

# 共形場理論と作用素環, 頂点作用素代数

河東泰之 (Yasuyuki Kawahigashi)  
東京大学大学院数理科学研究科

## 1 前置き

カイラルな共形場理論を作用素環を用いて数学的に研究する方法について述べる. 同じ対象を別の方法で研究するものとして, 頂点作用素代数があり, それとの対比をしばしば行う. なおこの原稿は, 日本数学会 2005 年企画特別講演の予稿 [24], 作用素論・作用素環論研究会の報告集 [25] が元になっていることを最初にお断りしておく.

場の量子論の数学的構造を研究しようという試みは古くからたくさんある. ここでは作用素環論に基づく方法を説明するのだが, その考え方の元になるのは Wightman field である. 数学的には Wightman field とは時空上の作用素値超関数であって, 適当な条件を満たすものである. (詳しくはたとえば [41] を見よ.) 普通の超関数は試験関数に対して複素数の値を返すが, 作用素値超関数は試験関数に対して (非有界) 線形作用素を値として返す. そこで, しかるべき, 作用素値超関数の族があったとしよう. その中から一つの元  $\Phi$  を取る. さらに時空領域  $O$  を固定して, そこに台が含まれるような試験関数  $\varphi$  を取る. こうして,  $\langle \Phi, \varphi \rangle$  を考える. このようにして得られる作用素たちの生成する, 有界線形作用素たちのなす作用素環を  $\mathcal{A}(O)$  とおく. 考える作用素環は von Neumann 環と呼ばれるタイプのものである. (たとえば最初から自己共役作用素たちだけを考え,  $\exp(it)$  の肩に乗せれば有界線形作用素たちが得られる.) これによって, 共通の Hilbert 空間に作用する, 時空領域でパラメトライズされた作用素環の族  $\{\mathcal{A}(O)\}$  ができる. そこで, Wightman field のことは忘れて, 作用素環の族  $\{\mathcal{A}(O)\}$  の満たすと期待される条件を公理として要請し, その公理系からの帰結を数学的に研究して行こうというのが代数的場の量子論 (Algebraic Quantum Field Theory) と呼ばれる考え方である. これには, Araki, Haag, Kastler らによる長い研究の歴史があり, 基本的なテキストは [19] である. ここで対象にしている作用素環の族  $\{\mathcal{A}(O)\}$  は, 時空領域の包含関係について有向族をなしているようなものを考えるので, 「作用素環のネット」という用語が普通使われている. 時空領域の対称性も考慮に入れる必要があるが, それは時空の対称性を表す群の, 今考えている Hilbert 空間への射影的ユニタリ表現によって数学的に表される. この考え方では, どのような空間でも, どのような時空対称性でも, 統一的に考えることができる. 伝統的には 4 次元 Minkowski 空間の場合がもっとも長い間研究されてきたが, 一般の多様体, さらに「非可換時空」上で考えようという試みもある.

## 2 代数的共形場理論

近年盛んに考えられている共形場理論は, 2 次元 Minkowski 空間, あるいはそこから派生した 1 次元円周の上で, 共形対称性という高い時空の対称性を要請すると, 数学的にも

物理的にもたいへん興味深いというものである。(物理的側面も含めた、共形場理論一般の大部なテキストとして [9] をあげておく。) これを代数的場の量子論の立場から考えてみよう。

まず 2次元 Minkowski 空間を考える。ここで「時空の対称性」として共形変換、すなわち各点ごとに異なるスケールで拡大・縮小するような変換も許して考える。空間変数を  $x$ 、時間変数を  $t$  としたときに、新たな変数  $t+x, t-x$  を考えれば、この新しい変数について研究の対象となる代数系を二つに分解することができる。このようにして得られる片方の理論をカイラルな共形場理論と呼ぶ。新しい一つの変数  $t \pm x$  は 1次元空間を動くが、これに無限遠点を加えて compact 化した 1次元円周  $S^1$  が、カイラルな共形場理論の「時空」にあたる空間である。無限遠点を動かすような変換、たとえば  $S^1$  上の回転も変換の中に入れておきたいのでこのような compact 化が行われる。また、 $t \pm x$  が変数なので、時間変数と空間変数は混ざっているが、+ この  $S^1$  を「時空」にあたるものとして考察を進めればよい。すなわち、 $S^1$  を出発点の「時空」に取り、この上の作用素値超関数の族を考え、また空間の対称性を表す群としては、 $S^1$  の上の向きを保つ微分同相写像全体  $\text{Diff}(S^1)$  を考えるということである。この立場から、作用素環のネットを公理化することを考えよう。

