数理解析研究所講究録
1508巻 2006年 106-118

D_n 型包絡環のパフィアン型中心元と Minor Summation Formula

鳥取大学工学部　橋本隆司 (Takashi Hashimoto)
Faculty of Engineering, Tottori University

1　はじめに

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の D_n 型リー環 $\mathfrak{o}_{2n}$ を

$$\mathfrak{o}_{2n} = \{X \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C});\, {}^tXJ_{2n} + J_{2n}X = O\}$$

と定義する．ここで J_{2n} は反対角線上に 1 が並び，残りの成分はすべて 0 であるような $2n$ 次の非退化対称行列とする．このとき，X が $\mathfrak{o}_{2n}$ の元であることと，それが反対角線について交代的であることとは同値である (本稿ではこれを略して**反交代的**と呼ぶことにする)．上のように $\mathfrak{o}_{2n}$ を実現すれば，対角行列，および上三角行列からなる部分空間は，それぞれ $\mathfrak{o}_{2n}$ の Cartan 部分代数，および正ルートベクトルで張られるベキ零部分代数となることに注意する．これらを $\mathfrak{h}, \mathfrak{n}$ とかこう．

リー環 $\mathfrak{o}_{2n}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_{2n})$ の中心 $ZU(\mathfrak{o}_{2n})$ は，その生成系として，$U(\mathfrak{o}_{2n})$ の元を成分とする $2n$ 次の反交代行列で，かつ，その対角線上および上三角部分に，それぞれ $U(\mathfrak{h})$ および $\mathfrak{n}$ の元が並ぶ行列 Φ の列 (小) 行列式およびパフィアンで与えられる元をもつことが知られている (cf. [9])．

一般に，成分が非可換な行列 $\Phi = (\Phi_{i,j})_{i,j=1,\dots,2n}$ の列行列式 $\det(\Phi)$ は

$$\det(\Phi) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\Phi_{\sigma(1),1}\Phi_{\sigma(2),2}\cdots\Phi_{\sigma(2n),2n} \tag{1.1}$$

で定義される．さらに行列 $\Phi = (\Phi_{i,j})_{i,j=1,\dots,2n}$ が反交代的ならば ΦJ_{2n} のパフィアン (本稿では単に $\mathrm{Pf}\,(\Phi)$ とかく) は，

$$\mathrm{Pf}\,(\Phi) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\,\tilde{\Phi}_{\sigma(1),\sigma(2)}\tilde{\Phi}_{\sigma(3),\sigma(4)}\cdots\tilde{\Phi}_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)} \tag{1.2}$$

で定義される．ただし，$\tilde{\Phi}_{i,j}$ は ΦJ_{2n} の (i,j) 成分を表す．

列行列式型の中心元の最高ウェイト加群上の固有値は容易に計算できる．例えばそれが行列 $\Phi=(\Phi_{i,j})$ の列行列式 $\det(\Phi)$ で与えられるとすると，これを最高ウェイトベクトルにほどこせば，構成の仕方から，$i<j$ ならば $\Phi_{i,j}\in\mathfrak{n}$ なので，和 (1.1) で生き残るのは，$\sigma=1$ に対応する項のみとなるからである．

しかし，パフィアン型の中心元の固有値を同じように計算することはできない．

そこでまず可換な場合を考える．反交代行列 $X\in\mathfrak{o}_{2n}$ を

$$X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -J_n{}^t aJ_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

とかく．ここで，a,b,c はすべて n 次の正方行列で b,c は反交代的である．このとき，XJ_{2n} のパフィアン (上のようにこれを単に $\mathrm{Pf}(X)$ とかく) は次のように展開される (系 2.3):

$$\mathrm{Pf}(X)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{\substack{I,J\subset[n]\\ |I|=|J|=2k}}\mathrm{sgn}\left(\bar{I},I\right)\mathrm{sgn}\left(\bar{J},J\right)\det(a^{\bar{I}}_{\bar{J}})\,\mathrm{Pf}(b_I)\,\mathrm{Pf}(c_J). \tag{1.4}$$

