数理解析研究所講究録
1508巻 2006年 50-68

対称対のCapelli恒等式

和地 輝仁 (北海道工業大学 総合教育研究部)
(西山享氏 (京都大学) との共同研究)

1 対称対のCapelli恒等式とは

See-saw ペアとは,

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_0 & & \mathfrak{m}_0 \\ \cup & \times & \cup \\ \mathfrak{k}_0 & & \mathfrak{h}_0, \end{array}$$

という $\mathfrak{sp}(2N;\mathbf{R})$ の4つの実簡約部分リー代数からなる図式で, $\mathfrak{g}_0 \leftrightarrow \mathfrak{h}_0$ と $\mathfrak{k}_0 \leftrightarrow \mathfrak{m}_0$ がともにデュアルペアをなしていて, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$ と $(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{h}_0)$ がともに対称対であるものを言う. この論説で扱う see-saw ペアは, さらに, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$ がエルミート対称対であるものに限定する. この条件を満たす see-saw ペアは3系列しかない. $\mathfrak{m}_0$ がコンパクトなものは下のとおりである (cf. [How89a]).

Case $\mathbf{R}$	Case $\mathbf{C}$	Case $\mathbf{H}$
$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sp}(2k;\mathbf{R}) & & \mathfrak{u}_n \\ \cup & \times & \cup \\ \mathfrak{u}_k & & \mathfrak{o}_n, \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathfrak{u}(p,q) & & \mathfrak{u}_n \oplus \mathfrak{u}_n \\ \cup & \times & \cup \\ \mathfrak{u}_p \oplus \mathfrak{u}_q & & \mathfrak{u}_n, \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathfrak{o}^*(2k) & & \mathfrak{u}_{2n} \\ \cup & \times & \cup \\ \mathfrak{u}_k & & \mathfrak{sp}(2n;\mathbf{R}), \end{array}$

複素化は $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ などと下付きゼロを取り除いて表す. また, $\mathfrak{sp}(2N;\mathbf{R})$ は $2N$ 次正方行列で実現される斜交リー代数を表すものとする.

$\mathfrak{sp}_{2N} = \mathfrak{sp}(2N;\mathbf{C})$ は, Weil 表現 (oscillator 表現) ω を通して多項式環 $\mathbf{C}[V]$ 上に作用する. ここに V は N 次元ベクトル空間である. $\omega : U(\mathfrak{sp}_{2N}) \to \mathrm{End}(\mathbf{C}[V])$ による $\mathfrak{sp}_{2N}$ の像は, 多項式係数微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ に入ることに注意しておく. K, H をそれぞれ $\mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ に対応する複素リー群とし, 普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の K-不変部分空間を $U(\mathfrak{g})^K$ で表すなどとすると, Howe [How89b] により,

$$\omega(U(\mathfrak{g})^K) = \mathcal{PD}(V)^{K\times H} = \omega(U(\mathfrak{m})^H), \tag{1}$$

となることが知られている. したがって次の問題を考えることができる.

Question 1. $X \in U(\mathfrak{g})^K$ に対して,

$$\omega(X) = \omega(C) \qquad (X \in U(\mathfrak{g})^K,\ C \in U(\mathfrak{m})^H)$$

となるような $C \in U(\mathfrak{m})^H$ を見つけよ．この等式 $\omega(X) = \omega(C)$ を**対称対の Capelli 恒等式**と呼ぶ．

Remark 2. この等式を Capelli 恒等式と呼ぶ理由は，例えば次の 2 つがあげられる．

理由その 1 元々の Capelli 恒等式は，普遍包絡環の中心から不変微分作用素環への全射 $ZU(\mathfrak{g}) \to \mathcal{PD}(V)^G$ があるときに，例えば，$\det(x_{ij})\det(\partial/\partial x_{ij}) \in \mathcal{PD}(V)^G$ などの不変微分作用素の逆像を探すものであった．我々の設定でも，2 つの全射がある図式，

$$\omega(U(\mathfrak{g})^K) \twoheadrightarrow \mathcal{PD}(V)^{K\times H} \twoheadleftarrow \omega(U(\mathfrak{m})^H)$$

において逆像を求めている．

理由その 2 形式的に $\mathfrak{g}_0$ の部分代数 $\mathfrak{k}_0$ として $\mathfrak{g}_0$ をとり，$\mathfrak{m}_0$ の部分代数 $\mathfrak{h}_0$ として $\mathfrak{m}_0$ をとれば，この図式は，$\omega(U(\mathfrak{g})^G) \twoheadrightarrow \mathcal{PD}(V)^{G\times M} \twoheadleftarrow \omega(U(\mathfrak{m})^M)$ となるが，これはデュアルペアの Capelli 恒等式を考える図式そのものである．例えば，$G = GL(n, \mathbf{C})$，$M = GL(m, \mathbf{C})$ ならば，デュアルペアの Capelli 恒等式は，$ZU(\mathfrak{gl}_n)$ と $ZU(\mathfrak{gl}_m)$ の中心元 (Capelli 元) の対応を与えていた．

Remark 3. 上の Remark 2 の '理由その 2' において，$\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{h}_0$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{m}_0$ に近づけるとデュアルペアの Capelli 恒等式の図式は得られるが，デュアルペアの Capelli 恒等式自体が得られるわけではなく，対称対の Capelli 恒等式は自明な等式 $(0 = 0)$ に近づいてしまう．逆に言えば，対称対の Capelli 恒等式はデュアルペアの Capelli 恒等式の設定では隠れている等式であるといえる．

図式 (1) 右辺の $U(\mathfrak{g})^K$ は，有限生成ではあるが大きな代数であり構造も複雑であるので，次の問題を考えた．

Question 4. (1) $X_1, X_2, \ldots, X_r \in U(\mathfrak{g})^K$ として，$\mathrm{gr}(X_d)$ たちが $S(\mathfrak{p})^K$ の生成系をなすような元をとり，これらに対して，$\omega(X_d) = \omega(C_d)$ を満たすような $C_d \in U(\mathfrak{m})^H$ を求めよ．ただし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}_0$ のカルタン分解の複素化，$S(\mathfrak{p})$ は $\mathfrak{p}$ の対称代数とし，$\mathrm{gr} : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ は次数化された環への自然な写像とする．

(2) 図式 (1) で左右の立場を交換した問題を解け．すなわち，$X'_1, X'_2, \ldots, X'_r \in U(\mathfrak{m})^H$ として，$\mathrm{gr}(X'_d)$ たちが $S(\mathfrak{q})^H$ の生成系をなすような元をとり，これらに対して，$\omega(C'_d) = \omega(X'_d)$ を満たすような $C'_d \in U(\mathfrak{g})^K$ を求めよ．ただし，$\mathfrak{m} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ は $\mathfrak{m}_0$ のカルタン分解の複素化とする．

これら，C_d や C'_d を対称対の Capelli 恒等式の **Capelli 元**と呼ぶ．また，$(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0)$ はエルミート対称対であるから，$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ という互いに双対な $\mathfrak{k}$-既約加群への直和分解があるが，$\mathfrak{q}$ にはそのような分解はない．つまり，Question 4 (1) と (2) はこの点で異なる問題だといえる．

Question 4 (1) に対する答は, 完全に得られた [NLW05]. (プレプリント [NLW05] では, ある調和多項式の具体的な形も与えていて, 特に, Capell 元はその多項式たちを annihilate することを示している). 他方, Question 4 (2) に対しては, Case **C** についてのみ答が得られている. Case **R** と Case **H** では, $X'_d \in U(\mathfrak{m})^H$ に対して $C'_d \in U(\mathfrak{g})^K$ は得られておらず, 図式 (1) の中辺にあたる $\mathcal{PD}(V)$ の元までは得られた. 本論説では完全に答の得られている Case **C** について, 対称対の Capelli 恒等式を与える.