$S^1$  の、連結開集合であって、空でもなく、稠密でもないものを区間と呼ぶ。(  $S^1$  全体やそこから 1 点を除いたものは区間ではないことに注意する。) 区間  $I$  を上の「時空領域」と考え、区間  $I$  たちでパラメトライズされた作用素環  $\mathcal{A}(I)$  の族ができる。これを公理化したものが、 $S^1$  上の作用素環の局所共形ネットであり、ここではこのタイプの作用素環のネットしか考えないので、これを単に作用素環のネットと呼ぼう。(今、上の意味での区間たちは包含関係について有向族ではないので、ネットという名前は本来不適切だがよく使われている。) 正確な公理は [26] にゆずるが、たとえば  $I \subset J$  であれば、 $\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{A}(J)$  が自然に要請される。また、もともとの 2次元 Minkowski 空間上で空間的に離れた領域間では、光速でも片方から他方に到達できないので、何の相互作用もなく、対応する時空領域上の作用素環の元たちは互いに交換する、というのが局所性の考え方である。この局所性の公理は今の設定では、 $I$  と  $J$  が交わらない時、 $\mathcal{A}(I)$  の元と  $\mathcal{A}(J)$  の元は可換である、という形を取る。また、 $\text{Diff}(S^1)$  についてはこの群が今考えている Hilbert 空間上に射影的ユニタリ表現  $u$  を持ち、 $u_g \mathcal{A}(I) u_g^* = \mathcal{A}(gI)$  を満たす、ということが公理となる。これを共変性の公理と呼ぶ。ここで  $gI$  は、区間  $I$  の、微分同相写像  $g$  による像である。このときこの Hilbert 空間は、 $\text{Diff}(S^1)$  に「対応」する無限次元 Lie 環である Virasoro algebra の表現空間となり、これによって central charge  $c$  と呼ばれる正の実数値を取る不変量が定義される。

### 3 頂点作用素代数

一方、 $S^1$  上の作用素値超関数たちを直接に、代数的に公理化した代数系が、頂点作用素代数というものである。これは代数系であるから、演算と公理があるのだが、その公理系を初めて見ても何のことだか絶対にわからないであろう。そこでまず、意味の方から説明する。考えているものは円周  $S^1$  上の作用素値超関数たちなので、それを作用素値超関数は複素平面の単位円の上を動く変数を  $z$  と書いて  $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$  と Fourier 級数展開する。(とりあえず収束の問題は気にしない。) 係数  $a_n$  は (非有界) 作用素である。ここで  $z^{-n-1}$  の係数を  $a_n$  としていることにはもちろん理由があるが、単なる取り決めだと思ってもよい。今考えている Hilbert 空間には真空ベクトルと呼ばれる特別なベクトル  $\Omega$

がある。物理的に期待される状況では、 $a(z)$  に  $a_{-1}\Omega$  を対応させる写像が、量子場の集合から、Hilbert 空間の稠密部分空間  $V$  への全単射になっているので、抽象的な立場ではこれを公理として要請する。この全単射を通じて、作用素値超関数とベクトルを同一視する。これは GNS 構成で作用素とベクトルを同一視するようなものだが、今は作用素ではなく、作用素値超関数の族を考えていることに注意する。これによって、 $a, b \in V$  に対し、 $a$  の方は上のように作用素値超関数として Fourier 級数展開して係数  $a_n$  を作り、それをベクトルと思った  $b$  にほどこして得られるベクトル  $a_nb$  を考える。形式的にはこれは、 $n \in \mathbb{Z}$  ごとに、積演算  $(a, b) \mapsto a_nb$  があると思える。この状況を代数的に公理化したものが頂点作用素代数であり、あるベクトル空間  $V$  に、 $n \in \mathbb{Z}$  でパラメトライズされた可算個の積演算、 $(a, b) \mapsto a_nb$  があって、これらの演算がある公理を満たす、というものである。ただし、この「ある公理」たちが、交換法則とか結合法則などのように見えずぐ意味がわかるものではまったくないということが問題である。

さらにこの  $V$  には自然な grading  $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$  が入っていて、 $(V_k)_n(V_l) \subset V_{k+l-n-1}$  ということも公理として要請される。ここで  $k+l-n-1 < 0$  のときは積の値が 0 と解釈される。(0 とはベクトル空間としての 0 ベクトルである。) 公理全体の正確な形についてはたとえば、元祖 [17] を見よ。

以上のように、同じ物理的対象である、 $S^1$  上の共形場理論を数学的に公理化した代数系として、作用素環のネットと頂点作用素代数があるわけである。これらは本来同じ対象を公理化したものなので 1 対 1 対応があることが期待される。すなわち、片方の公理を満たす対象があればもう片方の公理を満たすものが canonical に作れるということがあって欲しいが、どちらの方向にも大きな技術的困難があり、. このようなタイプの定理は知られていない。(頂点作用素代数では、そもそも state の空間に正定値内積が入らないような、non-unitary case も考えており、このような場合が作用素環に対応しないことはもちろんである。この種の対応を考える際には unitary な場合に限定する必要がある。) 非常におおざっぱなレベルでは、頂点作用素代数と作用素環のネットとの関係は、Lie 環と Lie 群の関係のようなものではないかと思われるのだが、これから解明すべき点が多い。

そこで今のところ行われているのは、個別の例の構成、さまざまな性質の研究などのレベルで、二つの理論の間の対応を探ることであり、このレベルでは多くの成功例がある。そもそも、最初に問題になるのは公理系を満たすような例をどうやって作るかであるが、群の公理や環の公理の場合などと比べてはるかに難しい。頂点作用素代数の方では具体例を一から作る方法として、

- Even lattice
- Affine Kac-Moody 代数/Virasoro 代数

から作るものがあり、すでにある例を使って新しい例を作る方法として、

- テンソル積
- Simple current extension
- Orbifold construction
- Coset construction

がある。これらについては、頂点作用素代数の方が先行しており、作用素環の側で対応するものが後から作られた。

Even lattice とは, 有限 rank の自由 Abel 群  $L$  で, 有理数に値を持つ対称  $\mathbb{Z}$ -線形形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{Q}$$

を持ち, さらに任意の  $\alpha \in L$  に対し  $\langle \alpha, \alpha \rangle \in 2\mathbb{Z}$  となるものことである. Staszkiwicz がこれから作用素環のネットが作れるという博士論文を書いたが, unpublished なままで詳しい性質はよく調べられていなかった. これについては, 最近の Dong-Xu [12] の論文で満足すべき結果が得られた. 特別なタイプの lattice については, [29] による構成がある. また, Kac-Moody/Virasoro algebra からの作用素環のネットの構成は, A. Wassermann [42] とその学生たちによって行われた. さらに, Buchholz-Mack-Todorov [5] による先行する構成も重要である.