ここで，2 番目の和は，$[n]:=\{1,2,\ldots,n\}$ に含まれ，かつ，濃度が k であるすべての添字集合 I,J にわたる．また $\bar{I}$ および $\bar{J}$ は $[n]$ における I および J の補集合を表し，$a^{\bar{I}}_{\bar{J}}$ は行，列の添字がそれぞれ $\bar{I},\bar{J}$ に入る a の部分行列，b_I,c_I は行，列の添字がともに I に入る b,c の部分行列を表す (詳細については，記号と約束，および 2 節を参照のこと)．

実はさらに，パフィアンの和公式 (1.4) は a が矩形の場合も成り立つ (cf. [4])．より正確には，p,q を $p+q=2n$ を満たす正整数，a を $p\times q$-行列，また b,c をそれぞれ p 次および q 次の反交代行列とし，$X\in\mathfrak{o}_{2n}$ を (1.3) のように書く．ただし，$(2,2)$-ブロックは $-J_q{}^taJ_p$ とする．このとき，(1.4) と同様の公式が成り立つ (定理 2.1)．また，石川-若山のパフィアンの和公式 ([4, Theorem 3.5]) は，p,q ともに偶数の場合の我々の公式に一致することが容易に示せる．

非可換な場合に戻ろう．X をその (i,j) 成分が $X_{i,j}:=E_{i,j}-J_{2n}E_{-j,-i}J_{2n}\in\mathfrak{o}_{2n}\subset U(\mathfrak{o}_{2n})$ で与えられるような反交代行列とする．ただし，$E_{i,j}$ は (i,j) 成分のみが 1 で，その他の成分は 0 である行列単位を，また $-i$ は $2n+1-i$ を表す．このとき，非可換パフィアン $\mathrm{Pf}(X)$ は次のように展開される (定理 3.6):

定理. $U(\mathfrak{o}_{2n})$ に成分を持つ反交代行列 X を (1.3) のように色付けするとき，次の式が成

立つ：

$$\mathrm{Pf}(X)=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\sum_{\substack{I,J\subset[n]\\|I|=|J|=2k}}\mathrm{sgn}\left(\bar{I},I\right)\mathrm{sgn}\left(\bar{J},J\right)\det\left(a_{\bar{J}}^{\bar{I}}+\mathbb{1}_{\bar{J}}^{\bar{I}}\,\rho(|\bar{J}|)\right)\mathrm{Pf}\,(c_J)\,\mathrm{Pf}\,(b_I).$$

ここで $\mathbb{1}$ は n 次の単位行列, $\rho(j)=\mathrm{diag}(j-1,j-2,\cdots,0)$ とする.

この公式と, すべての i,j について $b_{i,j}\in\mathfrak{n}$ である事実を使えば, 中心元 $\mathrm{Pf}\,(X)\in ZU(\mathfrak{o}_{2n})$ の最高ウェイト加群上の固有値を容易に計算できる[*1] (系 3.7).

例. $n=2$ のとき, $X\in\mathfrak{o}_{2n}$ を (1.3) のように色付けしよう:

$$X=\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & b_{1,2} & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & -b_{1,2}\\ c_{1,2} & 0 & -a_{2,2} & -a_{1,2}\\ 0 & -c_{1,2} & -a_{2,1} & -a_{1,1}\end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

このとき, パフィアン $\mathrm{Pf}\,(X)$ は

$$\mathrm{Pf}\,(X)=a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}+\ c_{1,2}b_{1,2} \tag{1.6}$$

となる. 右辺の第 1 項と第 2 項は和公式 (1.4) の $I=J=\emptyset$ に, 第 3 項は $I=J=\{1,2\}$ にそれぞれ対応する.

非可換な場合に移って, 行列 X を (1.5) のようにかく. 非可換成分を持つ反交代行列のパフィアンの定義 (1.2) より, (1.6) の右辺を対称化したものが $\mathrm{Pf}\,(X)$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,(X)&=\frac{1}{2}\Big(a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}+c_{1,2}b_{1,2}+a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}a_{2,1}+b_{1,2}c_{1,2}\Big)\\&=(a_{1,1}+1)\,a_{2,2}-a_{2,1}a_{1,2}+c_{1,2}b_{1,2}\end{aligned}$$

となる. ここで交換関係 (3.6) を用いた.

記号と約束

正整数 n に対し, $[n],[-n]$ でそれぞれ集合 $\{1,2,\ldots,n\}$, $\{-n,\ldots,-2,-1\}$ を表し, $[\pm n]:=[n]\cup[-n]$ とする. また, 添字集合の組 $I\subset J$ が与えられたとき, 特に断りのない限り, 補

[*1] ここで述べる方法より簡単にパフィアン型中心元の固有値を計算できることを, 拓殖大の織田氏から指摘していただいた.