2 対称対の Capelli 恒等式, Case C (1)

この節では, Question 4 (1) に対する解答を Case **C** の場合に与える. Case **C** の see-saw ペアを再び掲げておく:

$$\begin{matrix} \mathfrak{g}_0 & & \mathfrak{m}_0 & & \mathfrak{u}(p,q) & & \mathfrak{u}_n \oplus \mathfrak{u}_n \\ \cup & \times & \cup & = & \cup & \times & \cup \\ \mathfrak{k}_0 & & \mathfrak{h}_0 & & \mathfrak{u}_p \oplus \mathfrak{u}_q & & \mathfrak{u}_n \end{matrix} \qquad (\text{in } \mathfrak{sp}(2n(p+q);\mathbf{R})).$$

これらを複素化したリー代数は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{gl}_{p+q}, \\
\mathfrak{k} &= \left\{ \begin{pmatrix} H^X & 0 \\ 0 & H^Y \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{p+q} \;\middle|\; \begin{matrix} H^X \in \mathfrak{gl}_p, \\ H^Y \in \mathfrak{gl}_q \end{matrix} \right\} \simeq \mathfrak{gl}_p \oplus \mathfrak{gl}_q \subset \mathfrak{g}, \\
\mathfrak{p} &= \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-, \\
\mathfrak{p}^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{p+q} \;\middle|\; G \in \mathrm{Mat}(p,q;\mathbf{C}) \right\} \subset \mathfrak{g}, \\
\mathfrak{p}^- &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}_{p+q} \;\middle|\; F \in \mathrm{Mat}(q,p;\mathbf{C}) \right\} \subset \mathfrak{g}, \\
\mathfrak{m} &= \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n, \\
\mathfrak{h} &= \{(X, -{}^tX) \in \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n\} \simeq \mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{m}, \\
\mathfrak{q} &= \{(X, {}^tX) \in \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n\} \subset \mathfrak{m}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ の生成系を次のように定める.

$$\begin{aligned}
H^{(x)}_{ij} &= E_{ij} \in \mathfrak{k} && (1 \le i,j \le p), & G_{ij} &= E_{i,p+j} \in \mathfrak{p}^+ && (1 \le i \le p, 1 \le j \le q), \\
H^{(y)}_{ij} &= E_{p+i,p+j} \in \mathfrak{k} && (1 \le i,j \le q), & F_{ij} &= E_{p+i,j} \in \mathfrak{p}^- && (1 \le i \le q, 1 \le j \le p).
\end{aligned}$$

また, $\mathfrak{m}$ の生成系を次のように定める.

$$E^{(x)}_{st} = (E_{st}, 0) \in \mathfrak{m}, \qquad E^{(y)}_{st} = (0, E_{st}) \in \mathfrak{m} \qquad (1 \le s,t \le n).$$

$V = \mathrm{Mat}(n,p;\mathbf{C}) \oplus \mathrm{Mat}(n,q;\mathbf{C})$ とおくと, Weil 表現 ω は次のような図式を与える.

$$\omega : U(\mathfrak{sp}_{2n(p+q)}) \to \mathcal{PD}(V),$$

$$\omega(U(\mathfrak{gl}_{p+q})^{GL_p \times GL_q}) = \mathcal{PD}(V)^{(GL_p \times GL_q) \times GL_n} = \omega(U(\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n)^{GL_n}).$$

次に $V = \mathrm{Mat}(n,p;\mathbf{C}) \oplus \mathrm{Mat}(n,q;\mathbf{C})$ の各直和成分の座標をそれぞれ x_{si}, y_{si} とすると, Weil 表現 ω の具体的な形は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
\omega(H_{ij}^{(x)}) &= \sum_{s=1}^{n} x_{si} \frac{\partial}{\partial x_{sj}} + \frac{n}{2}\delta_{ij}, & \omega(H_{ij}^{(y)}) &= -\sum_{s=1}^{n} y_{sj} \frac{\partial}{\partial y_{si}} - \frac{n}{2}\delta_{ij}, \\
\omega(G_{ij}) &= \sqrt{-1} \sum_{s=1}^{n} x_{si} y_{sj}, & \omega(F_{ji}) &= \sqrt{-1} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{si}} \frac{\partial}{\partial y_{sj}}, \qquad (2) \\
\omega(E_{st}^{(x)}) &= \sum_{i=1}^{p} x_{si} \frac{\partial}{\partial x_{ti}} + \frac{p}{2}\delta_{st}, & \omega(E_{st}^{(y)}) &= \sum_{j=1}^{q} y_{sj} \frac{\partial}{\partial y_{tj}} + \frac{q}{2}\delta_{st}.
\end{aligned}$$

さて, Question 4 (1) では, $X_d \in U(\mathfrak{g})^K$ を $U(\mathfrak{g})^K$ 全体から取ってくるのではなく, $S(\mathfrak{p})^K$ の生成系と対応するように取ってくるのであった. $S(\mathfrak{p})^K = S(\mathfrak{p})^{GL_p \times GL_q}$ は, 次のような分解を持つ.

$$S(\mathfrak{p})^K = \bigoplus_{\mu} (W_\mu \otimes_{\mathbf{C}} W_\mu^*)^K.$$

ここに, W_μ と W_μ^* は, それぞれ $S(\mathfrak{p}^+)$ と $S(\mathfrak{p}^-)$ の単純部分加群であり, 互いに双対であるもので, μ は長さが高々 $\min(p,q)$ であるすべての分割を走る. $S(\mathfrak{p})^K$ は代数独立な $\min(p,q)$ 個の変数で生成される多項式環に同型であり, その生成系の具体的な形は,

$$X_d = \sum_{I \in \mathcal{I}_d^p, J \in \mathcal{I}_d^q} \det \mathbf{G}_{IJ} \cdot \det \mathbf{F}_{JI} \in U(\mathfrak{g})^K \quad (d = 1, 2 \ldots, r; \quad r = \min(p,q)),$$

を自然な写像 $\mathrm{gr} : U(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ で写したもので与えられる. ここに, 添字集合は $\mathcal{I}_d^p = \{I \subset \{1, \ldots, p\} \mid \#I = d\}$ などであり, $\mathbf{G} = (G_{ij}) \in \mathrm{Mat}(p,q;U(\mathfrak{p}^+))$, $\mathbf{F} = (F_{ji}) \in \mathrm{Mat}(q,p;U(\mathfrak{p}^-))$ である. $\mathbf{G}_{IJ}$ などは小行列を表す. また, X_d は $U(\mathfrak{g})$ の元であるが, $\mathrm{gr}(X_d) \in S(\mathfrak{g})$ も, $2d$ 次斉次で X_d と見た目は同じ元になることを注意しておく. X_d の K-不変性は, $\det \mathbf{G}_{IJ}$ と $\det \mathbf{F}_{JI}$ が互いに dual であることから直ちに得られる.

Theorem 5. $1 \le d \le \min(p,q,n)$ に対して,

$$\omega(X_d) = \omega(C_d).$$

ここに,

$$C_d = (-1)^d \sum_{S,T\in\mathcal{I}_d^n} \det(E^{(x)}_{S(i)T(j)} + (d-j-p/2)\delta_{S(i),T(j)})_{i,j} \\ \times \det(E^{(y)}_{S(i)T(j)} + (d-j-q/2)\delta_{S(i),T(j)})_{i,j}, \tag{3}$$

である. X_d は $1\le d\le \min(p,q)$ に対して定義されたが, $n<d\le\min(p,q)$ の場合も, $C_d=0$ となるので, 上の等式は自明な等式として成立する. この $C_d\in U(\mathfrak{m})^H$ を **Capelli 元**と呼ぶ. C_d が H-不変であることは, 第 3 節で示す.

Proof. 証明に用いるのは, オリジナルの Capelli 恒等式と同程度の等式のみである. まず, 行列 $X, Y, \partial^X, \partial^Y$ を次で定める.

$$X = (x_{si})_{1\le s\le n, 1\le i\le p}, \qquad \partial^X = \left(\frac{\partial}{\partial x_{si}}\right)_{1\le s\le n,1\le i\le p}, \\ Y = (y_{sj})_{1\le s\le n, 1\le j\le q}, \qquad \partial^Y = \left(\frac{\partial}{\partial y_{sj}}\right)_{1\le s\le n,1\le j\le q}. \tag{4}$$

この記号を用いると, Weil 表現の具体的な形から, $I\in\mathcal{I}_d^p$, $J\in\mathcal{I}_d^q$ に対して,

$$\omega(\det(\mathbf{G}_{IJ})) = (\sqrt{-1})^d \sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} \det {}^t(X_{SI}) \det Y_{SJ}, \\ \omega(\det(\mathbf{F}_{JI})) = (\sqrt{-1})^d \sum_{T\in\mathcal{I}_d^n} \det {}^t(\partial^Y_{TJ}) \det \partial^X_{TI},$$

と書くことができる. これを用いると, 次のように定理が証明できる.