後の方の4つの構成のうち, 後の3つは作用素環の言葉で言えばそれぞれ, (有限アーベル群による)接合積, (有限群による)不動点環, 相对可換子環のことである. テンソル積と, simple current extension は簡単な構成である. Simple current extension は実質的には Doplicher-Haag-Roberts の頃から考えられている. Orbifold/coset construction については, Xu [44, 45] で研究された. 作用素環のネットは, 作用素環の族であり, 真空ベクトルを持つ Hilbert 空間に作用していないといけなないので, 接合積を取る操作と不動点環を取る操作は対称ではないことに注意する. 伝統的な呼び方で言えば, 前者に使える自己同型は, Doplicher-Haag-Roberts 自己同型, 後者に使える自己同型はゲージ群の元である. (なお, 作用素環の方の subfactor 理論でも類似の構成が考えられており, 私も昔 orbifold subfactor というのをやっていた. Subfactor 理論では, 接合積を考えることも不動点環を考えることもほぼ対称であり, 接合積の方に orbifold という名前を使うことがよくあったが, 作用素環のネットの場合は, orbifold と呼ばれるのは, 不動点環の方である.)

このほかに, 作用素環のネットの方では, Longo の  $Q$ -system による拡張という構成が, [26] で始められ, [46] でさらに応用された. この方法を頂点作用素代数の方に翻訳するのは簡単である. (たとえば [33] における一般論を見よ.) 一般に共形場理論において, すべての例は, 上の列挙した6つの方法の組み合わせによって得られるという予想があるが,  $Q$ -system による構成は, この予想が正しくないことを示している.

このほかに, 頂点作用素代数の一般論における大きな成果としては, Zhu [47] による character の modular invariance の証明, Huang [21] による Verlinde 予想の証明がある. いずれにおいても Zhu [47] の  $C_2$ -finiteness 条件が大きな役割を果たしているが, 対応する成果は作用素環においては知られていない. しかし,  $C_2$ -finiteness 条件については下で述べる, [30] の complete rationality が対応する条件ではないかと考えられるので, これに基づく更なる研究が待たれるところである.

## 4 作用素環のネットの表現論

作用素環のネットの構造を調べる強力な手段として, 表現論を考えることが重要である. 対応する表現論は頂点作用素代数にもあるが, 表現論こそ, 作用素環的アプローチが強みを発揮する側面である.

作用素環のネットでは, 考えている作用素環たちはもともと共通の Hilbert 空間に作用しているのだが, 単に環の族だと思えば別の (Hilbert) 空間への作用を考えることはもちろんできる. (ただし, この新しい Hilbert 空間の方にはもはや, 真空ベクトルにあたるものはない.) このような表現論については古くから Doplicher-Haag-Roberts の有名な理論

[13] が成立しており、それを今の  $S^1$  上のネットの話に書き換えることも、Fredenhagen-Rehren-Schroer [16] によって行われている。Doplicher-Haag-Roberts 理論のポイントは、環の族の表現を考える代わりに、一つの大きな環のしかるべき自己準同型を考えればよい、というものである。この「大きな環」は気分としては、今考えている族の作用素環たちによって生成される環なのだが、正確な定義にはもっと注意が必要である。この見方の利点は、自己準同型は容易に合成できる、ということである。この演算が「表現のテンソル積」に当たるものを与えるのである。ここで、群や Hopf 代数の表現のテンソル積は容易に定義できるが、環や環の族のテンソル積は直ちには定義できないことに注意しよう。このように自己準同型を経由することによって、表現のテンソル積がうまく定義され、期待される性質が満たされるのである。これによって、表現たちのなす圏がテンソル圏になり、さらに、今考えている  $S^1$  上のネットの場合は、braided なテンソル圏になるのである。また、Jones の subfactor 理論によって、表現の「次元」が定義できる。これは、代数的場の量子論では伝統的に「統計次元」と呼ばれていたもので、量子群論における「量子次元」とも同様のものである。これは自己準同型の値域の Jones 指数の平方根として定義される。この値は、1 以上の実数値か、無限大を取る。

Jones の subfactor 理論 [23] では、[15] に解説したように二つの作用素環  $N \subset M$  の組の表現論を考えることが重要であった。ここでは、作用素環の族の表現論を考えるのである。二個の作用素環の表現論と、作用素環の連続濃度の族の表現論ではだいぶ話が違いうのだが、実は驚くほど多くの共通点がある。このことは、Longo [34] に始まり、そもそもこれが、もともと subfactor 理論を研究していた私が現在作用素環のネットを研究している理由である。 $S^1$  上の作用素環のネットは、subfactor  $N \subset M$  の「連続版」のようなもので、前者の後者に対する関係は、1 径数自己同型群の自己同型に対する関係のようなものである。