集合 $\bar{I}$ は J においてとるものとし，記号 $\sqcup$ で disjoint union を表す．反対角線について交代的である正方行列を，本稿では略して**反交代行列**と呼ぶことにする．$2n$ 次の反交代行列を扱う場合，符号付き添字を用いるのが便利である．すなわち，$i \in [2n]$ に対し，$-i$ は $2n+1-i$ を表すものと了解する．おしまいに，実数 x を越えない最大整数を $\lfloor x \rfloor$ で表す．

2　パフィアンの和公式 − 可換な成分の場合 −

正整数 N に対し，反対角線上に 1 が並び，残りの成分は 0 である N 次の非退化対称行列を J_N とする:

$$J_N := \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}.$$

偶数次の複素直交群 O_{2n} およびそのリー環 $\mathfrak{o}_{2n}$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{O}_{2n} &:= \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}); {}^t g J_{2n} g = J_{2n}\}, \\ \mathfrak{o}_{2n} &:= \{X \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{C}); {}^t X J_{2n} + J_{2n} X = 0\} \end{aligned}$$

と実現しておく．X が $\mathfrak{o}_{2n}$ の元であることと，X は反対角線に関して交代的であることとは同値で，上で述べたように，これを略して**反交代的**であるということにする．X が反交代的，すなわち XJ_{2n} が交代的であることから XJ_{2n} のパフィアンが定義されるが，これも単に $\mathrm{Pf}(X)$ とかくことにする．

さて $p+q=2n$ を満たす 2 つの正整数 p,q をとる．約束により，$2n+1-p, 2n+1-(p-1), \dots, 2n$ および $2n+1-q, \dots, 2n$ を，それぞれ $-p, -(p-1), \dots, -1$ および $-q, \dots, -1$ とかくことにしたので，$X \in \mathfrak{o}_{2n}$ は

$$X = \left[\begin{array}{cccc|ccc} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,q} & x_{1,-p} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ x_{p,1} & x_{p,2} & \cdots & x_{p,q} & 0 & \cdots & x_{p,-1} \\ \hline x_{-q,1} & x_{-q,2} & \cdots & 0 & x_{-q,-p} & \cdots & x_{-q,-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{-2,1} & 0 & \cdots & x_{-2,q} & x_{-2,-p} & \cdots & x_{-2,-1} \\ 0 & x_{-1,2} & \cdots & x_{-1,q} & x_{-1,-p} & \cdots & x_{-1,-1} \end{array}\right] \tag{2.1}$$

とかける．ただし，$x_{-j,-i} = -x_{i,j}$, $i,-j = 1,2,\dots,p,-q,-q+1,\dots,-2,-1$ である．サイズがそれぞれ $p\times q, p\times p, q\times q$ の行列 a,b,c を

$$X =: \begin{bmatrix} a & b \\ c & -J_q {}^t a J_p \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

で定め，さらに (2.2) の a,b,c の成分に次のように番号付ける:

$$a=\begin{bmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,q}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q}\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}b_{1,p} & \cdots & b_{1,2} & 0\\ \vdots & \iddots & 0 & -b_{1,2}\\ b_{p-1,p} & 0 & \iddots & \vdots\\ 0 & -b_{p-1,p} & \cdots & -b_{1,p}\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}c_{1,q} & \cdots & c_{q-1,q} & 0\\ \vdots & \iddots & 0 & -c_{q-1,q}\\ c_{1,2} & 0 & \iddots & \vdots\\ 0 & -c_{1,2} & \cdots & -c_{1,q}\end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

また $I\subset[p], J\subset[q]$ に対し，a,b,c の部分行列を

$$a^I_J := (a_{i,j})_{i\in I, j\in J},\quad b_I := (b_{i,j})_{i,j\in I},\quad c_J := (c_{i,j})_{i,j\in J}$$

