかった (Takeuchi[Ta03]).

本論では, 時間を伴うある線形回帰モデルにおいて, 2 乗損失の下での位置及び尺度共変推定について考察する. まず, このモデルにおける共変推定量を定義し, [LC98] と同様の方法で, 2 乗損失の下での MRE 推定量の構成について論じ, その具体例として正規分布, 一様分布を挙げる. さらに, 小方・赤平 [OA04] に基づいて, MRE 推定量の条件付信頼区間への応用を試みるとともに, その信頼区間の妥当性についても数値的に確かめる.

2 設定

確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が,

$$X_i = \mu + \alpha t_i + \sigma U_i \quad (\alpha \in \boldsymbol{R}^1, \sigma \in \boldsymbol{R}^+ := (0, \infty)) \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{2.1}$$

を満たすとする. ただし, U_i $(i = 1, \cdots, n)$ はたがいに独立にいずれも確率密度関数 (probability density function, 略して p.d.f.) $f(u)$ をもつ分布に従う確率変数とし, $\mu \in \boldsymbol{R}^1$, $t_1, \cdots, t_n \in \boldsymbol{R}^+$ は既知の定数とする. ここで, $t_1, \cdots, t_n$ は時間と見なすことができる. このとき, 各 X_i の p.d.f. は $(1/\sigma)f((x_i - \mu - \alpha t_i)/\sigma)$ $(i = 1, \cdots, n)$ となり, 確率ベクトル $\boldsymbol{X} := (X_1, \cdots, X_n)$ の同時 (joint(j.))p.d.f. は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\sigma^n} \prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i - \mu - \alpha t_i}{\sigma}\right) \tag{2.2}$$

となる. ただし, $\boldsymbol{x} := (x_1. \cdots, x_n)$ とする. そして, $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{t} := (t_1, \cdots, t_n)$ に基づいて, α, σ の推定を行うことを考える.

定義 2.1 推定量 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$, $\delta(\boldsymbol{X})$, $\psi(\boldsymbol{X})$ が, 任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}^1$, $\sigma \in \boldsymbol{R}^+$ に対して

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) = \hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) + \alpha \tag{2.3}$$

$$\hat{\sigma}(\sigma \boldsymbol{X}) = \sigma \hat{\sigma}(\boldsymbol{X}) \tag{2.4}$$

$$\delta(\sigma \boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) = \sigma \delta(\boldsymbol{X}) + \alpha \tag{2.5}$$

$$\psi(\sigma \boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) = \psi(\boldsymbol{X}) \tag{2.6}$$

を満たすとき, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$, $\delta(\boldsymbol{X})$, $\psi(\boldsymbol{X})$ をそれぞれ**位置共変推定量** (**location equivariant estimator**) , **尺度共変推定量** (**scale equivariant estimator**), **位置尺度共変推定量** (**location-scale equivariant estimator**). **不変推定量** (**invariant estimator**) という.

3 最小リスク共変推定量の構成

3.1 α が未知, σ が既知の場合

まず, (2.1) において, α は未知, σ は既知とする. このとき, 一般性を失うことなく $\sigma = 1$ とできるから, $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f.(2.2) は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \mu - \alpha t_i) \tag{3.1}$$

となる. このとき, $\boldsymbol{X}$ に基づく位置共変推定量を用いて α を推定することを考える. いま, 損失関数を $L(d, \alpha) := (d - \alpha)^2$ (2 乗損失) とし, リスクを平均損失で定義すれば, 任意の位置共変推定量 $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ のリスクは,

$$\begin{aligned}
E_\alpha[L(\hat{\alpha}(\boldsymbol{X}), \alpha)] &= E_\alpha\left[(\hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) - \alpha)^2\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{\alpha}(x_1, \cdots, x_n) - \alpha\}^2 \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \mu - \alpha t_i) dx_1 \cdots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{\alpha}(x_1 - \alpha t_1, \cdots, x_n - \alpha t_n)\}^2 \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \mu - \alpha t_i) dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

となる. ここで, $y_i := x_i - \alpha t_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ と変数変換するとヤコビアン $J = \partial(x_1, \cdots, x_n) / \partial(y_1, \cdots, y_n)$ について, $|J| = 1$ であるから,

$$E_\alpha[L(\hat{\alpha}(\boldsymbol{X}), \alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{\alpha}(y_1, \cdots, y_n)\}^2 \prod_{i=1}^{n} f(y_i - \mu) dy_1 \cdots dy_n$$

となるので, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ のリスクは α に依存しない.

定理 3.1 $\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})$ を任意の位置共変推定量とする. このとき, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ が位置共変推定量になるための必要十分条件は

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) = \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + u(\boldsymbol{X}) \tag{3.2}$$

と表せることである. ただし, $u(\boldsymbol{x})$ は任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}^1$, $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$u(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{t}) = u(\boldsymbol{x}) \tag{3.3}$$

を満たすとする.

証明 (3.2),(3.3) が成り立つと仮定すると, 任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}^1$ に対して,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) &= \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) + u(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) \\ &= \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + \alpha + u(\boldsymbol{X}) \\ &= \hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) + \alpha\end{aligned}$$

となるから, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ は位置共変推定量になる.

逆に, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ が位置共変推定量であるとし,

$$u(\boldsymbol{X}) := \hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) - \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})$$

とおくと,

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) &= \hat{\alpha}(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) - \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X} + \alpha \boldsymbol{t}) \\ &= (\hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) + \alpha) - (\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + \alpha) \\ &= \hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) - \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) \\ &= u(\boldsymbol{X})\end{aligned}$$

となるから, (3.2),(3.3) が成り立つ. □

定理 3.2 関数 $u(\boldsymbol{x})$ が (3.3) を満たすための必要十分条件は, $n \geq 2$ のとき, $u(\boldsymbol{x})$ が $y_i := x_i - (t_i/t_n)x_n$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ の関数になることであり, $n = 1$ のとき, $u(\boldsymbol{x})$ が定数になることである.

証明 $n = 1$ のときは明らかなので, $n \geq 2$ のときを示す. まず, $u(\boldsymbol{x})$ が (3.3) を満たすとすると,

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{x}) &= u\left(\boldsymbol{x} - \frac{x_n}{t_n}\boldsymbol{t}\right) \\ &= u\left(x_1 - \frac{t_1}{t_n}x_n, \cdots, x_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}, 0\right) \\ &=: v(y_1, \cdots, y_{n-1})\end{aligned}$$

となるので, $u(\boldsymbol{x})$ は $y_i := x_i - (t_i/t_n)x_n$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ の関数になる.

逆に, $u(\boldsymbol{x})$ が $y_i := x_i - (t_i/t_n)x_n$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ の関数であるとすると,

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{t}) &= v\left(x_1 + \alpha t_1 - \frac{t_1}{t_n}(x_n + \alpha t_n), \cdots, x_{n-1} + \alpha t_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}(x_n + \alpha t_n)\right) \\ &= v\left(x_1 - \frac{t_1}{t_n}x_n, \cdots, x_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}x_n\right) \\ &= u(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となり, (3.3) を満たす. □

定理 3.3 各 $i = 1, \cdots, n-1$ について $Y_i := X_i - (t_i/t_n)X_n$ とすると, $\boldsymbol{Y} := (Y_1, \cdots, Y_{n-1})$ の分布は α に依存しない, すなわち, $\boldsymbol{Y}$ は補助統計量になる.