作用素環のネットにおいても、量子群や頂点作用素代数の表現論と同様、既約な表現・モジュール (の同値類) が有限個しかない時が興味深い。このような作用素環のネットや、頂点作用素代数は有理的であると言う。このとき表現論は有限群のようなものになっているわけである。このような有限個の既約な対象を持つ圏は、1 のべき根における量子群やそこから生じる 3 次元トポロジーの量子不変量においても重要である。(作用素環の立場からの、量子不変量の扱いについては [15], [32] やそこでの引用文献を見ていただきたい。)

[30] において我々は、完全有理性と呼ばれる、有理性より強い条件を導入し、その特徴づけを与えた。その後 [38] によって、かなり弱い一般的な仮定の下では、この条件は有理性と同値であることが証明された。さらにこの弱い条件も、実は自動的に成り立っているのではないかという予想もある。完全有理性は、テンソル積、simple current extension, orbifold construction, (cofinite 条件を満たす) coset construction などの操作で保たれることが容易にわかるので、作用素環のネットの有理性の判定がかなり容易にできるわけである。また完全有理性がなりたつときは、表現のなす圏が、modular であることも [30] で証明されている。頂点作用素代数については有理性が、orbifold construction で保たれるかどうかは有名な未解決問題である。

次に誘導表現の理論に移ろう。群と部分群があるときに、小さい方の群の表現から、大きい方の群の表現を作るのが誘導表現である。これと同様に、作用素環のネット  $A(I)$  が、別の作用素環のネット  $B(I)$  に対して、 $A(I) \subset B(I)$  のようになっているときに、前者の表現から後者の表現を作りたいのである。この方法は作用素環のネットでは、 $\alpha$ -induction と呼ばれており、最初 [36] によって導入され、基本的な性質や例が [43] によって研究され、さらに詳しい性質が、[1], [2], [3] によって調べられた。 $A(I)$  の表現  $\lambda$  から誘導されるものを  $\alpha_\lambda^*$  と書く。この「誘導」には braiding が必要で、その際に braiding の交差の

どちらを選ぶかということがあるので、その選択を  $\pm$  で表した。正確に言うと、上のような状況で一般に  $A(I)$  の表現から作れるものは、 $B(I)$  の表現ではなく、頂点作用素代数の twisted modul のようなものにすぎないのであるが、どのくらい本当の表現から離れているか、またいつ、本当の表現になるかなどが詳しくわかっている。 $A(I)$  が完全有理的であるとして、その既約表現たちを  $\lambda$  と書く。このとき、 $Z_{\lambda, \mu} = \dim \text{Hom}(\alpha_{\lambda}^+, \alpha_{\mu}^-)$  と定義すると、非負整数成分の行列  $Z$  が得られるが、[3] では Ocneanu の graphical calculus に基づき、この行列  $Z$  が、modular tensor category から生じる  $SL(2, \mathbb{Z})$  の表現の値域の元たちと交換することが示された。この行列  $Z$  のサイズは、 $A(I)$  の既約表現 (の同値類) の数である。この手続きによって、完全有理的な作用素環のネット  $A(I)$  を固定すれば、その拡張  $B(I)$  に対し、行列  $Z$  が定まることになる。上のような、 $SL(2, \mathbb{Z})$  のユニタリ表現の値域と交換する行列は modular invariant と呼ばれていて、ユニタリ表現を固定するたびに (適当な正規化条件の下で) 有限個しかないと知られている。またこの「有限個」は実際の例では 1 個や 2 個であることも少なくない。

## 5 分類理論

上のように  $\alpha$ -induction と modular invariant を使うことによって、一つの作用素環のネット  $A(I)$  が与えられた時に、その延長ネット  $B(I) \supset A(I)$  をすべて分類する、いう問題が研究できる。 $A(I)$  が完全有理的である場合にはこの延長問題の解は有限個しかないことが一般的に証明でき、少なくとも原理的には全部分類できるものであることが示される。(このとき、[22] の結果が解析的に重要な役割を果たす。) このことの応用として、 $c < 1$  を満たす作用素環のネットは [26] で完全に分類された。この分類リストは容易にわかる無限系列、すなわち Virasoro 代数から作られる Virasoro ネットと、その指数 2 の simple current extension たちと、4 つの例外型からなる。例外型が起こる central charge の値は、 $c = 21/22, 25/26, 144/145, 154/155$  である。このうち 3 つは coset と解釈できるが、残りの一つはこれまで知られていない、真に新しいタイプのもと考えられる。これらはまた、 $A-D-E$  型の Dynkin 図形の適当な組によってラベルをつけることができる。Cappelli-Itzykson-Zuber [7] による、minimal model の modular invariant の分類がこのもとなっている。Dynkin 図形の組によるラベル付けも [7] で始められた。

この例外形の作り方が Longo の  $Q$ -system によるものである。その作り方を頂点作用素代数の理論に翻訳すると次の問題になる。

「頂点作用素代数  $V$  に対し、その有限個の既約モジュール  $V_j$  と有限の multiplicity  $n_j$  を使って、 $W = \bigoplus n_j V_j$  を作る。ただし、 $V$  自身はモジュール  $V_0$  とみなし、これについては  $n_0 = 1$  とする。このとき、 $V_0$  の Virasoro 元を使って  $W$  に頂点作用素代数の構造を入れよ。」

