数理解析研究所講究録
1508 巻 2006 年 97-105

Poincaré-Birkhoff-Witt coefficients in $\mathfrak{sl}_2$

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai) *

1 Introduction

1.1 Main Theorem

E, F, H を単純リー環 $\mathfrak{sl}_2$ の標準基底とする．すなわち，関係式

$$[H, E] = 2E, [H, F] = -2F, [E, F] = H$$

を満たしているとする．Poincaré-Birkhoff-Witt の定理により，普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の任意の元は，単項式

$$E^i H^j F^k \quad (i, j, k \in \mathbf{Z}_{\geq 0})$$

の 1 次結合に一意的に表すことができる．この小文ではリー環 $\mathfrak{sl}_2$ の 1 つの元のベキという特殊な形の元を 1 次結合に書くことを考え一つの解答を与える．

この問題は以前から何度か梅田亨氏に尋ねられていた問題（のひとつ）であるが，最近になるまできちんと考えたことがなかった．きっかけがあって考えたのでこの機会にまとめておく．公表の機会を与えてくださった研究代表者の梅田氏に感謝したい．なお，この問題に対しては梅田氏本人によっても別のやり方で答えが得られている．

この小文の主定理は以下のものである．

Theorem 1 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}$ を定数とし，$X = a_1E + a_2H + a_3F \in \mathfrak{sl}_2$ とおく．このとき，

$$f_i(u) = f_i(u; a) = f_i(u; a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{C}[[u]], \quad (i = 1, 2, 3)$$

が存在して

$$\exp(uX) = \exp(f_1(u)E) \exp(f_2(u)H) \exp(f_3(u)F) \tag{1}$$

が成立する．ここで両辺は $U(\mathfrak{sl}_2)[[u]]$ の元と見なしている．

*短期共同 (RIMS 共同研究)「Capelli 恒等式の新局面」(2005.9.5–9). 報告集

もともとの問題 (X^n を E, H, F の単項式の線形和で表す) の解答を得るには次のようにすれば良い. u に関する形式ベキ級数展開

$$\exp\left(f_i(u;a)t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,n}(t;a)\frac{u^n}{n!} \quad (i = 1,2,3)$$

で係数 $f_{i,n}(t;a) \in \mathbf{C}[t]$ を決める. ($f_{i,n}$ は n 次多項式で最高次の係数は a_i^n である.) このとき

$$(a_1E + a_2H + a_3F)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} f_{1,i}(E;a) f_{2,j}(H;a) f_{3,k}(F;a)$$

と書き表すことができる.

1.2 Explicit form

実は定理の証明では f_i の具体形も同時に得られる. その具体形は次のようになっている.

$$\begin{aligned}
f_1(u) = f_1(u;a_1,a_2,a_3) &= \frac{(a_1/\nu)\sinh(\nu u)}{\cosh(\nu u) - (a_2/\nu)\sinh(\nu u)}, \\
f_2(u) = f_2(u;a_1,a_2,a_3) &= -\log\left(\cosh(\nu u) - (a_2/\nu)\sinh(\nu u)\right), \\
f_3(u) = f_3(u;a_1,a_2,a_3) &= \frac{(a_3/\nu)\sinh(\nu u)}{\cosh(\nu u) - (a_2/\nu)\sinh(\nu u)}.
\end{aligned}$$

ここで ν は $\nu^2 = a_1a_3 + a_2^2$ を満たすように選ぶ. 右辺は ν の偶関数なので ν の符号の取り方には依存しない. なお, この具体形は $\nu = 0$ のときも次のように解釈すれば意味を持つ.

$$\begin{aligned}
f_1(u;a)|_{\nu=0} &= \frac{a_1u}{1-a_2u}, \\
f_2(u;a)|_{\nu=0} &= -\log(1-a_2u), \\
f_3(u;a)|_{\nu=0} &= \frac{a_3u}{1-a_2u}.
\end{aligned}$$

この f_i の具体形は Theorem 1 の証明と同時に得られる. しかし, もし, 定理の形の表示 (1) の存在を <u>仮定</u> してよければ, f_i の具体形を計算する方法は次節以降に述べる方法以外にもある.