で定める．このとき，b_I および c_J もまた反交代行列となることに注意．

定理 2.1 (パフィアンの和公式). $r=\min(p,q)$，ϵ を p のパリティ (すなわち p の偶奇に応じて 0 または 1) とする．$X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -J_q{}^t aJ_p\end{bmatrix}\in\mathfrak{o}_{2n}$ において，a,b,c を (2.3) のようにパラメトライズする．このとき，$\mathrm{Pf}\,(X)$ は次のように展開される：

$$\mathrm{Pf}\,(X)=\sum_{k=0}^{\lfloor r/2\rfloor}\sum_{\substack{I\subset[p],J\subset[q]\\ |\bar I|=|\bar J|=2k+\epsilon}}\mathrm{sgn}\left(\bar I, I\right)\mathrm{sgn}\left(\bar J, J\right)\det(a^{\bar I}_{\bar J})\,\mathrm{Pf}\,(b_I)\,\mathrm{Pf}\,(c_J). \tag{2.4}$$

ただし，$\mathrm{sgn}\left(\bar I, I\right)=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\ldots p\\ \bar I, I\end{pmatrix}$, $\mathrm{sgn}\left(\bar J, J\right)=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\ldots q\\ \bar J, J\end{pmatrix}$ とする．

証明の概略は以下の通り[*2]．まず 2-forms Ω を

$$\Omega := \sum_{i,j\in[p]\sqcup[-q]} e_i e_j x_{i,-j}\in\bigwedge^2\mathbb{C}^{2n}$$

で定義する[*3]．ただし，$\{e_i\}_i$ は $\mathbb{C}^{2n}$ の標準基底を表す．このとき，よく知られているように

$$\Omega^n = e_1\cdots e_p e_{-q}\cdots e_{-1}2^n n!\,\mathrm{Pf}\,(X)$$

[*2] ここでは外積代数を用いた証明を与えるが，余因子展開 (2.8) を繰り返し適用することにより証明することもできる (cf.[2]).

[*3] $u\wedge v\wedge\cdots\wedge w$ を，単に $uv\cdots w$ とかく．

が成り立つ．次に

$$\Xi := \sum_{i\in[p],j\in[q]} e_i e_{-j}\, a_{i,j}, \quad \Theta := \sum_{i,j\in[p]} e_i e_j\, b_{i,j}, \quad \Theta' := \sum_{i,j\in[q]} e_{-j} e_{-i}\, c_{i,j}$$

とおけば，明らかに

$$\Omega = \Theta' + 2\Xi + \Theta.$$

従って，三項展開定理により

$$\Omega^m = \sum_{\substack{h,s,t\geqslant 0\\ h+s+t=m}} \frac{m!}{h!s!t!} 2^h\, \Xi^h \Theta^s \Theta'^t \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

また $h, s, t = 0, 1, \ldots$ に対し，

$$\Xi^h = h! \sum_{\substack{I\subset[p],J\subset[q]\\ |I|=|J|=h}} e_I e_{-J} \det(a^I_J),$$

$$\Theta^s = 2^s s! \sum_{I\subset[p],|I|=2s} e_I \operatorname{Pf}(b_I), \tag{2.5}$$

$$\Theta'^t = 2^t t! \sum_{J\subset[q],|J|=2t} e_{-J} \operatorname{Pf}(c_J) \tag{2.6}$$

となる．ただし，簡単のため $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\}, J = \{j_1 < j_2 < \cdots j_s\}$ のとき，

$$e_I := e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_r} \quad \text{および} \quad e_{-J} := e_{-j_s} e_{-j_{s-1}} \cdots e_{-j_1}$$

とおいた．

これらを Ω^n に代入すると

$$\Omega^n = 2^n n! \sum_{\substack{h,s,t\geqslant 0\\ h+s+t=n}} \sum_{\substack{I_1,I\subset[p],J_1,J\subset[q]\\ |I_1|=|J_1|=h\\ |I|=2s,|J|=2t}} e_{I_1} e_I e_{-J_1} e_{-J} \det(a^{I_1}_{J_1}) \operatorname{Pf}(b_I) \operatorname{Pf}(c_J). \tag{2.7}$$

Ω^n は最高次なので，和 (2.7) で生き残るのは，$I_1 \sqcup I = [p]$ かつ $J_1 \sqcup J = [q]$ を満たす I_1, I, J_1, J に対応する項のみ．特に $h + 2s = p$ および $h + 2t = q$．そこで $h = 2k + \epsilon$ とおけば定理の式を得る．