これが [35], [36] で考えられた作用素環のネットの拡張問題のフォーミュレーションとカテゴリ的に同じ問題であることは Kirillov-Ostrik [33] によって指摘された。したがって、上で説明した [26] の結果は直ちに頂点作用素代数の結果に翻訳することができ、上の拡張問題で  $V$  が  $c < 1$  の Virasoro 頂点作用素代数である場合は、完全に解けたことになる。この問題の特別な場合はこれまで、頂点作用素代数の方でも研究されてきたものであるが、完全な分類結果は得られていなかった。 $c = 21/22, 25/26$  の例は 2 つの既約モジュールの直和、 $c = 144/145, 154/155$  の例は 4 つの既約モジュールの直和であることに注意する。

以上はカイラルな共形場理論における  $c < 1$  の場合の分類定理であるが、2次元 Mi-

knowski 空間上の共形場理論, その「半分」の境界共形場理論についても, 同様の路線による分類定理が, [27], [31] において得られていることを注意しておく. 境界共形場理論の作用素環的取り扱いの一般論は [37] で確立された.

## 6 Moonshine

Moonshine とは, 有限群と保形関数の間の不思議な関係につけられた名前であり, 1979 年に Conway-Norton [8] の Moonshine 予想として最初に現れた. この予想自体はすでに Borcherds [4] によって 1992 年に肯定的に解かれているが, 依然として多くの謎が残されている. これらの数学は作用素環とは無関係に発展してきたものであるが, 本来作用素環の枠組みで捉えることができるものである. 最近, Popa, 小沢らによって離散群と作用素環との関係は大きく進展しているが, 有限群と作用素環の関係についても, これまで群作用の研究で知られていたこととは別の種類の興味深い現象があるということを説明したい.

有限単純群の分類はとてつもない時間と労力の末, 近年ついに完成した. 1983 年に完成が宣言された時には実はまだ本当に完成したとは言えていなかったようだが, いずれにせよ, 分類リストは次のものである.

- 素数位数の巡回群
- 5 次以上の交代群
- 16 系列の Lie 型単純群
- 26 個の散在型単純群

3 番目の Lie 型とは, 有限体上の行列群のことであり, たとえば  $PSL(n, \mathbb{F}_q)$  などである. 散在型とはほかの 3 種のどれでもないものであり, 1861 年 Mathieu によって発見されたもの以来 26 個ですべてである. その中で位数最大のものが Monster と呼ばれる群であり, 1973 年 Fisher-Griess によってその存在が予想され, 1980 年 Griess [18] によって証明が完成した. その位数は

$$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 \sim 8 \times 10^{53}$$

である.

さてまったく違う(ように見える)話として, 古典的なモジュラー関数の話がある.  $\tau$  を複素平面の上半平面の元とする.  $\exp(2\pi i\tau) = q$  と書いて, 次の  $j$ -関数と呼ばれる関数を考える.

$$j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 8642909970q^3 + \dots$$

この関数は次の不変性を満たすことが知られている.

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

この不変性を満たす関数を一般にモジュラー関数と呼ぶ. (作用素環の人はモジュラー関数と聞くと, 局所コンパクト群の Haar 測度から生じるものの方を思い浮かべるかも

しれないが、それとは関係ない。) モジュラー群  $SL(2, \mathbb{Z})$  の保型関数のことである。モジュラー不変性を要求し、 $\tau \mapsto \tau + 1$  で不変なことを使って  $q$  の関数として表し、さらにその Laurent 展開が  $q^{-1}$  から始まることも要求すれば、その関数は定数項を除いて上の形に決まってしまうことは 19 世紀から知られている。定数項はどう取ってもよいのだが、歴史的に  $\theta$  関数の適当な比で書くことが行われており、そうすると上の 744 が現れる。この  $j$ -関数は、 $SL(2, \mathbb{Z})$  に対する Hauptmodul と呼ばれる。(一般に、 $SL(2, \mathbb{R})$  の genus 0 と呼ばれるある種の部分群  $G$  に対し、上のような Laurent 級数で、 $G$  の元による 1 次分数変換で不変なもののうち、ある特別な関数が  $G$  に対する Hauptmodul と呼ばれる。) 1970 年代、McKay は上の  $j$ -関数の最初の非自明な係数 196884 と、Monster の非自明な最小の既約表現の次元 196883 が「ほとんど同じ」であることに気がついた。(当時は、Monster の存在はまだ証明されていなかったが、その存在は確実と思われており、character などすでにたくさん計算されていた。) 当初これは意味があるとは考えられなかったが、その後、 $j$ -関数の他の係数も、Monster の既約表現の次元と関係することが次のように見出された。

$$\begin{aligned} 196884 &= 1 + 196883, \\ 21493760 &= 1 + 196883 + 21296876, \\ 864299970 &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 196883 + 21296876 + 842609326. \end{aligned}$$

ここで、196883, 21296876, 842609326 はいずれも Monster の既約表現の次元である。もちろん、どんな数でも自明な既約表現の次元である 1 の何倍かと書けるに決まっているのだが、上の関係はそのような自明な関係式とは考えがたい。これに基づき、Conway-Norton は、モジュラー関数と Monster の両者に表れるさまざまな数字の関係を見出した。しかし多くのことが予想の段階にとどまっていたのであり、中心的な命題が Moonshine 予想と名づけられた。(ここで、Moonshine とは「月光」のことではなく、英語の俗語で、「たわごと」という意味である。モジュラー関数と散在型有限単純群が関係しているという考えがあまりにもばかげているためこの名前がついた。)