(1) E, H, F の通常の行列実現によって定まる自然な代数準同型 $\rho : U(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{M}at_2$ を考える. このとき関係式

$$\exp(u\rho(X)) = \exp(f_1(u)\rho(E))\exp(f_2(u)\rho(H))\exp(f_3(u)\rho(F))$$

が成立する. ρ は全射であるが単射とはほど遠く, ρ の kernel は小さくない. にも関わらず, (1) を仮定すればこの関係式 (だけ) で f_i を一意に決定するのに十分であることが結果としてわかる.

f_i の具体形を求める実際の計算は群 SL_2 の中で行えば良い. 上の関係式の右辺は

$$\begin{bmatrix} 1 & f_1(u) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{f_2(u)} & 0 \\ 0 & e^{-f_2(u)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_3(u) & 1 \end{bmatrix}$$

と計算される. 一方で左辺は Hamilton-Cayley $X^2 = -(\det X)I = \nu^2 I$ を用いて計算できる.

(2) 具体形を得るもう一つの方法は微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial u}\exp(uX) = (a_1E + a_2H + a_3F)\exp(uX)$$

を用いる方法である. 表示 (1) を認めると

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(e^{f_1E}e^{f_2H}e^{f_3F}\right) = (a_1E + a_2H + a_3F)\left(e^{f_1E}e^{f_2H}e^{f_3F}\right)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} e^{f_2H}Fe^{-f_2H} &= e^{-2f_2}F, \\ e^{-f_1E}Fe^{f_1E} &= F - f_1H - f_1^2E, \\ e^{-f_1E}He^{f_1E} &= H + 2f_1E \end{aligned}$$

を用いると, 関係式

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = a_1 + 2a_2f_1 - a_3f_1^2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = a_2 - a_3f_1, \tag{3}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = a_3e^{2f_2} \tag{4}$$

が得られる. 関係式 (2) は f_1 を未知関数とする Riccati の微分方程式であり, 初期条件 $f_1(u) \in \mathbf{C}[[u]]u$ の下で一意的に解けて, その具体形は上で挙げたようになる. f_1 が決まれば, 関係式 (3) より f_2 の表示が得られる. 最後に関係式 (4) より f_3 の表示が得られる.

この問題の量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ への拡張は佐藤保幸 (2006 年, 名古屋大学修士論文) によって試みられている.

2 Calculation

2.1 Recursion

記号を決めておこう. Poincaré-Birkhoff-Witt の定理で展開した式を

$$(a_1E + a_2H + a_3F)^n = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk,n}E^iH^jF^k$$

のように係数 $c_{ijk,n} \in \mathbf{C}$ を用いて表す. これらの係数は当然 a_1, a_2, a_3 にも依存している. 個々の係数 $c_{ijk,n}$ を求める代わりに母関数を導入する. $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を可換な変数とし,

$$C_n = C_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk,n}\xi_1^i\xi_2^j\xi_3^k \in \mathbf{C}[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$$

と定義する. $n = 0$ の時は $C_0 = 1$ と約束する.

まず, 漸化式を導く. 普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}_2)$ の中で関係式

$$\begin{aligned} HE^i &= E^i(H + 2i), &(5)\\ FE^i &= E^iF - iE^{i-1}(H + i - 1) &(6) \end{aligned}$$

が成立することを用いると,

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= XX^n \\ &= (a_1E + a_2H + a_3F)\sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk,n}E^iH^jF^k \\ &= \sum_{i,j,k} a_1E^{i+1}H^jF^k + \sum_{i,j,k} a_2HE^iH^jF^k + \sum_{i,j,k} a_3FE^iH^jF^k \\ &= \sum_{i,j,k} a_1E^{i+1}H^jF^k + \sum_{i,j,k} a_2E^i(H + 2i)H^jF^k \\ &\qquad + \sum_{i,j,k} a_3E^i(H + 2)^jF^{k+1} - \sum_{i,j,k} a_3iE^{i-1}(H + i - 1)H^jF^k \end{aligned}$$