注意 2.2. 交代行列 $A = (a_{i,j})_{i,j\in[2n]}$ と添字集合 $I \subset [2n]$ に対して，行および列の添え字がともに I に属する部分行列 $(a_{i,j})_{i,j\in I}$ を A_I で表す．$i, j \in [2n]$ に対し，パフィアンの (i, j)

余因子 $\gamma_{i,j}(A)$ は

$$\gamma_{i,j}(A) = \begin{cases} (-1)^{i+j-1}\,\mathrm{Pf}\left(A_{[1..\hat{i}..\hat{j}..2n]}\right) & \text{if } i < j, \\ 0 & \text{if } i = j, \\ (-1)^{i+j}\,\mathrm{Pf}\left(A_{[1..\hat{j}..\hat{i}..2n]}\right) & \text{if } i > j, \end{cases}$$

で定義される．ただし，$\hat{i}$ は i を除くことを意味する．このとき，行列式の場合と同様，次の展開公式が成り立つ:

$$\delta_{i,j}\,\mathrm{Pf}\,(A) = \sum_{k=1}^{2n} a_{i,k}\,\gamma_{j,k}(A). \tag{2.8}$$

(cf. [8].)

A のパフィアン余因子行列は，定義により，その (i,j) 成分が $\gamma_{i,j}(A)$ である $2n$ 次の交代行列であるが，それを $\hat{A}$ と記そう．このとき A が可逆ならば

$$\frac{\mathrm{Pf}\,(A_I)}{\mathrm{Pf}\,(A)} = \mathrm{sgn}\left(I,\bar{I}\right)\mathrm{Pf}\left((\hat{A}/\mathrm{Pf}\,(A))_{\bar{I}}\right) \tag{2.9}$$

が成り立つ．この式を使えば，[4, Theorem 3.5] に述べられたパフィアンの和公式は，p,q ともに偶数の場合の我々のパフィアンの和公式 (2.4) に一致することが直ちにわかる．ここで (2.9) が意味を持つためには $|I|$ が偶数でなければならないことに注意．

定理 2.1 で $p=q=n$ の場合をあらためて述べておこう．次節ではこれの非可換版，すなわち行列の成分が $U(\mathfrak{o}_{2n})$ の元である場合を考える．

系 2.3. $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -J_n\,{}^t a J_n \end{bmatrix} \in \mathfrak{o}_{2n}$ は定理と同様とする．ただし，a,b,c はすべて n 次の正方行列とする．このとき，$\mathrm{Pf}\,(X)$ は次のように展開される：

$$\mathrm{Pf}\,(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{\substack{I,J\subset[n] \\ |I|=|J|=2k}} \mathrm{sgn}\left(\bar{I},I\right)\mathrm{sgn}\left(\bar{J},J\right)\det(a^{\bar{I}}_{\bar{J}})\,\mathrm{Pf}\,(b_I)\,\mathrm{Pf}\,(c_J).$$

3 パフィアンの和公式 – 非可換な成分の場合 –

次に非可換な場合を考える．

$\boldsymbol{A} = (A_{i,j})$ をその成分 $A_{i,j}$ が非可換結合代数 $\mathscr{A}$ の元であるような $2n$ 次の交代行列とする．パフィアン $\mathrm{Pf}\,(\boldsymbol{A})$ は

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),\sigma(2)}A_{\sigma(3),\sigma(4)}\cdots A_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)}$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}\\ \sigma(2i-1)<\sigma(2i)}} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),\sigma(2)}A_{\sigma(3),\sigma(4)}\cdots A_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)}$$

で定義される．結合代数 $\mathscr{A}$ が可換ならば，上の定義は

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1),\sigma(2)}A_{\sigma(3),\sigma(4)}\cdots A_{\sigma(2n-1),\sigma(2n)}$$

に帰着する．ただし，和 $\sum_\sigma$ における σ は，次の条件を満たす $[2n]$ 上の置換全体をわたるものとする:

$$\sigma(2i-1) < \sigma(2i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{かつ} \quad \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1).$$

このとき，$g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ に対し，可換な場合と同様，非可換な場合でも

$$\mathrm{Pf}\left(gA\,{}^t g\right) = \det g\ \mathrm{Pf}(A)$$

が成り立つ ([5] を参照).