その Moonshine 予想の内容は次の通りである。まず、何らかの無限次元代数系  $V$  があり、それは  $\mathbb{C}$ -vector space として、代数的直和  $V = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$  と書けており、各  $V_n$  は有限次元であると考え。そして、Monster の各元  $g$  は、 $V$  の自己同型として作用し、各  $V_n$  を global に保っていると考え。すなわち各  $V_n$  は Monster の表現空間となっている。上の Monster の既約表現で次元が、1 次元, 196883 次元, 21296876 次元, 842609326 次元, ... のものを順に  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \dots$  と名づける。Monster の表現空間として、 $V_0$  は  $\pi_1$ ,  $V_1$  は 0,  $V_2$  は  $\pi_1 \oplus \pi_2$ ,  $V_3$  は  $\pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \pi_3$ ,  $V_4$  は  $2\pi_1 \oplus 2\pi_2 \oplus \pi_3 \oplus \pi_4, \dots$  と分解していると考え。さらに上の  $j$ -関数 (から定数項を引いたもの) は、

$$q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \dim(V_n) q^n$$

となっていると思うのである。ここで、 $\sum$  の前に  $q^{-1}$  がついているのは central charge から生じる調整項である。これを  $V$  の vacuum character と言う。上のべき級数は、

$$q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \text{ch}_{V_n}(e) q^n$$

とも書けることに注意する。ただしここで,  $\text{ch}$  は Monster の表現の character,  $e$  は Monster の単位元を表す。すると,  $e$  以外の Monster の元  $g$  についても同様にべき級数,

$$q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \text{ch}_{V_n}(g) q^n$$

を考えることができる。あとからちゃんと収束することもわかるが, 今はとりあえず形式的べき級数として考えよう。これを, McKay-Thompson series と言う。これらがすべて,  $SL(2, \mathbb{R})$  のある部分群  $G_g$  (具体的に指定されている) に対する Hauptmodul である, というのが Moonshine 予想である。

当然のことながら, この問題において最初の大きな難関は, 「何らかの無限次元代数系  $V$ 」とは何か, ということである。適切な代数系はこの時点で存在していなかったため, Borcherds が新しい概念を導入し, それを元に Frenkel-Lepowsky-Meurman [17] が定義したのが, 頂点作用素代数の始まりである。さらに Frenkel-Lepowsky-Meurman はある具体的な頂点作用素代数が上の  $j$ -関数に対応し, また代数系としてのその自己同型群がちょうど Monster であることを証明した。この具体例は, Moonshine 頂点作用素代数と呼ばれ, 通常  $V^h$  と書かれる。(  $h$  がついてるのは「自然」な構成だからである。有限群のもっとも「自然」な現れ方が無限次元代数を経由しているということである。)

この Moonshine 頂点作用素代数  $V^h$  に対し, Monster の元  $g$  ごとに上の Laurent 級数を考えると, 171 種類のものが得られる。(Monster の元の数に比べ, この数がはるかに小さいのは, Monster の共役類の数が 194 個しかないからである。) したがって, Moonshine 予想を証明するにはこの 171 種類の級数がすべて, ある種の Hauptmodul であることを示せばよい。Borcherds [4] はこの Moonshine 予想全体を証明した。これが彼の 1998 年の Fields 賞の業績である。

## 7 Moonshine ネットと Monster

さて, 前で説明したように頂点作用素代数と, 作用素環のネットの対応をながめてみると, 頂点作用素代数側でもっとも有名かつ重要である Moonshine 頂点作用素代数の対応物が作用素環側に欠けていることに気づく。この構成を行い, 期待される性質を証明したのが [29] である。これには, 枠付き頂点作用素代数の考え方 [10] を用いる。

Moonshine 頂点作用素代数  $V^h$  は上記のように [17] によって構成された。この構成は Leech lattice と呼ばれる rank 24 の例外型 lattice からまず, 頂点作用素代数を作り,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  で不動点環に移り, さらに  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  で接合積を取るという段階で行われる。一方, これは central charge  $1/2$  の Virasoro 頂点作用素代数  $L(1/2, 0)$  の 48 個のテンソル積の拡大と思えることが [11] において見出された。つまり,  $L(1/2, 0)^{\otimes 48} \subset V^h$  は subfactor のような包含関係であり, 頂点作用素代数では index という概念はないが, index の類似物を考えれば  $2^{48}$  となっているのである。Virasoro 頂点作用素代数  $L(1/2, 0)$  の作用素環的対応物は, Virasoro ネット  $\text{Vir}_{1/2}$  としてすでによくわかっているのでこれの 48 個のテンソル積を作り, それをしかるべく拡大して Moonshine ネットを作ると言うのが作戦である。この種の拡大問題には, 上のように Longo の Q-system [35] が有効であることがわかっているのであった。頂点作用素代数の方でも, この考え方によって Moonshine 頂点作用素代数を構成する宮本 [40] の方法がある。宮本 [39] による自己同型の構成法はそのまま作用素環の方に翻訳することができ, この研究で有効である。これによって構成される作用素環のネットは次の性質を持っている

- Central charge は 24 である.
- Vacuum character は  $j$ -関数の定数項を除いたものである.
- 既約表現は自分自身しかない.
- 自己同型群が Monster である.