$$\begin{aligned} &\sum_{I\in\mathcal{I}_d^p, J\in\mathcal{I}_d^q} \omega(\det \mathbf{G}_{IJ}\cdot \det\mathbf{F}_{JI}) \\ &\quad = (-1)^d \sum_{I,J}\sum_{S,T\in\mathcal{I}_d^n} \det {}^t(X_{SI}) \det Y_{SJ} \det {}^t(\partial^Y_{TJ}) \det\partial^X_{TI} \\ &\quad = (-1)^d \sum_{I,J,S,T} \det X_{SI}\det\partial^X_{TI}\cdot \det Y_{SJ}\det\partial^Y_{TJ} \\ &\quad = (-1)^d \sum_{S,T\in\mathcal{I}_d^n} \omega\Big(\det(E^{(x)}_{S(i)T(j)} + (d-j-p/2)\delta_{S(i),T(j)})_{i,j} \\ &\qquad\qquad \times \det(E^{(y)}_{S(i)T(j)} + (d-j-q/2)\delta_{S(i),T(j)})_{i,j}\Big). \end{aligned}$$

2 つ目の等号では, ∂^X の成分と Y の成分の可換性を用い, 最後の等号では, 主小行列式とは限らない小行列式に対する Capelli 恒等式を用いた. □

Remark 6. 主表象をとると, Theorem 5 の対称対の Capelli 恒等式は,

$$\sum_{I\in\mathcal{I}_d^p, J\in\mathcal{I}_d^q} \det(\sqrt{-1}\,{}^tXY)_{IJ}\cdot\det(\sqrt{-1}\,{}^t\partial^Y\partial^X)_{JI} = (-1)^d \sum_{S,T\in\mathcal{I}_d^n} \det(X\,{}^t\partial^X)_{ST}\cdot\det(Y\,{}^t\partial^Y)_{ST}$$

となる. ただし, 主表象をとった後も同じ記号 X, ∂^X などを用いた. これは, 行列式の積公式 ($\det AB = \det A\det B$) と Cauchy-Binet の公式

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} \det A_{SJ}\det B_{TJ} = \det(A\,{}^tB)_{ST} \qquad \text{(Cauchy-Binet)},$$

を用いて証明できる式である. □

3 Capelli 元 C_d の H-不変性

Capelli 元 $C_d\in U(\mathfrak{m})^H$ は, 式 (3) で定義されたが, H-不変性は証明していなかったので, この節で証明の概略を与える. また, C_d は H-不変ではあるが $U(\mathfrak{m})$ の中心元ではないことにも注意しておく.

外積代数と $U(\mathfrak{m})$ のテンソル積代数, $W = \bigwedge\mathbf{C}^n\otimes_{\mathbf{C}}\bigwedge\mathbf{C}^n\otimes_{\mathbf{C}}U(\mathfrak{m})$ を考える. $\mathbf{C}^n$ の標準基底を, ひとつ目の外積代数では e_t, ふたつ目の外積代数では e'_t とする. W の元 $\eta_t(u)$ と $\eta'_t(u)$ を

$$\eta_t(u)=\sum_{s=1}^n e_s(E_{st}^{(x)}+u\delta_{st}), \qquad \eta'_t(u)=\sum_{s=1}^n e'_s(E_{st}^{(y)}+u\delta_{st}),$$

で定める. すると, $u,v\in\mathbf{C}$ に対して,

$$\eta_T(u)=\sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} e_S\det\mathbf{E}_{ST}^X(u), \qquad \eta'_T(v)=\sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} e'_S\det\mathbf{E}_{ST}^Y(v) \qquad (T\in\mathcal{I}_d^n),$$

が成り立つことがわかる. ここに, $\eta_T(u)=\eta_{T(1)}(u-1)\eta_{T(2)}(u-2)\cdots\eta_{T(d)}(u-d)$, $e_S = e_{S(1)}e_{S(2)}\cdots e_{S(d)}$ であり, 例えば $\mathbf{E}_{ST}^X(u)$ は (i,j)-成分が $E_{S(i)T(j)}^{(x)}+(u-j)\delta_{S(i),T(j)}$ であるような $d\times d$ 行列を表す.

次のように W に $M(=GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C}))$-加群構造を入れる. まず, $U(\mathfrak{m})=U(\mathfrak{gl}_n\oplus\mathfrak{gl}_n)$ は随伴表現 Ad を通して M-加群である. 次に, 外積代数の部分については, $GL_n(\mathbf{C})\times GL_n(\mathbf{C})$ の $\mathbf{C}^n\oplus\mathbf{C}^n$ 上の作用を, $(g,h).(v,w)=({}^tg^{-1}v, {}^th^{-1}w)$ で定める. つまり, どちらの直和因子も $GL_n(\mathbf{C})$ の自然表現の双対になっている. この作用を $\bigwedge\mathbf{C}^n\otimes_{\mathbf{C}}\bigwedge\mathbf{C}^n$ に拡張すると, これらによりテンソル積代数 W に M-加

群構造が入る. $\bigwedge \mathbf{C}^n \otimes_{\mathbf{C}} \bigwedge \mathbf{C}^n$ の部分加群 W_d を, $e_T e'_{T'}$ $(T, T' \in \mathcal{I}_d^n)$ たちで張られる空間として定める. すると, 写像

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & W_d & \to & W \\ & e_T e'_{T'} & \mapsto & \eta_T(u)\eta'_{T'}(v) \end{array} \qquad (T, T' \in \mathcal{I}_d^n)$$

は M-準同型となることがわかり $(u, v \in \mathbf{C})$, 特に $H(\simeq GL_n(\mathbf{C}))$-準同型である. $H = \{(g, {}^t g^{-1}) \in M\}$ だから, $\sum_T e_T e'_T \in W_d$ は H-不変元である. W_d 上の写像 (contraction) ε を, $\varepsilon(e_T e'_{T'}) = \delta_{T,T'}$ で定めると, 自然に $W_d \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{m})$ 上へ拡張され, この写像は H-準同型になる.

以上の準備のもと, H-準同型 Δ と ε を用いて C_d の H-不変性を証明できる.

$$\begin{aligned} \varepsilon\left(\Delta\left(\sum_T e_T e'_T\right)\right) &= \varepsilon\left(\sum_T \eta_T(u)\eta'_T(v)\right) \\ &= \varepsilon\left(\sum_{T,S,S'} e_S \det \mathbf{E}^X_{ST}(u) e'_{S'} \det \mathbf{E}^Y_{S'T}(v)\right) \\ &= \sum_{S,T} \det \mathbf{E}^X_{ST}(u) \det \mathbf{E}^Y_{ST}(v). \end{aligned}$$

$\sum e_T e'_T$ が H-不変だから, 最後の式も H-不変である. よって C_d の H-不変性が証明された.

4 対称対の Capelli 恒等式, Case C (2)

この節では, Question 4 (2) に対する解答を Case C の場合に与える. Question 4 (1) の場合もそうであったが, C'_d を $U(\mathfrak{m})^H$ 全体から取ってくるのではなく, $S(\mathfrak{q})^H$ の生成系と対応するように取ってくるのであった. $S(\mathfrak{q})^H$ は, n 変数多項式環と同型であり,

$$X'_d = \sum_{S \in \mathcal{I}_d^n} \operatorname{Det}((\mathbf{E}^X + {}^t\mathbf{E}^Y)_{SS}) \in U(\mathfrak{m})^H \qquad (d = 1, 2, \ldots, n),$$

を自然な写像 $\mathrm{gr}: U(\mathfrak{m}) \to S(\mathfrak{m})$ で写したもので生成される. ここに, $\mathbf{E}^X, \mathbf{E}^Y$ は,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^X &= (E^{(x)}_{st})_{s,t} = \big((E_{st}, 0)\big)_{s,t} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{m})), \\ \mathbf{E}^Y &= (E^{(y)}_{st})_{s,t} = \big((0, E_{st})\big)_{s,t} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{m})), \end{aligned}$$

であり, したがって, $\mathbf{E}^X + {}^t\mathbf{E}^Y = \big((E_{st}, E_{ts})\big)_{s,t} \in \mathrm{Mat}_n(U(\mathfrak{m}))$ である. また Det は対称化された行列式であり, 成分が互いに可換とは限らない n 次正方行列 Φ に対して,

$$\operatorname{Det}\Phi = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\Phi_{\sigma(1)\tau(1)} \cdots \Phi_{\sigma(n)\tau(n)},$$

と定める. Φ の成分が互いに可換であれば, $\operatorname{Det}\Phi = \det\Phi$ である. X'_d の H-不変性は, $\mathbf{E}^X + {}^t\mathbf{E}^Y$ の H-共変性

$$\operatorname{Ad}(\tilde{g})(\mathbf{E}^X + {}^t\mathbf{E}^Y) = {}^tg(\mathbf{E}^X + {}^t\mathbf{E}^Y)\,{}^tg^{-1} \qquad (\tilde{g} = (g, {}^tg^{-1}) \in H)$$

と Det の対称性からすぐにわかる. ただし, X'_d の定義において Det ではなく列-行列式 det を用いると, H-不変ではなくなることに注意が必要である.