交代行列 $A = (A_{i,j})$ に対し，$\mathscr{A}$ 係数の 2-form Θ_A を

$$\Theta_A = \sum_{i,j\in[2n]} e_i e_j A_{i,j}$$

により定義すれば，$\mathrm{Pf}(A)$ と Θ_A の関係は次のようになる ([5, Proposition 1.1]):

$$\Theta_A{}^n = e_1 e_2 \cdots e_{2n}\, 2^n n!\, \mathrm{Pf}(A). \tag{3.1}$$

さて，普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_{2n})$ の元を成分にもつ $2n$ 次の反交代行列 X を

$$X = (X_{i,j})_{i,j\in[\pm n]} \quad \text{ただし} \quad X_{i,j} := E_{i,j} - E_{-j,-i} \in \mathfrak{o}_{2n} \subset U(\mathfrak{o}_{2n}) \tag{3.2}$$

で定める．$i, j, k, l \in [\pm n]$ に対し，$X_{i,j}$ の間の交換関係は

$$[X_{i,j}, X_{k,l}] = \delta_{j,k}X_{i,l} + \delta_{i,l}X_{-j,-k} - \delta_{j,-l}X_{i,-k} - \delta_{i,-k}X_{-j,l} \tag{3.3}$$

で与えられる．

定義により X は反交代的なので，XJ_{2n} のパフィアンが定義できるが，これを単に $\mathrm{Pf}(X)$ と書く．これは SO_{2n} の Adjoint 作用で不変で，$U(\mathfrak{o}_{2n})$ の中心 $ZU(\mathfrak{o}_{2n})$ に属する．実はパ

フィアン型の中心元は，直交リー環 $\mathfrak{o}_{2n}$ の実現によらず，すなわち，上の J_{2n} の代わりに任意の非退化対称行列 S をとっても構成できる (証明は，例えば [2] を参照)．(3.2) の行列 $\boldsymbol{X}$ に対し，普遍包絡環 $U(\mathfrak{o}_{2n})$ に係数を持つ 2-form を

$$\Omega = \sum_{i,j\in[\pm n]} e_i e_{-j} X_{i,j} \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n} \otimes U(\mathfrak{o}_{2n})$$

と定義すると，可換な場合と同様

$$\Omega^n = e_1 \cdots e_n e_{-n} \cdots e_{-1} 2^n n!\, \mathrm{Pf}\,(\boldsymbol{X})$$

が成り立つ．

可換な場合 (2.2) の $p = q = n$ のときのように，上の行列 $\boldsymbol{X}$ を

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -J_n {}^t a J_n \end{bmatrix}$$

とかく．ここで a, b, c はすべて n 次の正方行列で

$$a = \sum_{i,j\in[n]} E_{i,j} \otimes a_{i,j}, \quad b = \sum_{i,j\in[n]} E_{i,-j} \otimes b_{i,j}, \quad c = \sum_{i,j\in[n]} E_{-j,i} \otimes c_{i,j}, \tag{3.4}$$

ただし，

$$a_{i,j} = X_{i,j}, \quad b_{i,j} = X_{i,-j}, \quad c_{i,j} = X_{-j,i} \tag{3.5}$$

とおいた．$i, j, k, l \in [n]$ に対し，(3.3) と (3.5) より，$a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ の間の交換関係は

$$\begin{aligned}
[a_{i,j}, a_{k,l}] &= \delta_{j,k} a_{i,l} - \delta_{l,j} a_{k,j}, \\
[a_{i,j}, b_{k,l}] &= \delta_{j,k} b_{i,l} - \delta_{j,l} b_{i,k}, \\
[a_{i,j}, c_{k,l}] &= \delta_{i,k} c_{l,j} - \delta_{i,l} c_{k,j}, \\
[b_{i,j}, c_{k,l}] &= \delta_{j,l} a_{i,k} + \delta_{i,k} a_{j,l} - \delta_{i,l} a_{j,k} - \delta_{j,k} a_{i,l}, \\
[b_{i,j}, b_{k,l}] &= [c_{i,j}, c_{k,l}] = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