と正規順序 (normal ordering) で書き表すことができる. これが

$$X^{n+1} = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk,n+1}E^iH^jF^k$$

と一致することから係数に関する漸化式が得られる. これを母関数の形で書くと,

$$
\begin{aligned}
C_{n+1} &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} c_{ijk,n}\xi_1^i\xi_2^j\xi_3^k \\
&= \sum_{i,j,k} a_1\xi_1^{i+1}\xi_2^j\xi_3^k + \sum_{i,j,k} a_2\xi_1^i(\xi_2+2i)\xi_2^j\xi_3^k \\
&\qquad + \sum_{i,j,k} a_3\xi_1^i(\xi_2+2)^j\xi_3^{k+1} - \sum_{i,j,k} a_3 i\xi_1^{i-1}(\xi_2+i-1)\xi_2^j\xi_3^k \\
&= a_1\xi_1 C_n + a_2(\xi_2+2\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1})C_n + a_3\xi_3 T_{\xi_2,2}C_n - a_3(\xi_2+\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1})\frac{\partial}{\partial\xi_1}C_n.
\end{aligned}
$$

ここで最後の式に現れる shift operator $T_{\xi_2,2}$ は $(T_{\xi_2,2}\varphi)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\varphi(\xi_1,\xi_2+2,\xi_3)$ と定義した. 以上をまとめると

$$
C_{n+1} = \left\{\xi_1\left(a_1+2a_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-a_3\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)+\xi_2\left(a_2-a_3\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right)+a_3\xi_3T_{\xi_2,2}\right\}C_n.
$$

この漸化式から次の性質が導かれる.

Proposition 2 $a_1T_{\xi_2,2}C_n=\left(a_1+2a_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-a_3\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}\right)C_n$.

証明. n に関する帰納法で示す. n の場合に成り立つと仮定する. 式の記述を見やすくするために, 記号

$$
\begin{aligned}
Y &= a_1+2a_2\frac{\partial}{\partial\xi_1}-a_3\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}, \\
Z &= a_2-a_3\frac{\partial}{\partial\xi_1}
\end{aligned}
$$

を用いる. このとき

$$
\begin{aligned}
YC_{n+1} &= Y\left(\xi_1Y+\xi_2Z+a_3\xi_3T_{\xi_2,2}\right)C_n \\
&= \left((\xi_1Y+2Z)Y+\xi_2ZY+a_3\xi_3T_{\xi_2,2}Y\right)C_n \\
&= \left(\xi_1Y+(\xi_2+2)Z+a_3\xi_3T_{\xi_2,2}\right)YC_n \\
&= \left(\xi_1Y+(\xi_2+2)Z+a_3\xi_3T_{\xi_2,2}\right)\left(a_1T_{\xi_2,2}C_n\right) \\
&= a_1T_{\xi_2,2}\left((\xi_1Y+\xi_2Z+a_3\xi_3T_{\xi_2,2})C_n\right) \\
&= a_1T_{\xi_2,2}C_{n+1}.
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3 $a_1\frac{\partial}{\partial\xi_3}C_n = a_3\frac{\partial}{\partial\xi_1}C_n$.

証明. これも n に関する帰納法で証明する. n のときに成り立つとする. $U = a_1\frac{\partial}{\partial\xi_3} - a_3\frac{\partial}{\partial\xi_1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
UC_{n+1} &= U\left(\xi_1 Y + \xi_2 Z + a_3\xi_3 T_{\xi_2,2}\right)C_n \\
&= \{(\xi_1 U - a_3)Y + \xi_2 ZU + a_3 T_{\xi_2,2}(\xi_3 U + a_1)\}\, C_n \\
&= (\xi_1 Y + \xi_2 Z + a_3\xi_3 T_{\xi_2,2})U + a_3(a_1 T_{\xi_2,2} - Y))\, C_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる. □

Lemma 4 変数 $a_0 = a_1a_3 + a_2^2$ ならびに $x = a_1\xi_1 + a_3\xi_3$ を導入する. このとき C_n は $x, \xi_2, a_0,\ a_2$ の多項式である.