証明 まず, $Y_i := X_i - (t_i/t_n)X_n$ $(i = 1, \cdots, n-1)$, $S := (X_n/t_n)$ と変数変換すると,

$$\begin{cases} X_1 = Y_1 + t_1 S \\ \quad \vdots \\ X_{n-1} = Y_{n-1} + t_{n-1} S \\ X_n = t_n S \end{cases}$$

となり, ヤコビアン $J = \partial(x_1, \cdots, x_n)/\partial(y_1, \cdots, y_{n-1}, s)$ について, $|J| = t_n$ であるから, $(\boldsymbol{Y}, S)$ の j.p.d.f. は

$$f_{\boldsymbol{Y},S}(\boldsymbol{y}, s) = t_n \prod_{i=1}^{n} f(y_i + t_i s - \mu - \alpha t_i) \tag{3.4}$$

となる. ただし, 便宜上, $y_n = 0$ とする. よって, $\boldsymbol{Y}$ の周辺 (marginal(m.))p.d.f. は

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} t_n \prod_{i=1}^{n} f(y_i + t_i s - \mu - \alpha t_i) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t_n \prod_{i=1}^{n} f\left(y_i - \mu - (\alpha - s)t_i\right) ds \end{aligned}$$

となり, $s' := \alpha - s$ と変数変換すると,

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} t_n \prod_{i=1}^{n} f(y_i - \mu - s' t_i) ds' \tag{3.5}$$

となる. よって, $\boldsymbol{Y}$ の分布は α に依存しない. □

定理 3.1, 定理 3.2, 定理 3.3 より, 位置共変推定量全体のクラス $\mathcal{L}$ は, 補助統計量 $\boldsymbol{Y}$ の関数 $v(\boldsymbol{Y})$ を動かすことで得られる, すなわち, 任意の位置共変推定量 $\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})$ に対して, $\mathcal{L} = \{\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + v(\boldsymbol{Y}) | v(\cdot)\}$ となる.

次に, 位置共変推定量全体のクラスの中で, 最小のリスクをもつ推定量, すなわち最小リスク共変 (minimum risk equivariant, 略して **MRE**) 推定量を求める.

定理 3.4 確率ベクトル $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f. が (3.1) で与えられるものとし, 損失関数を 2 乗損失とする. このとき, $\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})$ を任意の位置共変推定量とすると,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) &:= \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) - E_{\alpha=0}\left[\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) | \boldsymbol{Y}\right] \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \mu - z t_i) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} f(X_i - \mu - z t_i) dz} \end{aligned} \tag{3.6}$$

が α の MRE 推定量である.

証明 定理 3.1, 定理 3.2 より, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X}) = \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + v(\boldsymbol{Y})$ は位置共変推定量になる. ここで $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ のリスクは α と無関係であるから,

$$E_{\alpha=0}\left[\{\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})\}^2\right] = E_{\alpha=0}\left[\{\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + v(\boldsymbol{Y})\}^2\right]$$

を最小にすればよい. いま,

$$\begin{aligned}
&E_{\alpha=0}[\{\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})\}^2] \\
&= E_{\alpha=0}\left[E_{\alpha=0}\left[\{\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) + v(\boldsymbol{Y})\}^2 \middle| \boldsymbol{Y}\right]\right] \\
&= E_{\alpha=0}\left[\{v(\boldsymbol{Y})\}^2 + 2E_{\alpha=0}\left[\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{Y}\right] v(\boldsymbol{Y}) + E_{\alpha=0}\left[\{\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})\}^2 \middle| \boldsymbol{Y}\right]\right] \\
&= E_{\alpha=0}\left[\left\{v(\boldsymbol{Y}) + E_{\alpha=0}\left[\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{Y}\right]\right\}^2 + E_{\alpha=0}\left[\{\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})\}^2 \middle| \boldsymbol{Y}\right] - \left\{E_{\alpha=0}\left[\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{Y}\right]\right\}^2\right]
\end{aligned}$$

となるから, $v^*(\boldsymbol{Y}) := -E_{\alpha=0}[\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Y}]$ のときリスクは最小になる. 従って, $\hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) := \hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) - E_{\alpha=0}[\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Y}]$ は α の MRE 推定量になる. ここで, $\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X})$ として, $\hat{\alpha}_0(\boldsymbol{X}) = X_n/t_n =: S$ をとると, $(\boldsymbol{Y}, S)$ の j.p.d.f., $\boldsymbol{Y}$ の p.d.f. はそれぞれ (3.4),(3.5) で与えられるので, $\boldsymbol{Y}$ が与えられたときの S の c.p.d.f. は

$$f_{S|\boldsymbol{Y}}(s|\boldsymbol{y};\alpha) := \frac{\prod_{i=1}^n f\left(y_i - \mu - (\alpha - s)t_i\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(y_i - \mu - zt_i)dz}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha=0}[S|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s \prod_{i=1}^n f\left(y_i - \mu + st_i\right) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(y_i - \mu - zt_i)dz} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s \prod_{i=1}^n f\left(x_i - \frac{t_i}{t_n}x_n - \mu + st_i\right) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f\left(x_i - \frac{t_i}{t_n}x_n - \mu - zt_i\right) dz} \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s \prod_{i=1}^n f\left(x_i - \mu - \left(\frac{x_n}{t_n} - s\right) t_i\right) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f\left(x_i - \mu - \left(\frac{x_n}{t_n} + z\right) t_i\right) dz}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $s' := (x_n/t_n) - s$, $z' := (x_n/t_n) + z$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha=0}[S|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}] &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_n}{t_n} - s'\right) \prod_{i=1}^n f(x_i - \mu - s't_i)ds'}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(x_i - \mu - z't_i)dz'} \\
&= \frac{x_n}{t_n} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s' \prod_{i=1}^n f(x_i - \mu - s't_i)ds'}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(x_i - \mu - z't_i)dz'}
\end{aligned}$$

となる. 従って,

$$\begin{aligned}
\alpha^*(\boldsymbol{X}) &= S - E_{\alpha=0}[S|\boldsymbol{Y}] \\
&= \frac{X_n}{t_n} - \left(\frac{X_n}{t_n} - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z \prod_{i=1}^n f(X_i - \mu - zt_i)dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(X_i - \mu - zt_i)dz}\right) \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z \prod_{i=1}^n f(X_i - \mu - zt_i)dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n f(X_i - \mu - zt_i)dz}
\end{aligned}$$

となり, (3.6) が成り立つ. □

なお, (3.6) は通常の位置母数分布族の場合 ([A05], [LC98]) と類似した形をしており, $\boldsymbol{t}$ を考慮したピットマン推定量と考えられる. また, (3.6) は α の一般事前密度を $\pi(\alpha) \equiv 1$ としたときの, α の一般ベイズ推定量と一致する.