で与えられる．

注意 3.1. $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i\in[n]} \mathbb{C} a_{i,i}$ とおくと，これは $\mathfrak{o}_{2n}$ の Cartan 部分代数で，各 $b_{i,j}$ は正ルート $\epsilon_i + \epsilon_j$ のルートベクトルとなることに注意．ただし，$\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ は $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n, -h_n, \ldots, -h_1)$ を h_i に写す $\mathfrak{h}$ 上の線形形式である．この他の正ルートとして，$\epsilon_i - \epsilon_j$，$i < j$，がとれ，そのルートベクトルは $a_{i,j}$ となる．実際，$\mathfrak{l} := \bigoplus_{i,j\in[n]} \mathbb{C} a_{i,j}$, $\mathfrak{u} := \bigoplus_{i,j\in[n], i<j} \mathbb{C} b_{i,j}$，$\mathfrak{q} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ とおけば，$\mathfrak{q}$ は極大放物型部分代数で，$\mathfrak{l}$ および $\mathfrak{u}$ はその Levi 因子およびベキ零根基である．また，$\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{gl}_n$ に同型であり，$\mathfrak{u}$ および $\mathfrak{u}^- := \bigoplus_{i,j\in[n], i<j} \mathbb{C} c_{i,j}$ は可換な部分代数となる．(例えば [1, 6] を参照)．

行列 X の色付け (3.4) に対応して,

$$\Xi := \sum_{i,j\in[n]} e_i e_{-j}\, a_{i,j}, \quad \Theta := \sum_{i,j\in[n]} e_i e_j\, b_{i,j}, \quad \Theta' := \sum_{i,j\in[n]} e_{-j} e_{-i}\, c_{i,j}$$

とおくと,明らかに

$$\Omega = \Theta' + 2\Xi + \Theta$$

となる.

補題 3.2. Ξ, Θ, Θ' の間の交換関係は

$$[\Theta, \Theta'] = 4\tau\Xi, \quad [\Theta, \Xi] = 2\tau\Theta, \quad [\Theta', \Xi] = -2\tau\Theta'$$

で与えられる.ただし,$\tau = \sum_{i\in[n]} e_i e_{-i}$.

補題 3.2 により,2-forms Ξ, Θ, Θ' は [5, Lemma 4.1] とまったく同じ交換関係 (本質的に $\mathfrak{sl}_2$ のそれ) を満たす.従ってそこでの議論より,次の命題 (三項展開定理) を得る (詳細は [5, Lemma 4.5] を参照).

命題 3.3. $m = 0, 1, 2, \ldots$ に対し,

$$\Omega^m = \sum_{\substack{p,q,r\geqslant 0\\ p+q+r=m}} \frac{m!}{p!q!r!} 2^r\, \Xi^{(r)}(q-p+r-1)\Theta'^p\Theta^q$$

が成り立つ.ただし,$u \in \mathbb{C}$ および非負整数 $r = 0, 1, 2, \ldots$ に対し,

$$\Xi(u) := \Xi + u\tau \quad \text{および} \quad \Xi^{(r)}(u) := \Xi(u)\Xi(u-1)\cdots\Xi(u-r+1)$$

とおいた.

さらに $j \in [n]$ と $u \in \mathbb{C}$ に対し,1-form $\eta_j(u)$ を

$$\eta_j(u) = \sum_{i\in[n]} e_i a_{i,j}(u)$$

で定める.ただし $a_{i,j}(u) := a_{i,j} + u\delta_{i,j}$.これらはパラメータ u のシフトまで込めれば反可換,すなわち

$$\eta_i(u+1)\eta_j(u) + \eta_j(u+1)\eta_i(u) = 0 \quad (i, j \in [n])$$

であり (cf. [5, Lemma 2.1]), また,

$$\Xi(u) = \sum_{j\in[n]} \eta_j(u) e_{-j} \tag{3.7}$$

を満たす.

可換な成分をもつ場合と同様, $I, J \subset [n]$ に対し, a, b, c の部分行列を

$$a_J^I := (a_{i,j})_{i\in I, j\in J}, \quad b_I := (b_{i,j})_{i,j\in I}, \quad c_J := (c_{i,j})_{i,j\in J}$$

とおく.

以上の記号の下に, まず, 命題 3.3 の三項展開定理の右辺に現れる Ξ のべき乗について, 次が成り立つ (cf. [5, Proposition 2.6]).