さて, この $X'_d \in U(\mathfrak{m})^H$ に対して Capelli 元 $C'_d \in U(\mathfrak{g})^K$ を求めよというのが, Question 4 (2) である. 我々は実際に C'_d を求め, Capelli 恒等式を得ているがその形は複雑であるため, この論説では, X'_d の代わりに下で定義する別の元たち $X''_d \in U(\mathfrak{m})^H$ を用いて Question 4 (2) のもうひとつの解答を与える. gr による像を見ると, $\operatorname{gr}(X'_d) = \operatorname{gr}(X''_d)$ となっているため, X''_d も $S(\mathfrak{q})^H$ の生成系と対応する元たちである.

$$\begin{aligned} X''_d = \sum_{S\in\mathcal{I}^n_d}\sum_{l=0}^{d} \sum_{\substack{S',T'\in\mathcal{I}^n_l,\ S'\amalg S''=S,\\ S'',T''\in\mathcal{I}^n_{d-l},T'\amalg T''=S}} &(-1)^{l(S',S'')+l(T',T'')} \\ &\times \det(\mathbf{E}^X_{S'T'} + I_{S'T'}\operatorname{diag}(l-1-\frac{p}{2}, l-2-\frac{p}{2}, \dots, -\frac{p}{2})) \\ &\times \det(({}^t\mathbf{E}^Y_{S''T''} + I_{S''T''}\operatorname{diag}(-d+l+1+\frac{q}{2}, -d+l+2-\frac{q}{2}, \dots, \frac{q}{2})), \end{aligned} \tag{5}$$

と定める. ここに, $l(S',S'')$ は S' と S'' を連結した列の転倒数, $I_{S'T'}$ や $I_{S''T''}$ は n 次単位行列 I の小行列である. 従って対角成分へのシフトは, 例えばひとつ目の行列式では $\mathbf{E}^X$ の対角成分, つまり $E^{(x)}_{ss}$ が $\mathbf{E}^X_{S'T'}$ の (対角とは限らない) 成分として現れたとき, それが $\mathbf{E}^X_{S'T'}$ の第 j 列ならば $l-j-p/2$ を加えるというシフトである.

Remark 7. 一見複雑に見える X''_d の定義だが, 先に触れたように X''_d と X'_d の gr による像は一致する. なぜなら, 成分が互いに可換な 2 つの n 次正方行列 A, B と $S, T \in \mathcal{I}^n_d$ に対して,

$$\det(A+B)_{ST} = \sum_{\substack{S',T'\in\mathcal{I}^n_l,\ S'\amalg S''=S,\\ S'',T''\in\mathcal{I}^n_{d-l},T'\amalg T''=T}} (-1)^{l(S',S'')+l(T',T'')} \det A_{S'T'} \det B_{S''T''},$$

が成立するからである. この等式自体は, 行列式のラプラス展開を用いて証明できる.

また, X'_d と違い $X''_d \in U(\mathfrak{m})$ の H-不変性は自明ではない. これは, 第 8 節で証明する. □

$X''_d \in U(\mathfrak{m})^H$ に対応する Capelli 元 $C''_d \in U(\mathfrak{g})^K$ は次のように与えられる. C''_d の K-不変性は第 7 節で示す.

$$C''_d = \sum_{J\in\mathcal{I}^{p+q}_d} \operatorname{Det}_{p,q}((\mathbf{B} - \frac{n}{2}I_{p,q})_{JJ}; d-1, d-2, \dots, 0). \tag{6}$$

ここに, $\mathbf{B}$ と $I_{p,q}$ は,

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{H}^X & -\sqrt{-1}\mathbf{G}\\ -\sqrt{-1}\mathbf{F} & -\mathbf{H}^Y\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{p+q}(U(\mathfrak{g})),\quad I_{p,q}=\begin{pmatrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{p+q}(\mathbf{C}), \tag{7}$$

で定めるものであり, 太文字は, $\mathbf{H}^X=(H_{ij}^{(x)})_{1\le i,j\le p}$ のように, 対応する細文字で表される元を並べた行列を表す. また, $\mathrm{Det}_{p,q}$ は対角シフトの入れかたをひねった対称化された行列式であり, 次で定める: $0\le d\le p+q$ と $I,J\in\mathcal{I}_d^{p+q}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Det}_{p,q}(B_{IJ};u_1,\dots,u_d)\\ &=\frac{1}{d!}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_d}\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)(B_{i_{\sigma(1)},j_{\tau(1)}}-u_1\varepsilon_{i_{\sigma(1)},j_{\tau(1)}})\cdots(B_{i_{\sigma(d)},j_{\tau(d)}}-u_d\varepsilon_{i_{\sigma(d)},j_{\tau(d)}}).\end{aligned} \tag{8}$$

ただし,

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}-\delta_{ij} & 1\le i\le p,\\ \delta_{ij} & p<i\le p+q,\end{cases}\qquad \text{つまり行列として } \varepsilon=-I_{p,q}=\begin{pmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}.$$

上の B_{IJ} は, 勝手な d 次正方行列にしてよいわけではなく, あくまでも, $(p+q)$ 次正方行列 B の d 次小行列でなくてはならない. 従って, 本来は $\mathrm{Det}_{p,q}(B,I,J;u_1,\dots,u_d)$ と表記すべきだが, 上のような表記を採用する. 以上の準備のもとで次の定理が成り立つ.

Theorem 8. 式 (5) と式 (6) で定義された $X_d''\in U(\mathfrak{m})^H$ と $C_d''\in U(\mathfrak{g})^K$ に対して,

$$\omega(X_d'')=\omega(C_d'').$$

□

この定理は次の 2 つの命題を合わせて証明される. まず 2 つの命題で用いる記号を準備する. $X,Y,\partial^X,\partial^Y$ は Theorem 5 の証明の式 (4) と同様に,

$$X=(x_{si})_{\substack{1\le s\le n,\\ 1\le i\le p}},\quad Y=(y_{si})_{\substack{1\le s\le n,\\ 1\le i\le q}},\quad \partial^X=\left(\frac{\partial}{\partial x_{si}}\right)_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le i\le p}},\quad \partial^Y=\left(\frac{\partial}{\partial y_{si}}\right)_{\substack{1\le s\le n\\ 1\le i\le q}},$$

と定義し, さらにこれらを並べて,

$$P=(X,\partial^Y),\qquad Q=(\partial^X,Y),$$

と定める. ここで, X,∂^X は $\mathrm{Mat}(n,p;\mathcal{PD}(V))$ の元であり, Y,∂^Y は $\mathrm{Mat}(n,q;\mathcal{PD}(V))$ の元である. また, $P,Q\in\mathrm{Mat}(n,p+q;\mathcal{PD}(V))$ である. Theorem 8 は次の 2 つの命題により証明される.