例 3.5 (正規分布). まず, (2.1) において $\sigma = 1$ とし, r.v. $U_1, \cdots, U_n$ がたがいに独立にいずれも標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき, すなわち, その p.d.f. が

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad , \quad u \in \boldsymbol{R}^1$$

であるとき, $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f. は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu - \alpha t_i)^2\right\}$$

になるから, (3.6) より α の MRE 推定量は

$$\hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \alpha \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu - \alpha t_i)^2\right\} d\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu - \alpha t_i)^2\right\} d\alpha} =: \frac{A}{B} \tag{3.7}$$

となる. (3.7) の分子については,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{t_i^2\alpha^2 - 2(X_i - \mu)t_i\alpha + (X_i - \mu)^2\right\}\right] d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)\alpha^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i\alpha + \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right\}\right] d\alpha \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)\left\{\alpha - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\right\}^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right] d\alpha \\
&= \sqrt{\frac{2\pi}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} \exp\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right]
\end{aligned}$$

となる. (3.7) の分母についても同様に計算すると,

$$B = \sqrt{\frac{2\pi}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}} \exp\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\right\} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right]$$

となる. よって, α の MRE 推定量は

$$\hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2} = \sum_{i=1}^{n} c_i(X_i - \mu) \tag{3.8}$$

となる. ただし, $c_i := t_i/(\sum_{i=1}^n t_i^2)$ $(i = 1, \cdots, n)$ とする. この場合, MRE 推定量 (3.8) は最尤推定量でもある.

例 3.6 (一様分布). まず, (2.1) において $\sigma = 1$ とし, 確率変数 $U_1, \cdots, U_n$ がたがいに独立にいずれも一様分布 $U(-1/2, 1/2)$ に従うとき, すなわち, その p.d.f. が

$$f(u) := \begin{cases} 1 & (-\frac{1}{2} < u < \frac{1}{2}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

であるとき, 各 $i = 1, \cdots, n$ について,

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 1 & (\mu + \alpha t_i - \frac{1}{2} < x_i < \mu + \alpha t_i + \frac{1}{2}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となるので, $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ の j.p.d.f. は,

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & (\mu + \alpha t_i - \frac{1}{2} < x_i < \mu + \alpha t_i + \frac{1}{2} \quad (i = 1, \cdots, n)), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} & \mu + \alpha t_i - \frac{1}{2} < X_i < \mu + \alpha t_i + \frac{1}{2} \quad (i = 1, \cdots, n) \\ \iff & \frac{X_i - \mu - (1/2)}{t_i} < \alpha < \frac{X_i - \mu + (1/2)}{t_i} \quad (i = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{3.9}$$

であるから, $Y_i^- := (X_i - \mu - (1/2))/t_i$, $Y_i^+ := (X_i - \mu + (1/2))/t_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とし, $Y_{(1)}^- \leq \cdots \leq Y_{(n)}^-$, $Y_{(1)}^+ \leq \cdots \leq Y_{(n)}^+$ をそれぞれ $(Y_1^-, \cdots, Y_n^-), (Y_1^+, \cdots, Y_n^+)$ の順序統計量とすれば,

$$(3.9) \iff Y_{(n)}^- < \alpha < Y_{(1)}^+$$

となる. よって, α の MRE 推定量は

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) &= \int_{Y_{(n)}^-}^{Y_{(1)}^+} \alpha \, d\alpha \Big/ \int_{Y_{(n)}^-}^{Y_{(1)}^+} d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(Y_{(1)}^- \right)^2 - \left(Y_{(n)}^+ \right)^2 \right\} \Big/ \left(Y_{(1)}^+ - Y_{(n)}^- \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(Y_{(1)}^+ + Y_{(n)}^- \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \min_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{X_i - \mu + \frac{1}{2}}{t_i} \right) + \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{X_i - \mu - \frac{1}{2}}{t_i} \right) \right\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

となる. ここで, (3.10) は通常の位置母数分布族の場合 ([LC98]) と類似の形をしており, $\boldsymbol{t}$ を考慮した補正統計量と考えられる.

3.2　α が既知, σ が未知の場合

ここでは, 推定量 $\hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X})$ が, 任意の $\alpha \in \boldsymbol{R}^1, \sigma \in \boldsymbol{R}^+$ に対して,

$$\hat{\sigma}^*(\sigma\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{t}) = \sigma\hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X}) \tag{3.11}$$

を満たす場合を考える. (3.11) を満たす推定量 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ を強意の尺度共変推定量と呼ぶことにする. ここで, (3.11) は (2.4) よりも強い条件であることに注意. いま, $\mu = 0$ としても一般性は失われないから, $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f.(2.2) は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i - \alpha t_i}{\sigma}\right) \tag{3.12}$$

となる. 損失関数を

$$L(d, \sigma) := \left(\frac{d-\sigma}{\sigma}\right)^2 \tag{3.13}$$

とし, リスクを平均損失で定義すれば, 任意の強意の尺度共変推定量に対して,

$$\begin{aligned}
&E_\sigma[L(\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}), \sigma)]\\
&= E_\sigma\left[\left\{\frac{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}) - \sigma}{\sigma}\right\}^2\right]\\
&= \int\cdots\int\left\{\frac{\hat{\sigma}(x_1, \cdots, x_n)}{\sigma} - 1\right\}^2 \frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i - \alpha t_i}{\sigma}\right) dx_1\cdots dx_n\\
&= \int\cdots\int\left\{\hat{\sigma}\left(\frac{x_1 - \alpha t_1}{\sigma}, \cdots, \frac{x_n - \alpha t_n}{\sigma}\right) - 1\right\}^2 \frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_i - \alpha t_i}{\sigma}\right) dx_1\cdots dx_n
\end{aligned}$$

となり, $y_i := (x_i - \alpha t_i)/\sigma \ (i = 1, \cdots, n)$ と変数変換すると, ヤコビアンは σ^n であるから,

$$E_\sigma[L(\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}), \sigma)] = \int\cdots\int\{\hat{\sigma}(y_1, \cdots, y_n) - 1\}^2\prod_{i=1}^{n} f(y_i)dy_1\cdots dy_n$$

となるので, リスクは σ に依存しない.

定理 3.7　$\boldsymbol{X}$ は j.p.d.f.(3.12) をもつとし, $\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ を任意の強意の尺度共変推定量とする. このとき, 推定量 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ が強意の尺度共変推定量になるための必要十分条件は

$$\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}) = w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) \tag{3.14}$$

を満たすような関数 $w(\boldsymbol{Z})$ が存在することである. ただし, $\boldsymbol{Z} := (Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ は

$$Z_i := \frac{Y_i}{Y_{n-1}} \quad (i = 1, \cdots, n-2), \quad Z_{n-1} := \frac{Y_{n-1}}{|Y_{n-1}|} \tag{3.15}$$

とし, Y_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ は定理 3.3 で与えられるものとする.

証明. (3.14), (3.15) を仮定すると,

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\sigma\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{t}) &= w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\sigma\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{t}) \\ &= w(\boldsymbol{Z}) \cdot \sigma\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) \\ &= \sigma\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})\end{aligned}$$

となるので, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ は強意の尺度共変推定量になる.

逆に, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ を強意の尺度共変推定量とすると,

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})}{\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})} &= \frac{\hat{\sigma}(X_1, \cdots, X_n)}{\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})} \\ &= \frac{\frac{1}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\hat{\sigma}\left(X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n, \cdots, X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n, 0\right)}{\frac{1}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\hat{\sigma}_0\left(X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n, \cdots, X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n, 0\right)} \\ &= \frac{\hat{\sigma}\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, 0\right)}{\hat{\sigma}_0\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, 0\right)}\end{aligned} \tag{3.16}$$

となり,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-2} - \frac{t_{n-2}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\right)^t \\ &\mapsto \left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}, \cdots, \frac{X_{n-2} - \frac{t_{n-2}}{t_n}X_n}{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\right)^t\end{aligned}$$

は 1 対 1 対応だから, (3.16) は $\boldsymbol{Z}$ の関数となる. よって,

$$w(\boldsymbol{Z}) := \frac{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})}{\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})}$$

とおけば, (3.14),(3.15) が成り立つ. □

定理 3.8 定理 3.7 の仮定の下で,

$$\hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X}) := \frac{E_{\sigma=1}[\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) \tag{3.17}$$

は MRE 推定量になる. ただし, $\boldsymbol{Z}$ は定理 3.7 で与えられるものとする.