1 番目の性質は簡単にわかる. 48 個のテンソル積を作った段階で central charge は  $48 \times 1/2 = 24$  となり, 拡大するステップでは central charge は不変だからである. Vacuum character は頂点作用素代数の場合と同様に定義され, 2 番目の性質も比較的容易にわかる. (Hilbert 空間  $H$  は, 回転群のユニタリ表現の生成元の固有空間分解によって  $H = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$  と分解されることを使う. ここで負の  $n$  が出ないこと公理の一つである.) 3 番目の性質はしばしば holomorphic と呼ばれる. 既約な DHR endomorphism が写像しかないと言っても同じことである. これは, [30] における  $\mu$ -index の性質を使えば即座にわかる. 一番証明が困難なのは 4 番目の性質である. ここに出てくる自己同型とは次の性質を満たすユニタリ作用素  $U$  のことである.

- $U\Omega = \Omega$ .
- 任意の区間  $I$  に対し,  $UA(I)U^* = A(I)$ .

通常的作用素環の感覚だと, いつでも内部自己同型がたくさんあるので, 自己同型群が有限群と言うのは奇妙な気がするかもしれないが, ここでいう作用素環のネットの自己同型群は, 通常的作用素環  $M$  との対比で言うと,  $\text{Aut}(M)/\overline{\text{Int}}(M)$  に似たもので, 「小さい」群なのである. たとえばこれが自明になる作用素環のネットも簡単に作れる. Subfactor の自己同型との対比で言うと, Jones projection たちをすべて固定するという条件がついているようなものである. この 4 番目の性質を示すには, 頂点作用素代数としての自己同型と作用素環のネットとしての自己同型が同一視できることを示す. そのためには, 頂点作用素代数の元がちゃんと作用素値超関数とみなせて都合のよい性質を満たすことを示すことが必要になる. 一般の頂点作用素代数は純代数的に公理化されているのでそのようなことが示せる期待は持てないが, 今の場合は次のように進めばよい.

- Virasoro algebra のレベルでは, 作用素値超関数としての解釈はきちんとできる.
- Virasoro 頂点作用素代数の元を Moonshine 頂点作用素代数の自己同型で移したのも, 作用素値超関数としてきちんと解釈できる.
- そのような元がすべてを尽くす.

2 番目のステップでは, Driessler-Frölich [14], Buchholz-Schulz-Mirbach [6] による作用素値超関数の性質を使う. これによって, 証明が完結する. さらに Moonshine 予想のステートメントもそのまま作用素環の言葉で書くことができ, Borchers の結果がそのまま成り立つこともここまで来ればすぐにわかる. したがって Moonshine 予想はすべて作用素環の枠組みで捕らえられる現象なのである.

また, 2 番目に大きい, 散在型有限単純群である Baby Monster についても同様の構成が可能である. これは, 頂点作用素代数の方では Höhn [20] によるもので, central charge が 23.5 である頂点作用素代数を coset construction によって構成するものである. この方法はそのまま作用素環に翻訳し, 上と同様の自己同型を用いた議論により, すべての期待される性質を証明することができる.

## 8 終わりに

これからの発展として, Riemann 面上の共形場理論や代数幾何学との関係, 特に mirror symmetry との関係や, さらにモジュラー関数を経由して楕円曲線との関係などが期待されるが, それはこれからの研究課題である. また非可換幾何学においても, モジュラー関数は現れる. [28] に現れるモジュラー関数とその方面と関係するのかもしれないが, これについても何もわかっていない. まだまだ研究すべきことは山のようにあるのである.

## References

- [1] J. Böckenhauer & D. E. Evans, *Modular invariants, graphs and  $\alpha$ -induction for nets of subfactors I*, Commun. Math. Phys. **197** (1998) 361–386. II **200** (1999) 57–103. III **205** (1999) 183–228.
- [2] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *On  $\alpha$ -induction, chiral projectors and modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **208** (1999) 429–487.
- [3] J. Böckenhauer, D. E. Evans & Y. Kawahigashi, *Chiral structure of modular invariants for subfactors*, Commun. Math. Phys. **210** (2000) 733–784.
- [4] R. E. Borcherds, *Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras*, Invent. Math. **109** (1992) 405–444.
- [5] D. Buchholz, G. Mack & I. Todorov, *The current algebra on the circle as a germ of local field theories*, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **5B** (1988) 20–56.
- [6] D. Buchholz & H. Schulz-Mirbach, *Haag duality in conformal quantum field theory*, Rev. Math. Phys. **2** (1990) 105–125.
- [7] A. Cappelli, C. Itzykson & J.-B. Zuber, *The A-D-E classification of minimal and  $A_1^{(1)}$  conformal invariant theories*, Commun. Math. Phys. **113** (1987) 1–26.
- [8] J. H. Conway & S. P. Norton, *Monstrous moonshine*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979) 308–339
- [9] P. Di Francesco, P. Mathieu & D. Sénéchal, “Conformal Field Theory”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1996.
- [10] C. Dong, R. L. Griess, Jr. & G. Höhn, *Framed vertex operator algebras, codes and the Moonshine module*, Commun. Math. Phys. **193** (1998) 407–448.
- [11] C. Dong, G. Mason, Y. Zhu, *Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module*, Proc. Symp. Pure. Math., Amer. Math. Soc. **56** II (1994) 295–316.
- [12] C. Dong & F. Xu, *Conformal nets associated with lattices and their orbifolds*, to appear in Adv. Math., math.OA/0411499.
- [13] S. Doplicher, R. Haag & J. E. Roberts, *Local observables and particle statistics*, I. Commun. Math. Phys. **23** (1971) 199–230; II. **35** (1974) 49–85.
- [14] W. Driessler & J. Frölich, *The reconstruction of local observable algebras from Euclidean Green functions of relativistic quantum field theory*, Ann. Inst. Henri Poincaré **27** (1977) 221–236.
- [15] D. E. Evans & Y. Kawahigashi, “Quantum symmetries on operator algebras”, Oxford University Press, 1998.
- [16] K. Fredenhagen, K.-H. Rehren & B. Schroer, *Superselection sectors with braid group statistics and exchange algebras*, I. Commun. Math. Phys. **125** (1989) 201–226 (1989); II. Rev. Math. Phys. **Special issue** (1992) 113–157.
- [17] I. Frenkel, J. Lepowsky, & A. Meurman, “Vertex operator algebras and the Monster”, Academic Press, 1988.