Proposition 9. $I, J \in \mathcal{I}_d^{p+q}$ に対して,

$$\mathrm{Det}_{p,q}(({}^t PQ)_{IJ}; d-1, d-2, \ldots, 0) = \sum_{S \in \mathcal{I}_d^n} \det P_{SI} \det Q_{SJ}.$$

□

Proposition 10. $S, T \in \mathcal{I}_d^n$ に対して,

$$\sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \det P_{SJ} \det Q_{TJ}$$
$$= \sum_{l=0}^{d} \sum_{\substack{S', T' \in \mathcal{I}_l^n,\ S' \amalg S'' = S, \\ S'', T'' \in \mathcal{I}_{d-l}^n, T' \amalg T'' = T}} (-1)^{l(S',S'')+l(T',T'')} \det((X\, {}^t\partial^X)_{S'T'}; l-1, l-2, \ldots, 0)$$
$$\times \det((\partial^Y\, {}^tY)_{S''T''}; -(d-l-1), \ldots, -1, 0).$$

□

Proof of Theorem 8. Proposition 9 において $I = J$ として $J \in \mathcal{I}_d^{p+q}$ で和をとり, Proposition 10 において $S = T$ として $S \in \mathcal{I}_d^n$ で和をとると, それらは等しい. また, たとえば $\omega(\mathbf{E}^X)$ で, 各行列成分に ω を適用して得られる行列 $(\omega(E_{st}^X))_{1 \le s,t \le n}$ を表すと,

$$\begin{aligned}
&{}^tX\partial^X = \omega(\mathbf{H}^X - \frac{n}{2}I_p), \qquad {}^t\partial^Y Y = -\omega(\mathbf{H}^Y - \frac{n}{2}I_q),\\
&{}^tXY = \omega(-\sqrt{-1}\mathbf{G}), \qquad {}^t\partial^Y\partial^X = \omega(-\sqrt{-1}\mathbf{F}), \qquad {}^tPQ = \omega(\mathbf{B} - \frac{n}{2}I_{p,q}),\\
&X\,{}^t\partial^X = \omega(\mathbf{E}^X - \frac{p}{2}I_n), \qquad \partial^Y\,{}^tY = \omega({}^t\mathbf{E}^Y + \frac{q}{2}I_n),
\end{aligned}$$

となっていることが, 式 (2) の Weil 表現の具体的な形よりわかるから, これを用いれば定理が従う. □

Remark 11. (1) 互いに可換なエントリをもつ $(p+q)$ 次正方行列 C に対して, $\mathrm{Det}_{p,q}(C_{IJ}; 0, \ldots, 0) = \det C_{IJ}$ だから, Proposition 9 は,

$$\sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \det A_{SJ} \det B_{TJ} = \det(A\,{}^tB)_{ST} \qquad \text{(Cauchy-Binet)},$$

の非可換版である.

(2) Remark 7 で示したように, X_d'' の gr による像は $\mathrm{gr}(X_d')$ に等しいので, Proposition 10 の右辺のシンボルは, $\det(X\,{}^t\partial^X + \partial^Y\,{}^tY)_{ST}$, つまり, $\det(P\,{}^tQ)_{ST}$ のシンボルに等しい. 従って, Proposition 10 は, やはり Cauchy-Binet の公式の非可換版であるといえる. □

Proposition 9 と Proposition 10 は次の 2 つの節を用いて証明する.

5 Proposition 10 の証明

$\mathbf{C}^n$ の標準基底 e_s と, $(\mathbf{C}^n)^*$ の標準基底 e_s^* をとり, $\mathbf{C}^n \oplus (\mathbf{C}^n)^*$ の外積代数と V 上の微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ とのテンソル積代数を構成する: $\bigwedge(\mathbf{C}^n \oplus (\mathbf{C}^n)^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{PD}(V)$. このテンソル積代数の元をいくつか定義する.

$$\alpha_j = \sum_{s=1}^n e_s P_{sj}, \quad \beta_j = \sum_{s=1}^n e_s^* Q_{sj}, \quad \tau = \sum_{s=1}^n e_s e_s^*,$$

$$\Xi_X = \sum_{j=1}^p \alpha_j \beta_j = \sum_{s,t=1}^n e_s e_t^* (X\, {}^t\partial^X)_{(s,t)}, \quad \Xi_Y = \sum_{j=p+1}^{p+q} \alpha_j \beta_j = \sum_{s,t=1}^n e_s e_t^* (\partial^Y\, {}^tY)_{(s,t)}.$$

ここに, $(X\,{}^t\partial^X)_{(s,t)}$ は, 行列 $X\,{}^t\partial^X$ の (s,t) 成分を表し, 外積やテンソル積の記号は省略して, $e_s \wedge e_t^* \otimes A_{st}$ を $e_s e_t^* A_{st}$ のように書く. α_j たちの積 $\alpha_J = \alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\cdots\alpha_{j_d}$ は, 列-行列式を用いて,

$$\alpha_J = \sum_{S \in \mathcal{I}_d^n} e_S \det P_{SJ}, \tag{9}$$

と書ける. ここに, $e_S = e_{s_1} e_{s_2} \cdots e_{s_d}$ である. よって, $\sum_J \alpha_J \beta_J$ は, $\sum_{J,S,T} e_S e_T^* \det P_{SJ} \det Q_{TJ}$ に等しく, これは Proposition 10 の左辺に対応するので, $\sum_J \alpha_J \beta_J$ を Proposition 10 の右辺に対応する形に変形していくことが目標である. また, Ξ_X のシフト付きの積は, 対称化された行列式を用いて,

$$\begin{aligned}(\Xi_X + u_1\tau)(\Xi_X + u_2\tau)\cdots(\Xi_X + u_d\tau) \\ = d!(-1)^{d(d-1)/2} \sum_{S,T \in \mathcal{I}_d^p} e_S e_T^* \operatorname{Det}((X\,{}^t\partial^X)_{ST}; u_1, \ldots, u_d)\end{aligned} \tag{10}$$

と書ける $(u_j \in \mathbf{C})$. ここに,

$$\operatorname{Det}(A_{ST}; u_1, \ldots, u_d) = \frac{1}{d!} \sum_{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_d} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\{A_{s_{\sigma(1)},t_{\tau(1)}} + u_1 \delta_{s_{\sigma(1)},t_{\tau(1)}}\}\cdots$$
$$\cdots\{A_{s_{\sigma(d)},t_{\tau(d)}} + u_d \delta_{s_{\sigma(d)},t_{\tau(d)}}\}$$

である. Ξ_Y についても同様に対称化された行列式を用いた等式が成立する.

上で定めた元たちに次の交換関係が成立する.

Lemma 12. (1) τ は, テンソル積代数 $\bigwedge(\mathbf{C}^n \oplus (\mathbf{C}^n)^*) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{PD}(V)$ の中心に属する.
(2) $[P_{si}, P_{tj}] = [Q_{si}, Q_{tj}] = 0$.
(3) $[P_{si}, Q_{tj}] = \varepsilon_{ij}\delta_{st}$.
(4) $[\Xi_X, \Xi_Y] = 0$.
(5) α_i たちは互いに反可換であり, β_i たちも互いに反可換である.
(6) $\alpha_i\beta_j + \beta_j\alpha_i = \varepsilon_{ij}\tau$.
(7) $\Xi_X \alpha_j = \alpha_j(\Xi_X - \tau) \quad (j \le p)$. また, $\Xi_Y \alpha_j = \alpha_j(\Xi_Y + \tau) \quad (j > p)$.

Proof. (1) $\tau=\sum_s e_s e_s^*$ は, $\mathcal{PD}(V)$ の元とは可換であり, 外積代数の元として 2 次斉次だから, $\bigwedge(\mathbf{C}^n\oplus(\mathbf{C}^n)^*)$ とも可換である. したがって, τ は $\bigwedge(\mathbf{C}^n\oplus(\mathbf{C}^n)^*)\otimes_{\mathbf{C}}\mathcal{PD}(V)$ の中心に属する.

(2) $P=(X,\partial^Y)$, $Q=(\partial^X,Y)$ であるから, (2) は明らか.

(3) $i\le p$ のとき $[P_{si},Q_{tj}]=-\delta_{st}\delta_{ij}$ であり, $i>p$ のとき $[P_{si},Q_{tj}]=\delta_{st}\delta_{ij}$ であるから (3) は成立する.

(4) Ξ_X と Ξ_Y は外積代数としての次数が 2 次斉次であり, $X\,{}^t\partial^X$ のエントリは, $\partial^Y\,{}^tY$ のエントリと可換であるから, Ξ_X と Ξ_Y は可換である.

(5) α_i は外積代数としての次数が 1 次斉次であり, P_{si} たちは可換であるから, α_i たちは反可換である. β_i たちも同様.

(6) $\alpha_i\beta_j+\beta_j\alpha_i=\sum_{s,t=1}^n e_s e_t^*[P_{si},Q_{tj}]=\sum_{s,t=1}^n e_s e_t^*\varepsilon_{ij}\delta_{st}=\varepsilon_{ij}\tau$.

(7) まず最初の等式を証明する. $\Xi_X\alpha_j=\sum_{i\le p}\alpha_i\beta_i\alpha_j=\sum_{i\le p}\alpha_i(-\alpha_j\beta_i+\varepsilon_{ij}\tau)$. ここで, α_i たちが反可換であることと, $i\le p$ のとき $\varepsilon_{ij}=-\delta_{ij}$ であることに注意すると, これは $\alpha_j\Xi_X-\alpha_j\tau$ に等しい. よって最初の等式は証明された. もうひとつの等式も同様に証明できる. □

Lemma 13.