証明. 定理 3.7 より, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}) = w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ は強意尺度共変推定量になる. $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ のリスクは σ に無関係であるから,

$$E_{\sigma=1}\left[\{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}) - 1\}^2\right] = E_\sigma\left[\{w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) - 1\}^2\right]$$

を最小にすればよい. ここで,

$$
\begin{aligned}
&E_{\sigma=1}\left[\{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})-1\}^2\right]\\
&=E_{\sigma=1}\left[E_{\sigma=1}\left[\{w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})-1\}^2\middle|\boldsymbol{Z}\right]\right]\\
&=E_{\sigma=1}\left[E_{\sigma=1}\left[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2\middle|\boldsymbol{Z}\right](w(\boldsymbol{Z}))^2-2E_{\sigma=1}\left[\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})\middle|\boldsymbol{Z}\right]w(\boldsymbol{Z})+1\right]\\
&=E_{\sigma=1}\left[E_{\sigma=1}\left[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2\middle|\boldsymbol{Z}\right]\left\{w(\boldsymbol{Z})-\frac{E_{\sigma=1}[\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}\right\}^2-\frac{(E_{\sigma=1}[\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}])^2}{E_{\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}+1\right]
\end{aligned}
$$

となるから,

$$
w^*(\boldsymbol{Z}):=\frac{E_{\sigma=1}[\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}
$$

のとき, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ のリスクは最小になる. よって, MRE 推定量は,

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X})&:=w^*(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})\\
&=\frac{E_{\sigma=1}[\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})
\end{aligned}
$$

となり, (3.17) が成り立つ. □

3.3 α, σ がともに未知の場合

まず, (2.1) において, α, σ がともに未知とする. 一般性を失わずに $\mu=0$ としてよいから, $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)$ の j.p.d.f.(2.2) は

$$
f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i-\alpha t_i}{\sigma}\right) \tag{3.18}
$$

となる. このとき, $\boldsymbol{X}$ に基づく位置尺度共変推定量, 強意尺度共変推定量を用いて, α,σ の推定を行う, いま, α,σ に対する損失関数をそれぞれ

$$
L(d,\alpha):=\left(\frac{d-\alpha}{\sigma}\right)^2 \tag{3.19}
$$

$$
L(d,\sigma):=\left(\frac{d-\sigma}{\sigma}\right)^2 \tag{3.20}
$$

とし, リスクを平均損失で定義する. このとき, 任意の位置尺度共変推定量 $\delta(\boldsymbol{X})$ に対して,

$$
\begin{aligned}
E_{\alpha,\sigma}\left[\left(\frac{\delta(\boldsymbol{X})-\alpha}{\sigma}\right)^2\right]&=\int\cdots\int\left\{\frac{\delta(\boldsymbol{x})-\alpha}{\sigma}\right\}^2\frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i-\alpha t_i}{\sigma}\right)d\boldsymbol{x}\\
&=\int\cdots\int\left\{\delta\left(\frac{\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{t}}{\sigma}\right)\right\}^2\frac{1}{\sigma^n}\prod_{i=1}^n f\left(\frac{x_i-\alpha t_i}{\sigma}\right)d\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となり, $y_i:=(x_i-\alpha t_i)/\sigma\ (i=1,\cdots,n)$ と変数変換すれば,

$$
E_{\alpha,\sigma}\left[\left(\frac{\delta(\boldsymbol{X})-\alpha}{\sigma}\right)^2\right]=\int\cdots\int\{\delta(\boldsymbol{y})\}^2\prod_{i=1}^n f(y_i)d\boldsymbol{y}
$$

となるので, $\delta(\boldsymbol{X})$ のリスクは α, σ に依存しない. また, 第3.2節より, 任意の強意尺度共変推定量のリスクも α, σ に依存しない.

定理 3.9 $\delta_0(\boldsymbol{X})$ を任意の位置尺度共変推定量とし, $\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ を任意の強意尺度共変推定量とする. このとき, $\delta(\boldsymbol{X})$ が位置尺度共変推定量になるための必要十分条件は

$$\delta(\boldsymbol{X}) = \delta_0(\boldsymbol{X}) - w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) \tag{3.21}$$

を満たす関数 $w(\boldsymbol{Z})$ が存在することである. ただし, $\boldsymbol{Z} := (Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ は

$$Z_i := \frac{Y_i}{Y_{n-1}} \quad (i = 1, \cdots, n-2), \quad Z_{n-1} := \frac{Y_{n-1}}{|Y_{n-1}|} \tag{3.22}$$

とし, Y_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ は定理3.3で与えられるものとする.

証明 まず, (3.21),(3.22) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
\delta(\sigma\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{t}) &= \delta_0(\sigma\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{t}) - w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\sigma\boldsymbol{X} + \alpha\boldsymbol{t}) \\
&= \sigma\delta_0(\boldsymbol{X}) + \alpha - \sigma w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) \\
&= \sigma\left(\delta_0(\boldsymbol{X}) - w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})\right) + \alpha \\
&= \sigma\delta(\boldsymbol{X}) + \alpha
\end{aligned}$$

となるので, $\delta(\boldsymbol{X})$ は位置尺度共変推定量になる.

逆に, $\delta(\boldsymbol{X})$ を位置尺度共変推定量とすると,

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta_0(\boldsymbol{X}) - \delta(\boldsymbol{X})}{\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})} \\
&= \frac{\delta_0(X_1, \cdots, X_n) - \delta(X_1, \cdots, X_n)}{\hat{\sigma}_0(X_1, \cdots, X_n)} \\
&= \frac{\frac{1}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\left\{\delta_0(X_1, \cdots, X_n) - \frac{X_n}{t_n}\right\} - \frac{1}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\left\{\delta(X_1, \cdots, X_n) - \frac{X_n}{t_n}\right\}}{\frac{1}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\hat{\sigma}_0(X_1, \cdots, X_n)} \\
&= \frac{\delta_0\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, 0\right) - \delta\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, 0\right)}{\hat{\sigma}_0\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, 0\right)}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

となり,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \cdots, \frac{X_{n-2} - \frac{t_{n-2}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\right)^t \\
&\quad \mapsto \left(\frac{X_1 - \frac{t_1}{t_n}X_n}{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}, \cdots, \frac{X_{n-2} - \frac{t_{n-2}}{t_n}X_n}{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}, \frac{X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n}{|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n|}\right)^t
\end{aligned}$$

は1対1対応だから, (3.23) は $\boldsymbol{Z}$ の関数となる. よって,

$$w(\boldsymbol{Z}) := \frac{\delta_0(\boldsymbol{X}) - \delta(\boldsymbol{X})}{\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})}$$

とおけば, (3.21),(3.22) が成り立つ. □

定理 3.10 $\delta_0(\boldsymbol{X})$ を任意の位置尺度共変推定量, $\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ を任意の強意尺度共変推定量とし, 損失関数が (3.19) であるとき, α の MRE 推定量は,

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = \delta_0(\boldsymbol{X}) - \frac{E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\delta_0(\boldsymbol{X})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}\right]}{E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\hat{\sigma}_0^2(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}\right]}\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) \tag{3.24}$$

である.