証明. 漸化式

$$C_{n+1} = \left\{\xi_2\left(a_2 - a_3\frac{\partial}{\partial\xi_1}\right) + (a_1\xi_1 + a_3\xi_3)T_{\xi_2,2}\right\}C_n \tag{7}$$

を用いれば, n に関する帰納法により従う. □

すなわち, 多項式 $B_n = B_n(x, y, a_0, a_2)$ で

$$C_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3; a_1, a_2, a_3) = B_n(a_1\xi_1 + a_3\xi_3, \xi_2, a_1a_3 + a_2^2, a_2)$$

を満たすものが存在する.

Proposition 5 $a_1 \neq 0$ と仮定する. 次の 2 つが成立する.

(1) $T_{y,2}B_n = \left(1 + 2a_2\frac{\partial}{\partial x} + (a_2^2 - a_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)B_n.$

(2)

$$B_{n+1} = \left(x\left(1 + 2a_2\frac{\partial}{\partial x} + (a_2^2 - a_0)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + y\left(a_2 + (a_2^2 - a_0)\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)B_n.$$

証明. Proposition 2 と漸化式 (7) より直ちに従う. □

2.2 $\mathfrak{sl}_2$

$\mathfrak{sl}_2$ の表現 ϖ を

$$\begin{aligned} \varpi(E) &= x, \\ \varpi(H) &= 2x\frac{\partial}{\partial x} + y, \\ \varpi(F) &= -(x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y\frac{\partial}{\partial x}) \end{aligned}$$

によって定義する. すると Proposition 5(2) の漸化式は

$$B_{n+1} = \varpi(E + a_2H + (a_0 - a_2^2)F)B_n$$

と表すことができる. 初期条件 $B_0 = 1$ より, 一般項は

$$B_n = \varpi(E + a_2H + (a_0 - a_2^2)F)^n 1$$

と表される. 以下では u を不定元とし, 母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} B^n = \varpi(\exp(u(E + a_2H + (a_0 - a_2^2)F)))1$$

を計算する.

2.3 Proof of main theorem

さて, 新しい変数 t を用意して $\mathfrak{sl}_2$ の別の表現 π を

$$\begin{aligned} \pi(E) &= -(t^2\frac{\partial}{\partial t} + yt), \\ \pi(H) &= 2t\frac{\partial}{\partial t} + y, \\ \pi(F) &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

で定義する. すると

$$\pi(E + a_2H + (a_0 - a_2^2)F) = (a_0 - (a_2 - t)^2)\frac{\partial}{\partial t} + (a_2 - t)y$$

が成り立つ.

補助的な変数 θ を

$$(a_0 - (a_2 - t)^2)\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta}$$

が成り立つように定義する. θ は a_0, a_2 に依存することに注意. 具体的には, $a_0 \neq 0$ の場合, $\nu^2 = a_0$ を用いて

$$t = a_2 + \frac{\nu \cosh \nu\theta}{\sinh \nu\theta}$$

の形に解くことができる. この変数を用いると

$$\pi(E + a_2 H + (a_0 - a_2^2)F) = \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\nu \cosh \nu\theta}{\sinh \nu\theta} = (\sinh \nu\theta)^y \frac{\partial}{\partial\theta} \circ (\sinh \nu\theta)^{-y}$$