- [18] R. L. Griess, Jr., *The friendly giant*, Invent. Math. **69** (1982) 1–102.
- [19] R. Haag, “Local Quantum Physics”, 2nd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996
- [20] G. Höhn, *The group of symmetries of the shorter Moonshine module*, math.QA/0210076.
- [21] Y.-Z. Huang, *Vertex operator algebras and the Verlinde conjecture*, math.QA/0406291.
- [22] M. Izumi, R. Longo & S. Popa *A Galois correspondence for compact groups of automorphisms of von Neumann algebras with a generalization to Kac algebras*, J. Funct. Anal. **10** (1998) 25–63.
- [23] V. F. R. Jones, *Index for subfactors*, Invent. Math. **72** (1983) 1–25.
- [24] 「共形場理論と作用素環, 頂点作用素代数」, 日本数学会企画特別講演予稿集, 2005年3月.
- [25] 「作用素環とムーンシャイン」, 作用素論・作用素環論研究集会報告集, 2005年11月.
- [26] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of local conformal nets. Case  $c < 1$* , Ann. of Math. **160** (2004) 493–522. math-ph/0201015.
- [27] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Classification of two-dimensional local conformal nets with  $c < 1$  and 2-cohomology vanishing for tensor categories*, Commun. Math. Phys. **244** (2004) 63–97. math-ph/0304022.
- [28] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Noncommutative spectral invariants and black hole entropy*, Commun. Math. Phys. **257** (2005) 193–225. math-ph/0405037.
- [29] Y. Kawahigashi & R. Longo, *Local conformal nets arising from framed vertex operator algebras*, to appear in Adv. Math., math.OA/0407263 ver. 2.
- [30] Y. Kawahigashi, R. Longo & M. Müger, *Multi-interval subfactors and modularity of representations in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **219** (2001) 631–669.
- [31] Y. Kawahigashi, R. Longo, U. Pennig & K.-H. Rehren, *The classification of non-local chiral CFT with  $c < 1$* , math.OA/0505130 ver. 3.
- [32] Y. Kawahigashi, N. Sato and M. Wakui,  *$(2+1)$ -dimensional topological quantum field theory from subfactors and Dehn surgery formula for 3-manifold invariants*, Adv. Math. **195** (2005) 165–204. math.OA/0208238.
- [33] A. Kirillov Jr. & V. Ostrik, *On  $q$ -analog of McKay correspondence and ADE classification of  $sl^{(2)}$  conformal field theories*, Adv. Math. **171** (2002) 183–227.
- [34] R. Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields*, I. Commun. Math. Phys. **126** (1989) 217–247, & II. **130** (1990) 285–309.
- [35] R. Longo, *A duality for Hopf algebras and for subfactors*, Commun. Math. Phys. **159** (1994) 133–150.
- [36] R. Longo & K.-H. Rehren, *Nets of subfactors*, Rev. Math. Phys. **7** (1995) 567–597.
- [37] R. Longo & K.-H. Rehren, *Local fields in boundary CFT*, Rev. Math. Phys. **16** (2004) 909–960.
- [38] R. Longo & F. Xu, *Topological sectors and a dichotomy in conformal field theory*, Commun. Math. Phys. **251** (2004) 321–364. math.OA/0309366.
- [39] M. Miyamoto, *Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras*, J. Alg. **179** (1996) 523–548.
- [40] M. Miyamoto, *A new construction of the moonshine vertex operator algebra over the real number field*, Ann. of Math. **159** (2004) 535–596.
- [41] R. F. Streater & A. S. Wightman, “PCT, spin and statistics, and all that” (Corrected third printing of the 1978 edition), Princeton University Press, 2000.
- [42] A. Wassermann, *Operator algebras and conformal field theory III: Fusion of positive energy representations of  $LSU(N)$  using bounded operators*, Invent. Math. **133** (1998) 467–538.

- [43] F. Xu, *New braided endomorphisms from conformal inclusions*, Commun. Math. Phys. **192** (1998) 347–403.
- [44] F. Xu, *Algebraic coset conformal field theories I*, Commun. Math. Phys. **211** (2000) 1–44.
- [45] F. Xu, *Algebraic orbifold conformal field theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **97** (2000) 14069–14073.
- [46] F. Xu, *Mirror extensions of local nets*, math.OA/0505367.
- [47] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 237–302.