証明 定理 3.9 より, $\delta(\boldsymbol{X}) = \delta_0(\boldsymbol{X}) - w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ は位置尺度共変推定量になる. また, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{X})$ のリスクは α, σ と無関係であるから,

$$E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\{\delta(\boldsymbol{X})\}^2\right] = E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\{\delta_0(\boldsymbol{X}) - w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})\}^2\right]$$

を最小にする $w(\boldsymbol{Z})$ を求めればよい. そこで,

$$\begin{aligned}
&E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\{\delta(\boldsymbol{X})\}^2\right]\\
&= E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\{\delta_0(\boldsymbol{X}) - w(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})\}^2 \,\middle|\, \boldsymbol{Z}\right]\right]\\
&= E_{\alpha=0,\sigma=1}\Big[E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]\,(w(\boldsymbol{Z}))^2\\
&\qquad - 2E_{\alpha=0,\sigma=1}[\delta_0(\boldsymbol{X})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]w(\boldsymbol{Z}) + E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\delta_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]\Big]\\
&= E_{\alpha=0,\sigma=1}\Bigg[E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]\left\{w(\boldsymbol{Z}) - \frac{E_{\alpha=0,\sigma=1}[\delta_0(\boldsymbol{X})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}\right\}^2\\
&\qquad - \frac{(E_{\alpha=0,\sigma=1}[\delta_0(\boldsymbol{X})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}])^2}{E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]} + E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[(\delta_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}\right]\Bigg]
\end{aligned}$$

となるから,

$$w^*(\boldsymbol{Z}) := \frac{E_{\alpha=0,\sigma=1}[\delta_0(\boldsymbol{X})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}$$

のとき. $\delta(\boldsymbol{X})$ のリスクは最小になる. よって, α の MRE 推定量は.

$$\begin{aligned}
\delta^*(\boldsymbol{X}) &:= \delta_0(\boldsymbol{X}) - w^*(\boldsymbol{Z})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})\\
&= \delta_0(\boldsymbol{X}) - \frac{E_{\alpha=0,\sigma=1}[\delta_0(\boldsymbol{X})\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})|\boldsymbol{Z}]}{E_{\alpha=0,\sigma=1}[(\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}))^2|\boldsymbol{Z}]}\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})
\end{aligned}$$

となり, (3.24) が成り立つ. □

また, σ の損失関数が (3.20) であるとき, σ の MRE 推定量は定理 3.10 で与えられるものと一致する. 次の定理は, $\boldsymbol{Z}$ が補助統計量であることを示している.

定理 3.11 $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ の分布は α, σ に依存しない.

証明 定理 3.3 と同様にして, $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_{n-1})$ の j.p.d.f. が

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \frac{t_n}{\sigma^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{y_i - st_i}{\sigma}\right) \right\} f\left(-\frac{st_n}{\sigma}\right) ds$$

であることが分かる. ここで,

$$\begin{cases} Z_1 := \frac{Y_1}{Y_{n-1}} \\ \quad \vdots \\ Z_{n-2} := \frac{Y_{n-2}}{Y_{n-1}} \\ W := Y_{n-1} \end{cases}$$

と変数変換すると,

$$\begin{cases} Y_1 = Z_1 W \\ \quad \vdots \\ Y_{n-2} = Z_{n-2} W \\ Y_{n-1} = W \end{cases}$$

となり, ヤコビアン $J = \partial(y_1, \cdots, y_{n-1})/\partial(z_1, \cdots, z_{n-2}, w)$ について, $|J| = w^{n-2}$ なので, $(Z_1, \cdots, Z_{n-2}, W)$ の j.p.d.f. は

$$\begin{aligned} &f_{Z_1, \cdots, Z_{n-2}, W}(z_1, \cdots, z_{n-2}, w) \\ &= \frac{t_n}{\sigma^n} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} f\left(\frac{z_i w - st_i}{\sigma}\right) \right\} f\left(\frac{w - st_{n-1}}{\sigma}\right) f\left(-\frac{st_n}{\sigma}\right) ds \cdot w^{n-2} \end{aligned}$$

となる. よって, $(Z_1, \cdots, Z_{n-2})$ の m.p.d.f. は

$$\begin{aligned} &f_{Z_1, \cdots, Z_{n-2}}(z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ &= \frac{t_n}{\sigma^n} \int_{w=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} f\left(\frac{z_i w - st_i}{\sigma}\right) \right\} f\left(\frac{w - st_{n-1}}{\sigma}\right) f\left(-\frac{st_n}{\sigma}\right) \cdot w^{n-2} ds dw \end{aligned}$$

となる. ここで, $w' := w/\sigma$ と変数変換すると,

$$\begin{aligned} &f_{Z_1, \cdots, Z_{n-2}}(z_1, \cdots, z_{n-2}) \\ &= \frac{t_n}{\sigma} \int_{w'=-\infty}^{\infty} \int_{s=-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} f\left(z_i w' - \frac{s}{\sigma} t_i\right) \right\} f\left(w' - \frac{s}{\sigma} t_{n-1}\right) f\left(-\frac{s}{\sigma} t_n\right) \cdot w'^{n-2} ds dw' \end{aligned}$$

となり, さらに, $s' := s/\sigma$ と変数変換すると,

$$
\begin{aligned}
&f_{Z_1,\cdots,Z_{n-2}}(z_1,\cdots,z_{n-2}) \\
&= t_n \int_{w'=-\infty}^{\infty} \int_{s'=-\infty}^{\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n-2} f(z_i w' - s' t_i) \right\} f(w' - s' t_{n-1}) f(-s' t_n) \cdot w'^{n-2} ds' dw'
\end{aligned}
$$

となる. よって, $(Z_1,\cdots,Z_{n-2})$ の分布は α,σ に依存しない.

また, Z_{n-1} は $Y_{n-1} > 0, Y_{n-1} < 0$ のとき, それぞれ $1, -1$ をとり, Y_{n-1} の p.d.f. は

$$
f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) = \frac{t_n}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y_{n-1} - s t_{n-1}}{\sigma}\right) \cdot f\left(-\frac{s t_n}{\sigma}\right) ds
$$

となるから,

$$
\begin{aligned}
P\{Z_{n-1} = 1\} &= P\{Y_{n-1} > 0\} \\
&= \int_{y_{n-1}=0}^{\infty} \left\{ \frac{t_n}{\sigma^2} \int_{s=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y_{n-1} - s t_{n-1}}{\sigma}\right) \cdot f\left(-\frac{s t_n}{\sigma}\right) ds \right\} dy_{n-1}
\end{aligned}
$$

となる. ここで, $y'_{n-1} := y_{n-1}/\sigma$ と変数変換すると,

$$
P\{Z_{n-1} = 1\} = \int_{y'_{n-1}=0}^{\infty} \left\{ \frac{t_n}{\sigma} \int_{s=-\infty}^{\infty} f\left(y'_{n-1} - \frac{s}{\sigma} t_{n-1}\right) \cdot f\left(-\frac{s t_n}{\sigma}\right) ds \right\} dy'_{n-1}
$$

となり, さらに, $s' := s/\sigma$ と変数変換すれば,

$$
P\{Z_{n-1} = 1\} = t_n \int_{y'_{n-1}=0}^{\infty} \int_{s'=-\infty}^{\infty} f(y'_{n-1} - s' t_{n-1}) \cdot f(-s' t_n) ds' dy'_{n-1}
$$