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}}\sum_{S,T\in\mathcal{I}_d^n} e_S e_T^*\det P_{SJ}\det Q_{TJ}$$
$$=\sum_{l=0}^d(-1)^{(d-l)l}\sum_{S',T'\in\mathcal{I}_l^n} e_{S'}e_{T'}^*\det((X\,{}^t\partial^X)_{S'T'};l-1,l-2,\dots,0)$$
$$\times\sum_{S'',T''\in\mathcal{I}_{d-l}^n} e_{S''}e_{T''}^*\det((\partial^Y\,{}^tY)_{S''T''};-(d-l-1),\dots,-1,0).$$

Proof. $\sum_J\alpha_J\beta_J$ を 2 通りに計算する. まず, (9) より,

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}}\alpha_J\beta_J=\sum_J\sum_{S,T\in\mathcal{I}_d^n}e_S e_T^*\det P_{SJ}\det Q_{TJ}.$$

これは示すべき式の左辺に等しい.

次に, $p+\mathcal{I}_m^q=\{\{p+s_1,p+s_2,\dots,p+s_m\};S\in\mathcal{I}_m^q\}$ とおき, $j\le p$, $k>p$ のとき Lemma 12 (6) より, α_j と β_k は単に反可換であることに注意すると,

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}}\alpha_J\beta_J=\sum_{l=0}^d\sum_{\substack{J\in\mathcal{I}_l^p,\\ K\in p+\mathcal{I}_{d-l}^q}}\alpha_J\alpha_K\beta_J\beta_K=\sum_{l=0}^d\sum_{\substack{J\in\mathcal{I}_l^p,\\ K\in p+\mathcal{I}_{d-l}^q}}(-1)^{(d-l)l}\alpha_J\beta_J\alpha_K\beta_K \quad (11)$$

である. ここでまず,

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_l^p}\alpha_J\beta_J=\frac{1}{l!}\sum_{1\le j_1,\dots,j_l\le p}\alpha_J\beta_J=\frac{1}{l!}\sum_{1\le j_1,\dots,j_l\le p}\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_l}\cdot\beta_{j_l}\beta_{j_1}\cdots\beta_{j_{l-1}}\cdot(-1)^{l-1}.$$

この式において, $\alpha_{j_l}\beta_{j_l}$ の部分を j_l で和をとると Ξ_X になり, その Ξ_X を Lemma 12 (7) を用いて左へ移動すると, 上の式は次の式に等しい.

$$\frac{1}{l!}\sum_{1\leq j_1,\ldots,j_{l-1}\leq p}\{\Xi_X+(l-1)\tau\}\alpha_J\beta_J\cdot(-1)^{l-1}.$$

同じ変形を繰り返すことにより, 結局,

$$\sum_{J\in\mathcal{I}_l^p}\alpha_J\beta_J=\frac{1}{l!}\{\Xi_X+(l-1)\tau\}\{\Xi_X+(l-2)\tau\}\cdots\{\Xi_X+0\tau\}\cdot(-1)^{l(l-1)/2}$$

を得る. 同様に Lemma 12 (7) を用いると,

$$\begin{aligned}&\sum_{K\in p+\mathcal{I}_{d-l}^q}\alpha_K\beta_K\\&=\frac{1}{(d-l)!}\{\Xi_Y-(d-l-1)\tau\}\cdots\{\Xi_Y-\tau\}\{\Xi_Y-0\tau\}\cdot(-1)^{(d-l)(d-l-1)/2}\end{aligned}$$

を得る. 従って, (10) を用いて (11) の変形を続けると次に等しい.

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{d}(-1)^{(d-l)l}\cdot\frac{1}{l!}\{\Xi_X+(l-1)\tau\}\{\Xi_X+(l-2)\tau\}\cdots\{\Xi_X+0\tau\}\cdot(-1)^{l(l-1)/2}\\&\qquad\times\frac{1}{(d-l)!}\{\Xi_Y-(d-l-1)\tau\}\cdots\{\Xi_Y-\tau\}\{\Xi_Y-0\tau\}\cdot(-1)^{(d-l)(d-l-1)/2}\\&=\sum_{l=0}^{d}(-1)^{(d-l)l}\sum_{S',T'\in\mathcal{I}_l^n}e_{S'}e_{T'}^{*}\operatorname{Det}((X\,{}^t\partial^X)_{S',T'};l-1,l-2,\ldots,0)\\&\qquad\times\sum_{S'',T''\in\mathcal{I}_{d-l}^n}e_{S''}e_{T''}^{*}\operatorname{Det}((\partial^Y\,{}^tY)_{S'',T''};-(d-l-1),\ldots,-1,0).\end{aligned}\tag{12}$$

これは, 示すべき式の右辺と比べて, 列-行列式 det が対称化された行列式 Det に替わっただけの式である. この式のひとつ目の対称化された行列式は, オリジナルの (Capelli の) Capelli 恒等式の場合と同様に, 対角シフトが 1 ずつ減少しているので列-行列式と一致する. また, ふたつ目の対称化された行列式は, オリジナルの Capelli 恒等式の転置行列を考えたものに相当するので, この場合は対角シフトが 1 ずつ増加していることからやはり列-行列式と一致する. よって上の式は示すべき式の右辺と一致し, 補題は示された. □

Proposition 14 (=Proposition 10).

$$\begin{aligned}&\sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} \det P_{SJ}\det Q_{TJ}\\ &=\sum_{l=0}^{d}\sum_{\substack{S',T'\in\mathcal{I}_l^n,\ S'\amalg S''=S,\\ S'',T''\in\mathcal{I}_{d-l}^n,T'\amalg T''=T}}(-1)^{l(S',S'')+l(T',T'')}\det((X\,{}^t\partial^X)_{S'T'};l-1,l-2,\dots,0)\\ &\qquad\qquad\times\det((\partial^Y\,{}^tY)_{S''T''};-(d-l-1),\dots,-1,0).\end{aligned}$$

Proof. Lemma 13 の両辺で, $e_Se_T^*$ の係数を見ることにより, 以下のように証明される. まず, Lemma 13 の左辺において $e_Se_T^*$ の係数は, $\sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}}\det P_{SJ}\det Q_{TJ}$ であり, これは示すべき式の左辺に等しい.

次に, Lemma 13 の右辺において $e_Se_T^*$ の係数は, $S'\amalg S''=S$ かつ $T'\amalg T''=T$ となる summand のみからくることに, まず注意する. あとは符号がどうなるかについて見ればよい. Lemma 13 の右辺において第一に, $e_{S''}$ と $e_{T'}^*$ を交換すると $(-1)^{(d-l)l}$ が生じ, 元々あったものと相殺する. 第二に, $e_{S'}e_{S''}$ を昇順に並べるとき, e_s たちの交換の回数は $l(S',S'')$ であり, $e_{T'}^*e_{T''}^*$ を昇順に並べるとき, e_t^* たちの交換の回数は $l(T',T'')$ であるから, これらから, $(-1)^{l(S',S'')+l(T',T'')}$ が生じる. 従って, Lemma 13 の右辺における $e_Se_T^*$ の係数は, 示すべき式の右辺に一致することがわかる. 以上より命題は示された. □

6 Proposition 9 の証明

$\mathbf{C}^{p+q}$ の標準基底 f_i と, $(\mathbf{C}^{p+q})^*$ の標準基底 f_i^* をとり, $\mathbf{C}^{p+q}\oplus(\mathbf{C}^{p+q})^*$ の外積代数と V 上の微分作用素環 $\mathcal{PD}(V)$ とのテンソル積代数を構成する: $\bigwedge(\mathbf{C}^{p+q}\oplus(\mathbf{C}^{p+q})^*)\otimes_{\mathbf{C}}\mathcal{PD}(V)$. このテンソル積代数の元をいくつか定義する.

$$\eta_s=\sum_{i=1}^{p+q}f_iP_{si},\qquad \zeta_s=\sum_{i=1}^{p+q}f_i^*Q_{si},$$
$$\Lambda=\sum_{i,j=1}^{p+q}f_if_j^*({}^tPQ)_{(i,j)}=\sum_{s=1}^{n}\eta_s\zeta_s,\qquad \sigma=\sum_{i=1}^{p+q}\varepsilon_{ii}f_if_i^*.$$

Λ の定義における, $({}^tPQ)_{(i,j)}$ は, 行列 ${}^tPQ$ の (i,j) 成分という意味である. また, いつもとは異なり, η_s を d 個掛け合わせると,

$$\eta_{s_1}\eta_{s_2}\cdots\eta_{s_d}=\sum_{I\in\mathcal{I}_d^{p+q}}f_I\,\text{row-det}\,P_{SI},$$

と, 行-行列式 row-det が現れる. しかし行列 P において, 列が異なるか, または, 行が異なるエントリ同士は可換なので, 行列式の各 summand の d 個の factor 同士

は可換であり, row-det $P_{SI} = \det P_{SI}$ となることに注意する. ζ_s についても同様である.