命題 3.4. $r = 0, 1, 2, \ldots$ とパラメータ $u \in \mathbb{C}$ に対し,

$$\Xi^{(r)}(u + r - 1) = r! \sum_{\substack{I,J\subset[n] \\ |I|=|J|=r}} e_I e_{-J} \det\left(a_J^I + \mathbb{1}_J^I \operatorname{diag}(u + r - 1, u + r - 2, \ldots, u)\right).$$

ただし, $\mathbb{1}$ は n 次の単位行列を表す.

また Θ, Θ' のべき乗については, (2.5), (2.6) より次が成り立つ:

補題 3.5. $p, q = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$\Theta^p = 2^p p! \sum_{I\subset[n], |I|=2p} e_I \operatorname{Pf}(b_I),$$
$$\Theta'^q = 2^q q! \sum_{J\subset[n], |J|=2q} e_{-J} \operatorname{Pf}(c_J).$$

これらを命題 3.3 の右辺に代入すれば次の定理を得る:

定理 3.6. 行列 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -J_n{}^t a J_n \end{bmatrix}$ を, (3.2) で定義される, $U(\mathfrak{o}_{2n})$ の元を成分にもつ反交代行列とする. ただし, a, b, c は (3.4) および (3.5) で与えられるものとする. このとき

$$\operatorname{Pf}(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{\substack{I,J\subset[n] \\ |I|=|J|=2k}} \operatorname{sgn}\left(\bar{I}, I\right) \operatorname{sgn}\left(\bar{J}, J\right) \det\left(a_{\bar{J}}^{\bar{I}} + \mathbb{1}_{\bar{J}}^{\bar{I}}\, \rho(|\bar{J}|)\right) \operatorname{Pf}(c_J) \operatorname{Pf}(b_I) \tag{3.8}$$

が成り立つ. ただし $\rho(j)$ は対角行列 $\operatorname{diag}(j - 1, j - 2, \ldots, 1, 0)$ を表す.

定理 3.6 より，中心元 Pf (X) の，最高ウェイト $\lambda = \sum_i \lambda_i \epsilon_i$ をもつ最高ウェイト加群上の固有値を簡単に計算できる．実際，最高ウェイトベクトル，それを v_λ とするとき，Pf (X) を v_λ にほどこせば，注意 3.1 より各 $b_{i,j}$ は正ルートベクトルだから，和 (3.8) で生き残るのは $I = J = \emptyset$ の項のみ．従って，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pf}\,(X)\, v_\lambda &= \det(a + \rho(n)) v_\lambda \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}\,(\sigma) a_{\sigma(1),1}(n-1) a_{\sigma(2),2}(n-2) \cdots a_{\sigma(n),n}(0) v_\lambda \\
&= (\lambda_1 + n - 1)(\lambda_2 + n - 2) \cdots \lambda_n\, v_\lambda
\end{aligned}
$$

となる．

系 3.7. 中心元 Pf $(X) \in ZU(\mathfrak{o}_{2n})$ の最高ウェイト $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_i$ の最高ウェイト加群上の固有値は $\prod_{i=1}^n (\lambda_i + n - i)$ で与えられる．

謝辞

著者はこの研究集会において大きな恩恵に浴することができた．この場をお借りして，この集会を企画・開催された梅田先生をはじめ，熱心にご議論いただいた参加者の方々に，心より感謝の意を表したい．

参考文献

[1] R. Goodman and N. W. Wallach, *Representations and invariants of the classical groups*, Encyclopedia of Math. its Appl., vol. 68, Cambridge Univ. Press, 1998.

[2] T. Hashimoto, *A central element in the universal enveloping algebra of type* D_n *via minor summation formula of Pfaffians*, arXiv:math.RT/0602055.

[3] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.

[4] M. Ishikawa and M. Wakayama, *Application of minor summation formula III, Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities*, J. Comb. Theory A **113** (2006), 113–155.

[5] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebra*, Compositio Math. **127** (2001), 333–359.

[6] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction, 2nd edition*, PM, vol. 140, Birkhäuser, 2002.

[7] A. Molev and M. Nazarov, *Capelli identities for classical Lie algebras*, Math. Ann. **313** (1999), 315–357.

[8] 広田良吾, **直接法によるソリトンの数理**, 岩波書店, 1992, 東京, (英訳: The direct method in soliton theory, Cambridge Tracts in Math. vol.155, Cambridge Univ. Press, 2004, Cambridge).

[9] 和地輝仁, *D* **型リー代数の包絡環の** *split* **した実現における中心元.**