となるので, Z_{n-1} の分布は α,σ に依存しない. 従って, $\boldsymbol{Z} = (Z_1,\cdots,Z_{n-1})$ の分布も α,σ に依存しない. □

4 信頼区間への応用

本節では, [OA04] に従って, 条件付推測に基づいた区間推定について論じる. 通常, 未知母数 θ をもつ母集団分布からの大きさ n の無作為標本 $\boldsymbol{X} = (X_1,\cdots,X_n)$ に基づく十分統計量 $S = S(\boldsymbol{X})$ が存在すれば, S に基づいて未知母数 θ の推測を行えばよいことはよく知られている ([LC98]). また, 十分統計量が存在しない場合には, 全標本 $\boldsymbol{X}$ が補助統計量 $A(\boldsymbol{X})$ と統計量 $T(\boldsymbol{X})$ の組に 1 対 1 対応すれば, 条件付分布 $P_{T|A}$ を考えることによって, 統計量 T の情報量損失を完全に回復できることが知られている ([F34]). そこで, 上記の考え方に基づいて, 第 3.1 節 (例 3.5), 第 3.3 節の状況で, 補助統計量を与えたときの条件付分布を用いて, 共変推定量に基づいた条件付信頼区間を構成する.

まず, 第 3.3 節の場合を考える. $\delta(\boldsymbol{X})$ を任意の位置尺度共変推定量とし, $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ を任意の強意の尺度共変推定量とする. このとき,

$$
v(\boldsymbol{X}) := \frac{\delta(\boldsymbol{X}) - \alpha}{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})}, \quad w(\boldsymbol{X}) := \frac{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})}{\sigma}
$$

とおくと,

$$v(\boldsymbol{X}) = \frac{(\delta(\boldsymbol{X}) - \alpha)/\sigma}{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})/\sigma} = \delta\left(\frac{\boldsymbol{X} - \alpha\boldsymbol{t}}{\sigma}\right) \Big/ \hat{\sigma}\left(\frac{\boldsymbol{X} - \alpha\boldsymbol{t}}{\sigma}\right)$$
$$w(\boldsymbol{X}) = \hat{\sigma}\left(\frac{\boldsymbol{X} - \alpha\boldsymbol{t}}{\sigma}\right)$$

となり, $(\boldsymbol{X} - \alpha\boldsymbol{t})/\sigma$ の分布は α, σ に依存しないので, $v(\boldsymbol{X}), w(\boldsymbol{X})$ は枢軸量になる. そこで, $\delta(\boldsymbol{X}), \hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ として MRE 推定量をとり, α, σ の条件付信頼区間を構成することを考える.

まず, 位置尺度共変推定量, 強意の尺度共変推定量として, それぞれ

$$\delta_0(\boldsymbol{X}) := \frac{X_n}{t_n} =: U, \quad \hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X}) := \left|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n\right| =: S$$

をとる. ここで, $\hat{\sigma}_0(\boldsymbol{X})$ は (3.12) を満たすことに注意. このとき, (3.24),(3.17) より, α, σ の MRE 推定量はそれぞれ

$$\delta^*(\boldsymbol{X}) = U - w_1^*(\boldsymbol{Z})S, \quad \hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X}) = w_2^*(\boldsymbol{Z})S$$

となる. ただし,

$$w_1^*(\boldsymbol{Z}) := E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\frac{X_n}{t_n}\left|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n\right|\middle|\boldsymbol{Z}\right] \Big/ E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\left|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n\right|^2\middle|\boldsymbol{Z}\right]$$
$$w_2^*(\boldsymbol{Z}) := E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\left|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n\right|\middle|\boldsymbol{Z}\right] \Big/ E_{\alpha=0,\sigma=1}\left[\left|X_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}X_n\right|^2\middle|\boldsymbol{Z}\right]$$

とする. これらの MRE 推定量を用いて, 枢軸量として

$$v^*(\boldsymbol{X}) := \frac{\delta^*(\boldsymbol{X}) - \alpha}{\hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X})}, \quad w^*(\boldsymbol{X}) := \frac{\hat{\sigma}^*(\boldsymbol{X})}{\sigma}$$

をとる. また, 補助統計量として $\boldsymbol{Z} := (Z_1, \cdots, Z_{n-1})$ を用いる.

いま, $\boldsymbol{X}$ の j.p.d.f. は (3.18) であるから, $(x_1, \cdots, x_n)^t \mapsto (u, s, z_1, \cdots, z_{n-2})^t$ と変数変換すると,

$$\begin{cases} x_1 = z_1 s + t_1 u \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} = z_{n-1}s + t_{n-1}u \\ x_n = t_n u \end{cases}$$

となる. ここで, ヤコビアン $J = \partial(x_1, \cdots, x_n)/\partial(u, s, z_1, \cdots, z_{n-2})$ について, $|J| = t_n s^{n-2}$ となるから, $(U, S, \boldsymbol{Z})$ の j.p.d.f. は

$$f_{U,S,\boldsymbol{Z}}(u, s, \boldsymbol{z}) = \frac{t_n}{\sigma^n}s^{n-2}\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{z_i s + (u - \alpha)t_i}{\sigma}\right)$$

となる. ただし, 便宜上, $z_n := 0$ とする. さらに, $(u, s, z_1, \cdots, z_{n-2})^t \mapsto (v^*, w^*, z_1, \cdots, z_{n-2})^t$ と変数変換すると,

$$\begin{cases} u = \sigma v^* w^* + \frac{\sigma w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} w^* + \alpha \\ s = \frac{\sigma}{w_2^*(\boldsymbol{z})} w^* \end{cases}$$

となり, ヤコビアン $J = \partial(u, s, z_1, \cdots, z_{n-2})/\partial(v^*, w^*, z_1, \cdots, z_{n-2})$ について, $|J| = (\sigma^2 w^*)/w_2^*(\boldsymbol{z})$ となるから, $(V^*, W^*, \boldsymbol{Z})$ の j.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{V^*, W^*, \boldsymbol{Z}}(v^*, w^*, \boldsymbol{Z}) \\ & = t_n \left(\frac{1}{w_2^*(\boldsymbol{z})} \right)^{n-1} \cdot (w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right) \end{aligned}$$

となる. よって, $\boldsymbol{Z}$ を与えたときの (V^*, W^*) の c.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{V^*, W^* | \boldsymbol{Z}}(v^*, w^* | \boldsymbol{z}) \\ & = \frac{(w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right)}{\int_{v^*=-\infty}^{\infty} \int_{w^*=0}^{\infty} (w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right) dv^* dw^*} \end{aligned}$$

となる. 従って, $\boldsymbol{Z}$ を与えたときの V^* の c.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{V^* | \boldsymbol{Z}}(v^* | \boldsymbol{z}) \\ & = \frac{\int_{w^*=0}^{\infty} (w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right) dw^*}{\int_{v^*=-\infty}^{\infty} \int_{w^*=0}^{\infty} (w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right) dv^* dw^*} \end{aligned} \tag{4.1}$$