Lemma 15. (1) η_s たちは反可換. ζ_s たちも反可換.
(2) $\eta_s\zeta_t + \zeta_t\eta_s = \delta_{st}\sigma$.
(3) $[\Lambda, \eta_t] = \eta_t\sigma$. また, $[\Lambda, \zeta_t] = -\zeta_t\sigma$.

Proof. (1) 行列 P のエントリ同士は互いに可換であり, f_i 同士は互いに反可換であるから, η_s 同士は反可換である. ζ_s たちについても同様である.
(2) $[P_{si}, Q_{tj}] = \delta_{st}\varepsilon_{ij}$ であるから,

$$\eta_s\zeta_t + \zeta_t\eta_s = \sum_{i,j=1}^{p+q} f_i f_j^* [P_{si}, Q_{tj}] = \sum_{i,j} f_i f_j^* \delta_{st}\varepsilon_{ij} = \delta_{st}\sigma.$$

(3) $\Lambda\eta_t = \sum_{s=1}^n \eta_s\zeta_s\eta_t = \sum_s \eta_s(-\eta_t\zeta_s + \delta_{st}\sigma) = \eta_t\Lambda + \eta_t\sigma$. 従って, $[\Lambda, \eta_t] = \eta_t\sigma$ である. $[\Lambda, \zeta_t]$ についても同様に示せる. □

Remark 16. 上の補題の (2), (3) が, Case **R** や Case **H** ではもっと複雑になるため, Case **R** や Case **H** の Question 4 (2) では, Proposition 9 に相当する式の計算が難しい. □

対角シフトの入れかたをひねった対称化された行列式 $\mathrm{Det}_{p,q}$ を, (8) で定義したが,

$$\Lambda(u) = \Lambda - u\sigma,$$

と定めると, これを用いて次のように表すことができる.

Lemma 17.

$$\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)\cdots\Lambda(u_d) = d!(-1)^{d(d-1)/2} \sum_{I,J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} f_I f_J^* \, \mathrm{Det}_{p,q}(({}^tPQ)_{IJ}; u_1, u_2, \ldots, u_d).$$

Proof. $B = {}^tPQ$ とすると,

$$\begin{aligned}
\Lambda(u_1)\Lambda(u_2)\cdots\Lambda(u_d) &= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_d\\ j_1,\ldots,j_d}} f_{i_1}f_{j_1}^* \cdots f_{i_d}f_{j_d}^*(B_{i_1,j_1} - u_1\varepsilon_{i_1,j_1})\cdots(B_{i_d,j_d} - u_d\varepsilon_{i_d,j_d}) \\
&= \sum_{I,J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_d} \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)(-1)^{d(d-1)/2} f_I f_J^* \\
&\qquad \times (B_{i_{\sigma(1)},j_{\tau(1)}} - u_1\varepsilon_{i_{\tau(1)},j_{\sigma(1)}})\cdots(B_{i_{\sigma(d)},j_{\tau(d)}} - u_d\varepsilon_{i_{\tau(d)},j_{\sigma(d)}}) \\
&= d!(-1)^{d(d-1)/2} \sum_{I,J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} f_I f_J^* \, \mathrm{Det}_{p,q}(B_{IJ}; u_1, \ldots, u_d).
\end{aligned}$$

□

以上の準備のもと, Proposition 9 が証明できる.

Proposition 18 (=Proposition 9).

$$\sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} \det P_{SI} \det Q_{SJ} = \mathrm{Det}_{p,q}(({}^tPQ)_{IJ}; d-1, d-2, \ldots, 0).$$

Proof. まず, $S \in \mathcal{I}_d^n$ に対して,

$$\sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} \eta_S\zeta_S = \sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} \sum_{I,J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} f_I f_J^* \det P_{SI} \det Q_{SJ}$$

であり, この右辺の $f_I f_J^*$ の係数を見ると, 示すべき式の左辺に等しい.

他方, $\sum_S \eta_S\zeta_S$ を, Lemma 15 を用いて計算すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in\mathcal{I}_d^n} \eta_S\zeta_S &= \sum_{s_1,\ldots,s_d=1}^{n} \frac{1}{d!}\eta_{s_1}\cdots\eta_{s_d}\cdot\zeta_{s_1}\cdots\zeta_{s_d} \\
&= (-1)^{d-1} \sum_{s_1,\ldots,s_{d-1}=1}^{n} \frac{1}{d!}\eta_{s_1}\cdots\eta_{s_{d-1}}\cdot\Lambda\cdot\zeta_{s_1}\cdots\zeta_{s_{d-1}} \\
&= (-1)^{d-1} \sum_{s_1,\ldots,s_{d-1}=1}^{n} \frac{1}{d!}\Lambda(d-1)\eta_{s_1}\cdots\eta_{s_{d-1}}\cdot\zeta_{s_1}\cdots\zeta_{s_{d-1}}.
\end{aligned}$$

このように $\eta_s\zeta_s$ と並べた所の和をとると現れる Λ を, 左へ移動することを繰り返すと, 次の式になる:

$$(-1)^{d(d-1)/2}\frac{1}{d!}\Lambda(d-1)\Lambda(d-2)\cdots\Lambda(0).$$

これは, Lemma 17 により, 次に等しい:

$$\sum_{I,J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} f_I f_J^* \mathrm{Det}_{p,q}(({}^tPQ)_{IJ}; d-1, d-2, \ldots, 0).$$

この式の $f_I f_J^*$ の係数を見ると, 示すべき等式の右辺に等しい. 以上より命題は証明された. □

7 Capelli 元 C_d'' の K-不変性

式 (6) にあるように, $d = 1, 2, \ldots, p+q$ に対して, Capelli 元 C_d'' は次のように定めた.

$$C_d'' = \sum_{J\in\mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}((\mathbf{B} - \frac{n}{2}I_{p,q})_{JJ}; d-1, d-2, \ldots, 0).$$

この節ではまず, $\mathrm{Det}_{p,q}$ の $(GL_p \times GL_q)$-不変性と, $\mathbf{B}$ の $(GL_p \times GL_q)$-共変性を示した後に, C_d'' の $(GL_p \times GL_q)$-不変性を証明する.

Lemma 19. $g \in GL_p \times GL_q (\subset GL_{p+q})$ のとき, $(p+q)$ 次正方行列 B と $u_j \in \mathbf{C}$ に対して次が成り立つ.

$$\sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}((gBg^{-1})_{JJ}; u_1, \dots, u_d) = \sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}(B_{JJ}; u_1, \dots, u_d).$$

Proof. 外積代数を用いた証明の詳細は省くが, B の小行列のうち, 行も列もそのインデックスが p までのところからとった主小行列と, 行も列もそのインデックスが p より大きいところからとった主小行列を合わせたような主小行列のみを考えているので, 上の $(GL_p \times GL_q)$-不変性が成立する. □

Lemma 20. 式 (7) で定められた行列 $\mathbf{B}$ は, $(GL_p \times GL_q)$-共変性を持つ. すなわち, $g \in GL_p \times GL_q (\subset GL_{p+q})$ のとき,

$$\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B} = {}^t g \mathbf{B} \, {}^t g^{-1}.$$

ここに, $\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B}$ は, 各エントリに作用した行列 $(\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B}_{ij})_{1 \le i,j \le p+q}$ を表す. また, 右辺は $(p+q)$ 次正方行列 3 つの, 行列としての積である.