となる. したがって

$$\begin{aligned}
& \pi\left(\exp(u(E + a_2 H + (a_0 - a_2^2)F))\right) 1 \\
= \ & (\sinh \nu\theta)^y \exp(u \frac{\partial}{\partial\theta}) \circ (\sinh \nu\theta)^{-y} \\
= \ & (\sinh \nu\theta)^y (\sinh \nu(\theta + u))^{-y} \\
= \ & \left(\frac{\sinh \nu(\theta+u)}{\sinh \nu\theta}\right)^{-y} \\
= \ & \left(\cosh \nu u + \sinh \nu u \frac{\cosh \nu\theta}{\sinh \nu\theta}\right)^{-y} \\
= \ & \left(\cosh \nu u + \frac{\sinh \nu u}{\nu}(t - a_2)\right)^{-y} \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu) \sinh \nu u)^{-y} \left(1 + \frac{\sinh \nu u}{\nu(\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)} t\right)^{-y} \qquad (8)
\end{aligned}$$

となる. 最左辺, 最右辺はともに変数 θ を含んでいないことに注意.

次に $a_0 = 0$ のときを考える. このときは $t = a_2 + (1/\theta)$ となり,

$$\begin{aligned}
\pi\left(\exp(v(E + a_2 H - a_2^2 F))\right) 1 &= \left(\frac{\theta + v}{\theta}\right)^{-y} \\
&= (1 + v(t - a_2))^{-y}
\end{aligned}$$

である. ここでさらに $a_2 = 0$ とすると

$$\pi(\exp(vE)) 1 = (1 + vt)^{-y} \qquad (9)$$

である. したがって (8) と (9) を組み合わせると $v = \dfrac{\sinh \nu u}{\nu(\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)}$ に対して (一般の a_0, a_2 に対して)

$$\begin{aligned}
& \pi\left(\exp(u(E + a_2 H + (a_0 - a_2^2)F))\right) 1 \qquad (10) \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu) \sinh \nu u)^{-y} \pi(\exp(vE)) 1
\end{aligned}$$

となる．

ここで，いったん $y \neq -1, -2, \ldots$ と仮定しよう．このとき $\mathfrak{sl}_2$ の表現 $(\varpi, \mathbf{C}[x])$ と表現 $(\pi, \mathbf{C}[t])$ はともに既約最低ウエイト表現であり最低ウエイトが y である．したがって，両者の間に最低ウエイトベクトル $1 \in \mathbf{C}[x]$ を最低ウエイトベクトル $1 \in \mathbf{C}[t]$ に写すような intertwining 同型が存在する．従って，関係式 (10) は表現 ϖ でも成立するので，引き続き $v = \dfrac{\sinh \nu u}{\nu(\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)}$ に対して

$$
\begin{aligned}
& \varpi\left(\exp(u(E + a_2 H + (a_0 - a_2^2)F))\right) 1 \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)^{-y}\, \varpi\left(\exp(vE)\right) 1 \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)^{-y}\, \varpi\left(\exp(vx)\right) 1 \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)^{-y} \exp\left(\frac{x \sinh \nu u}{\nu(\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)}\right)
\end{aligned}
$$

が成立する．従って，

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} B_n \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)^{-y} \exp\left(\frac{x \sinh \nu u}{\nu(\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)}\right)
\end{aligned}
$$

となる．両辺を u の形式ベキ級数として展開すると係数は x, y の多項式となる．したがってこの式は $y \notin \mathbf{Z}_{<0}$ のみならずすべての x, y で成立する．

ここで $x = a_1\xi_1 + a_3\xi_2$, $y = \xi_2$, $a_0 = a_1 a_3 + a_2^2$ を代入すると B_n は C_n に戻り，

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} C_n \\
= \ & (\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)^{-\xi_2} \exp\left(\frac{(a_1\xi_1 + a_3\xi_2)\sinh \nu u}{\nu(\cosh \nu u - (a_2/\nu)\sinh \nu u)}\right) \\
= \ & \exp(f_2(u)\xi_2)\exp(f_1(u)\xi_1 + f_3(u)\xi_3)
\end{aligned}
$$

が得られる．以上で Theorem 1 が証明された． □