になり, $\boldsymbol{Z}$ を与えたときの W^* の c.p.d.f. は

$$\begin{aligned} & f_{W^* | \boldsymbol{Z}}(w^* | \boldsymbol{z}) \\ & = \frac{\int_{v^*=-\infty}^{\infty} (w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right) dv^*}{\int_{v^*=-\infty}^{\infty} \int_{w^*=0}^{\infty} (w^*)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} f \left(\left(\frac{z_i + t_i w_1^*(\boldsymbol{z})}{w_2^*(\boldsymbol{z})} + t_i v^* \right) w^* \right) dv^* dw^*} \end{aligned} \tag{4.2}$$

になる. よって, (4.1) より, 任意の $0 < \gamma < 1$ について,

$$P_{V^* | \boldsymbol{Z}}\{v_1 \le V^* \le v_2\} = 1 - \gamma$$

となる v_1, v_2 を定めれば,

$$P_{V^* | \boldsymbol{Z}}\{\delta^* - v_2 \hat{\sigma}^* \le \alpha \le \delta^* - v_1 \hat{\sigma}^*\} = 1 - \gamma$$

となるから, 信頼係数 $1 - \gamma$ の α の条件付信頼区間 $[\delta^* - v_2 \hat{\sigma}^*, \delta^* - v_1 \hat{\sigma}^*]$ が得られる. また, (4.2) より, 任意の $0 < \gamma < 1$ について,

$$P_{W^* | \boldsymbol{Z}}\{w_1 \le W^* \le w_2\} = 1 - \gamma$$

となる w_1, w_2 を定めれば,

$$P_{W^*|Z}\left\{\frac{\hat{\sigma}^*}{w_2} \leq \sigma \leq \frac{\hat{\sigma}^*}{w_1}\right\} = 1-\gamma$$

となるから,信頼係数 $1-\gamma$ の σ の条件付信頼区間 $[\hat{\sigma}^*/w_2, \hat{\sigma}^*/w_1]$ が得られる.

次に, 例 3.5 の場合, すなわち, α が未知, $\sigma = 1$ で, 確率変数 $U_1, \cdots, U_n$ がたがいに独立にいずれも標準正規分布 $N(0,1)$ に従う場合を考える. このとき, 例 3.5 より, α の MRE 推定量 $\hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X})$ は (3.8) で与えられる. そこで, 補助統計量として定理 3.3 で与えられる $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \cdots, Y_{n-1})$ を用いて, $\hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X})$ に基づく α の条件付信頼区間を求めることを考える.
いま, $v^*(\boldsymbol{X}) := \hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) - \alpha$ とおくと,

$$v^*(\boldsymbol{X}) = \hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) - \alpha = \hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X} - \alpha \boldsymbol{t})$$

となり, $\boldsymbol{X} - \alpha\boldsymbol{t}$ の分布は α に依存しないので, $v^*(\boldsymbol{X})$ は枢軸量になる. また, $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ の j.p.d.f. は

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu - \alpha t_i)^2\right\}$$

となる. ここで, $(x_1, \cdots, x_n)^t \mapsto (y_1, \cdots, y_{n-1}, v^*)^t$ と変数変換すると,

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{t_1}{t_n}x_n \\ \quad \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - \frac{t_{n-1}}{t_n}x_n \\ v^* = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - \mu) - \alpha \end{cases}$$

となり, 上から $(n-1)$ 個の式は,

$$\begin{cases} t_1 y_1 = t_1 x_1 - \frac{t_1^2}{t_n}x_n \\ \quad \vdots \\ t_{n-1}y_{n-1} = t_{n-1}x_{n-1} - \frac{t_{n-1}^2}{t_n}x_n \end{cases}$$

となるから, $T := \sum_{i=1}^n t_i^2$ とおけば,

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i - \frac{x_n}{t_n}\sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i - \frac{x_n}{t_n}(T - t_n^2)$$

となる. この辺々を T で割ると,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i - \frac{x_n}{t_n}\left(1 - \frac{t_n^2}{T}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} c_i x_i + c_n x_n - \frac{x_n}{t_n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - \mu) - \alpha\right) + \mu \sum_{i=1}^{n} c_i + \alpha - \frac{x_n}{t_n} \\
&= v^* + \mu \sum_{i=1}^{n} c_i + \alpha - \frac{x_n}{t_n}
\end{aligned}
$$

となるから,

$$
\frac{x_n}{t_n} = v^* - \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} t_i + \alpha
$$

を得る. ただし, $c_i := t_i/T \ (i = 1, \cdots, n)$ とする. 従って,

$$
\begin{cases}
x_1 = y_1 + t_1\left(v^* - \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} t_i + \alpha\right) =: g_1(\boldsymbol{y}, v^*) + t_1 \alpha \\
\quad \vdots \\
x_{n-1} = y_{n-1} + t_{n-1}\left(v^* - \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} t_i + \alpha\right) =: g_{n-1}(\boldsymbol{y}, v^*) + t_{n-1} \alpha \\
x_n = t_n\left(v^* - \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i + \mu \sum_{i=1}^{n} t_i + \alpha\right) =: g_n(\boldsymbol{y}, v^*) + t_n \alpha
\end{cases}
$$

となる. ここで, ヤコビアン $J = \partial(x_1, \cdots, x_n)/\partial(y_1, \cdots, y_{n-1}, v^*)$ について, $C(\boldsymbol{t}) := |J|$ とすれば, $(\boldsymbol{Y}, V^*)$ の j.p.d.f. は

$$
f_{\boldsymbol{Y}, V^*}(\boldsymbol{y}, v^*) = \frac{C(\boldsymbol{t})}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g_i(\boldsymbol{y}, v^*) - \mu\right)^2\right\}
$$

となり, $\boldsymbol{Y}$ が与えられたときの V^* の c.p.d.f. は

$$
f_{V^*|\boldsymbol{Y}}(v^*|\boldsymbol{y}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g_i(\boldsymbol{y}, v^*) - \mu\right)^2\right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g_i(\boldsymbol{y}, v^*) - \mu\right)^2\right\} dv^*} \tag{4.3}
$$

となる. よって, (4.3) に基づいて, 任意の $0 < \gamma < 1$ に対して,

$$
1 - \gamma = P_{V^*|\boldsymbol{Y}}\{v_1 \le V^* \le v_2\}
$$

を満たすような v_1, v_2 を定めれば,

$$
[\hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) - v_2, \hat{\alpha}^*(\boldsymbol{X}) - v_1]
$$

が信頼係数 $1 - \gamma$ の α の条件付信頼区間になる.

実際に, $\mu = 0, t_i = i \ (i = 1, \cdots, n)$ とし, いくつかの α の値に対してシミュレーションを行って得られた条件付信頼区間が表 4.1〜表 4.6 である. いずれの場合も, α の真値が区間に含まれ, また, 得られた条件付信頼区間の幅が非常に小さいことが分かる. さらに, 標本の大きさ n がそれほど大きくなくとも, この推測方式は有用な結果を与えることが分かる. 以上のことから, 上記の条件付信頼区間による推測方式は妥当なものであるといえる.