Proof. まず,

$$J = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} I_q \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \mathbf{H}^X & \mathbf{G} \\ \mathbf{F} & \mathbf{H}^Y \end{pmatrix} = J^{-1} \mathbf{B} J^{-1}$$

と定める. $\mathbf{B}'$ は, $\mathfrak{gl}_{p+q}$ の行列単位 E_{ij} を, そのまま (i,j)-成分に並べた行列であるから, $g \in GL_{p+q}$ に対して, $\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B}' = {}^t g \mathbf{B}' \, {}^t g^{-1}$ が成り立つ. 従って, $g \in GL_p \times GL_q$ に対して, g と J が可換であることに注意すると, $\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B} = \mathrm{Ad}(g)(J\mathbf{B}'J) = J(\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B}')J = J \, {}^t g \mathbf{B}' \, {}^t g^{-1} J = {}^t g \mathbf{B} \, {}^t g^{-1}$. □

上の 2 つの補題から次の命題が従う.

Proposition 21. Capelli 元 C_d'' は $K = GL_p \times GL_q$ の作用で不変である.

Proof. $g \in GL_p \times GL_q$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(g) C_d'' &= \sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}((\mathrm{Ad}(g)\mathbf{B} - \frac{n}{2} I_{p,q})_{JJ}; d-1, \dots, 0) \\
&= \sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}(({}^t g \mathbf{B} \, {}^t g^{-1} - \frac{n}{2} I_{p,q})_{JJ}; d-1, \dots, 0) \\
&= \sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}(({}^t g (\mathbf{B} - \frac{n}{2} I_{p,q}) \, {}^t g^{-1})_{JJ}; d-1, \dots, 0) \\
&= \sum_{J \in \mathcal{I}_d^{p+q}} \mathrm{Det}_{p,q}((\mathbf{B} - \frac{n}{2} I_{p,q})_{JJ}; d-1, \dots, 0) \\
&= C_d''.
\end{aligned}$$

□

8 X''_d の H-不変性

式 (5) にあるように, $d = 1, 2, \ldots, n$ に対して, $X''_d \in U(\mathfrak{m})$ は次のように定めた.

$$X''_d = \sum_{S \in \mathcal{I}^n_d} \sum_{l=0}^{d} \sum_{\substack{S', T' \in \mathcal{I}^n_l,\ S' \amalg S'' = S, \\ S'', T'' \in \mathcal{I}^n_{d-l}, T' \amalg T'' = S}} (-1)^{l(S', S'') + l(T', T'')}$$
$$\times \det((\mathbf{E}^X - \frac{p}{2} I_n)_{S'T'}; l-1, l-2, \ldots, 0)$$
$$\times \det(({}^t\mathbf{E}^Y + \frac{q}{2} I_n)_{S''T''}; -(d-l-1), \ldots, -1, 0).$$

この節では, X''_d の H-不変性を証明する. 証明の骨子は, テンソル積代数 $\bigwedge(\mathbf{C}^n \oplus (\mathbf{C}^n)^*) \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{m})$ に, $M = GL_n \times GL_n$ の作用を入れて, Lemma 13 の証明の途中の式 (12) が $H \simeq GL_n$ で不変であることを示すことである.

$GL_n \times GL_n$ の $\mathbf{C}^n \oplus (\mathbf{C}^n)^*$ 上の作用を, $(g, h).(v, w) = ({}^t g^{-1} v, {}^t h^{-1} w)$ で定める. つまり, どちらの直和因子も GL_n の自然表現の双対になっている. また, $M = GL_n \times GL_n$ を $U(\mathfrak{m})$ 上に随伴表現で作用させる. つまり, $(A, B) \in \mathfrak{m}$ に対して, $\mathrm{Ad}(g, h)(A, B) = (\mathrm{Ad}(g)A, \mathrm{Ad}(h)B)$ である. これらにより, M はテンソル積代数 $\bigwedge(\mathbf{C}^n \oplus (\mathbf{C}^n)^*) \otimes_{\mathbf{C}} U(\mathfrak{m})$ 上に作用する.

このテンソル積代数の元をいくつか定義する.

$$\tilde{\Xi}_X = \sum_{s,t=1}^{n} e_s e_t^* E^X_{st}, \qquad \tilde{\Xi}_Y = \sum_{s,t=1}^{n} e_s e_t^* E^Y_{ts}, \qquad \tau = \sum_{s=1}^{n} e_s e_t^*.$$

Lemma 22. 上で定めた元, $\tilde{\Xi}_X$, $\tilde{\Xi}_Y$, τ はいずれも H-不変である.

Proof. $H = \{(g, {}^t g^{-1}) \in GL_n \times GL_n\} \subset M$ の作用で, e_s と e_s^* は双対基底になっているから, τ は H-不変である.

さて, H の作用を具体的に書くと次のようになる.

$$(g, {}^t g^{-1}).e_s = \sum_{t=1}^{n} g^{st} e_t, \qquad (g, {}^t g^{-1}).e_s^* = \sum_{t=1}^{n} g_{ts} e_t^*,$$
$$\mathrm{Ad}(g, {}^t g^{-1}) E^X_{st} = \sum_{x,y=1}^{n} g_{xs} E^X_{xy} g^{ty}, \qquad \mathrm{Ad}(g, {}^t g^{-1}) E^Y_{st} = \sum_{x,y=1}^{n} g^{sx} E^Y_{xy} g_{yt}.$$

ここに, $g = (g_{st})_{1 \le s,t \le n}$, $g^{-1} = (g^{st})_{1 \le s,t \le n}$ である. 従って, $(g, {}^t g^{-1}) \in H$ の $\tilde{\Xi}_X$ 上の作用は,

$$(g, {}^t g^{-1}).\tilde{\Xi}_X = \sum_{s,t=1}^{n} \sum_{u=1}^{n} g^{su} e_u \sum_{v=1}^{n} g_{vt} e_v^* \sum_{x,y=1}^{n} g_{xs} E^X_{xy} g^{ty} = \sum_{x,y} e_x e_y^* E^X_{xy} = \tilde{\Xi}_X.$$

よって, $\tilde{\Xi}_X$ は H-不変である. $\tilde{\Xi}_Y$ の H-不変性も同様に示される. □

Proposition 23. $X''_d \in U(\mathfrak{m})$ は $H \simeq GL_n$ の作用で不変である.

Proof. Theorem 8 の Capelli 恒等式の左辺の $\omega(X''_d)$ は, Lemma 13 の証明の途中の式 (12):

$$\sum_{l=0}^{d}(-1)^{(d-l)l}\cdot\frac{1}{l!}\{\Xi_X+(l-1)\tau\}\{\Xi_X+(l-2)\tau\}\cdots\{\Xi_X+0\tau\}\cdot(-1)^{l(l-1)/2}$$
$$\times\frac{1}{(d-l)!}\{\Xi_Y-(d-l-1)\tau\}\cdots\{\Xi_Y-\tau\}\{\Xi_Y-0\tau\}\cdot(-1)^{(d-l)(d-l-1)/2} \tag{13}$$

において, $e_S e_T^*$ の係数を取り出して, $S=T$ として, $S\in\mathcal{I}_d^n$ で和をとったものである. $\tilde{\Xi}_X$ や $\tilde{\Xi}_Y$ を Weil 表現 ω で写すと,

$$\omega(\tilde{\Xi}_X)=\sum_{s,t=1}^{n}e_se_t^*\omega(E_{st}^X)=\sum_{s,t=1}^{n}e_se_t^*(X\,{}^t\partial^X+\frac{p}{2}I_n)_{(s,t)},$$
$$\omega(\tilde{\Xi}_Y)=\sum_{s,t=1}^{n}e_se_t^*\omega(E_{ts}^Y)=\sum_{s,t=1}^{n}e_se_t^*(\partial^Y\,{}^tY-\frac{q}{2}I_n)_{(s,t)}$$

であることに注意すると, X''_d は (13) において, Ξ_X を $\tilde{\Xi}_X-(p/2)\tau$ に置き換え, Ξ_Y を $\tilde{\Xi}_Y+(q/2)\tau$ に置き換えてから, $e_Se_T^*\mapsto\delta_{S,T}$ という H-準同型な contract を適用した結果である. ところが, (13) において $\tilde{\Xi}_X$ や $\tilde{\Xi}_Y$ に置き換えた式は, Lemma 22 により H-不変であるから, contract した結果である X''_d も H-不変である. □

参考文献

[How89a] Roger Howe, *Remarks on classical invariant theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), no. 2, 539–570. MR MR986027 (90h:22015a)

[How89b] ———, *Transcending classical invariant theory*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 3, 535–552. MR 90k:22016

[NLW05] Kyo Nishiyama, Soo-Teck Lee, and Akihito Wachi, *Intersection of harmonics and Capelli identities for symmetric pairs*, preprint, 2005.