表 4.1 $\alpha = \pm 0.05$ の場合の信頼係数 $1-\gamma$ の α の条件付信頼区間.

n	$1-\gamma$	$\alpha = -0.05$	$\alpha = 0.05$
10	0.99	[-0.2444, 0.0181]	[-0.0168, 0.2457]
	0.95	[-0.1109, 0.0888]	[-0.0366, 0.1631]
	0.90	[-0.1519, 0.0156]	[-0.0334, 0.1341]
30	0.99	[-0.0713, -0.0184]	[0.0249, 0.0779]
	0.95	[-0.0764, -0.0361]	[0.0165, 0.0568]
	0.90	[-0.0515, -0.0176]	[0.0291, 0.0630]
50	0.99	[-0.0605, -0.0494]	[0.0364, 0.0521]
	0.95	[-0.0701, -0.0512]	[0.0402, 0.0591]
	0.90	[-0.0562, -0.0416]	[0.0202, 0.1072]

表 4.2 $\alpha = \pm 0.5$ の場合の信頼係数 $1-\gamma$ の α の条件付信頼区間.

n	$1-\gamma$	$\alpha = -0.5$	$\alpha = 0.5$
10	0.99	[-0.6445, -0.3820]	[0.3728, 0.6353]
	0.95	[-0.6158, -0.4160]	[0.4471, 0.6469]
	0.90	[-0.5523, -0.3846]	[0.4205, 0.5881]
30	0.99	[-0.5118, -0.4588]	[0.4752, 0.5282]
	0.95	[-0.5196, -0.4792]	[0.4799, 0.5202]
	0.90	[-0.5249, -0.4911]	[0.4861, 0.5129]
50	0.99	[-0.5358, -0.4787]	[0.4923, 0.5129]
	0.95	[-0.5124, -0.4934]	[0.4886, 0.5096]
	0.90	[-0.0578, -0.4919]	[0.4868, 0.5027]

表 4.3 $\alpha = \pm 1$ の場合の信頼係数 $1-\gamma$ の α の条件付信頼区間.

n	$1-\gamma$	$\alpha = -1$	$\alpha = 1$
10	0.99	[-1.1346, -0.8720]	[0.8397, 1.1022]
	0.95	[-1.0098, -0.8100]	[0.8657, 1.0655]
	0.90	[-1.0973, -0.9296]	[0.9102, 1.0778]
30	0.99	[-1.0346, -0.9817]	[0.9925, 1.0327]
	0.95	[-1.1014, -0.9740]	[0.9666, 1.0070]
	0.90	[-1.0032, -0.9693]	[0.9832, 1.0170]
50	0.99	[-1.0134, -0.9885]	[0.9878, 1.1012]
	0.95	[-1.0056, -0.9922]	[0.9933, 1.0122]
	0.90	[-1.0012, -0.9907]	[0.9970, 1.0129]

表 4.4 $\alpha = \pm 5$ の場合の信頼係数 $1-\gamma$ の α の条件付信頼区間.

n	$1-\gamma$	$\alpha = -5$	$\alpha = 5$
10	0.99	[-5.1004, -4.8378]	[4.8917, 5.1543]
	0.95	[-5.1826, -4.9828]	[4.8803, 5.0801]
	0.90	[-5.1144, -4.9467]	[4.8677, 5.0354]
30	0.99	[-5.0224, -4.9694]	[4.9648, 5.0178]
	0.95	[-5.1016, -4.9766]	[4.9835, 5.0238]
	0.90	[-5.0101, -4.9763]	[4.9736, 5.0074]
50	0.99	[-5.0035, -4.9884]	[4.9990, 5.0082]
	0.95	[-5.0030, -4.9840]	[4.9831, 5.0020]
	0.90	[-5.0097, -4.9938]	[4.9944, 5.0078]

表 4.5 $\alpha = \pm 10$ の場合の信頼係数 $1-\gamma$ の α の条件付信頼区間.

n	$1-\gamma$	$\alpha = -10$	$\alpha = 10$
10	0.99	[-10.0788, -9.8162]	[9.8614, 10.1240]
	0.95	[-10.1082, -9.9083]	[9.9037, 10.1035]
	0.90	[-10.0548, -9.8870]	[9.9653, 10.1330]
30	0.99	[-10.0394, -9.9864]	[9.9601, 10.0131]
	0.95	[-10.0015, -9.9612]	[9.9814, 10.0218]
	0.90	[-10.0115, -9.9776]	[9.9840, 10.0179]
50	0.99	[-10.0052, -9.9803]	[9.9923, 10.0172]
	0.95	[-10.0079, -9.9890]	[9.9972, 10.0069]
	0.90	[-10.0102, -9.9943]	[9.9979, 10.0020]

表 4.6 $\alpha = \pm 50$ の場合の信頼係数 $1-\gamma$ の α の条件付信頼区間.

n	$1-\gamma$	$\alpha=-50$	$\alpha=50$
10	0.99	[-50.1506, -49.8881]	[49.7897, 50.0523]
	0.95	[-50.0846, -49.8848]	[49.9590, 50.1588]
	0.90	[-50.0959, -49.9282]	[49.9833, 50.1509]
30	0.99	[-50.0300, -49.9770]	[49.9766, 50.0296]
	0.95	[-50.0246, -49.9843]	[49.9624, 50.0027]
	0.90	[-50.0088, -49.9750]	[49.9962, 50.0300]
50	0.99	[-50.0115, -49.9866]	[49.9922, 50.0171]
	0.95	[-50.0144, -49.9955]	[49.9967, 50.0047]
	0.90	[-50.0109, -49.9950]	[49.9929, 50.0076]

5 おわりに

本論においては,時間を伴うある線形回帰モデルにおける共変推定量を定義し, 2 乗損失の下での最小リスク共変推定量の構成について考察した. 第 3.1 節では, α が未知, σ が既知の場合に, MRE 推定量は通常の位置母数分布族の場合 ([A03],[LC98]) のピットマン推定量と類似の形で与えられることを述べ,実際に正規分布,一様分布の例を挙げ,具体的に MRE 推定量を求めた. また, 第 3.2 節, 第 3.3 節では, それぞれ α が既知, σ が未知の場合, α, σ がともに未知の場合の MRE 推定量の構成について論じた.

第 4 節では,補助統計量を与えたときの条件付分布を用いて,共変推定量に基づいた条件付信頼区間の構成について論じた. 特に,第 3.1 節の正規分布の場合にシミュレーションを行い,条件付分布に基づく推測方式が妥当であることを数値的に確かめた.

本論では, 正規分布, 一様分布の場合を扱ったが,他の分布の場合も MRE 推定量を求めることができるであろう. また,本論で設定した位置及び尺度共変性に関する構造はもっと一般に群の構造に拡張でき, 群論を用いた議論も可能であろう. 本論で, 条件付信頼区間について論じたが,補助統計量を与えたときの条件付検定にも応用できると考えられる. この場合, [R95], [Th90], [Th93] で述べられている補助統計量を与えたときの条件付分布の近似に基づいて,条件付検定を考えることができるかもしれない.

参考文献

[A03] 赤平 昌文 (2003). 統計解析入門. 森北出版.

[F34] Fisher, R. A. (1934). Two new properties of mathematical likelihood. *Proc. Roy. Soc.* A, **144**, 285-307.

[LC98] Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation* (2nd ed.). Springer, New York.

[OA04] 小方 浩明, 赤平 昌文 (2004). 統計的条件付推測における仮説検定と区間推定. 京都大学 数理解析研究所講究録 **1380**, 80-93.

[R95] Reid, N. (1995). The roles of conditioning in inference. *Statistical Science.* **10**(2), 138-199.

[Ta03] Takeuchi, K. (2003). Some theorems in invariant estimators of location. To appear.

[Th90] Thomas, A. S. (1990). Conditional properties of likelihood-based significance tests. *Biometrika.* **77**, 2, 343-352.

[Th93] Thomas, A. S. (1993). Local ancillarity in the presence of a nuisance parameter. *Biometrika.* **80**, 2, 305-320.