数理解析研究所講究録
1509巻 2006年 51-61

複素領域における非線型偏微分方程式の正則解の存在について

上智大・理工　　田原 秀敏 (Hidetoshi TAHARA)
(Department of Mathematics, Sophia University, Tokyo)

本稿では, 複素領域における非線型偏微分方程式

$$\text{(E)} \qquad \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u = F\Big(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{\substack{j+|\alpha|\le m \\ j<m}}\Big)$$

の正則解の存在について論じる.「今迄に得られている結果」の解説のみでなく,「どのようなケースが研究されずに残っているか」の部分もあわせて説明しておきたい. 記述を簡単にするために, 本稿では $(t,x)\in \boldsymbol{C}^2$ の場合のみ論じる.

1. 方程式の定式化

$m\in \boldsymbol{N}^*(=\{1,2,\cdots\})$, $(t,x)\in \boldsymbol{C}_t\times \boldsymbol{C}_x$, $N=m(m+3)/2$,

$$Z=\{Z_{j,\alpha}\}_{\substack{j+\alpha\le m \\ j<m}}\in \boldsymbol{C}^N$$

(ただし $(j,\alpha)\in \boldsymbol{N}^2(=\{0,1,2\ldots\}^2)$) とし, $F(t,x,Z)$ を複素変数 (t,x,Z) $\in \boldsymbol{C}_t\times \boldsymbol{C}_x\times \boldsymbol{C}_Z^N$ についての関数で次の条件をみたすものとする.

A$_1$)　$F(t,x,Z)$ は 原点 (0,0,0) の近傍で正則;

A$_2$)　$x=0$ の近傍で $F(0,x,0)\equiv 0$.

このとき, $u\,(=u(t,x))$ を未知関数とする次の形の非線型偏微分方程式

$$\text{(E)} \qquad \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u = F\Big(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{\substack{j+\alpha\le m \\ j<m}}\Big)$$

を考える. 次の2つの問題が基本的であろう.

問題1　方程式 (E) の解の存在 (特に正則解の存在) を論じよ.
問題2　方程式 (E) の解の一意性を論じよ.

2．研究の現状

ここでは現時点（１９９９年１２月）での研究の状況を先に概観しておく．

2.1. 方程式の展開

$F(t,x,Z)$ が 条件 A_1), A_2) をみたすと仮定する．このとき，$F(t,x,Z)$ を (t,Z) について Taylor 展開すると

$$F(t,x,Z) = a(x)\,t + \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} b_{j,\alpha}(x)\,Z_{j,\alpha} + \sum_{p+|\nu|\ge 2} g_{p,\nu}(x)\,t^p Z^\nu \tag{2.1}$$

と表される．ここでは

$$\nu = \{\nu_{j,\alpha}\}_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} \in \boldsymbol{N}^N, \quad |\nu| = \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} \nu_{j,\alpha}, \quad Z^\nu = \prod_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} (Z_{j,\alpha})^{\nu_{j,\alpha}}$$

とした．また，係数 $a(x)$, $b_{j,\alpha}(x)$, $g_{p,\nu}(x)$ はすべて 原点 $x=0\in\boldsymbol{C}$ の近傍 D での正則関数で，D は j,α,p,ν には無関係にとれる．

簡単のため

$$C\Big(x, t\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m - \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} b_{j,\alpha}(x)\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha, \tag{2.2}$$

$$Du = \{D_{j,\alpha}u\}_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}}, \qquad D_{j,\alpha}u = \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u,$$

$$R_2(t,x,Du) = \sum_{p+|\nu|\ge 2} g_{p,\nu}(x)\,t^p (Du)^\nu$$

とおく．このとき，方程式 (E) は次の様に書ける．

$$C\Big(x, t\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\Big)u = a(x)\,t + R_2(t,x,Du) \tag{E}$$

2.2. 方程式の場合分け

$$\begin{aligned} I &= \{(j,\alpha)\in\boldsymbol{N}^2; j+\alpha\le m, j<m\},\\ I_+ &= \{(j,\alpha)\in I; \alpha>0\}. \end{aligned}$$

とおく．(2.1)（または (2.2)）の係数 $b_{j,\alpha}(x)$ をもとにして 方程式 (E) を大雑把に分類すると，次の３つの場合に分けられる．

Case(1) すべての $(j,\alpha)\in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(x)\equiv 0$;
Case(2) ある $(j,\alpha)\in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(0)\neq 0$;
Case(3) すべての $(j,\alpha)\in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(0)=0$ だが，ある $(j,\alpha)\in I_+$ に対しては $b_{j,\alpha}(x)\not\equiv 0$.

2.3. 研究の現状

Case(1) の場合は, 方程式の線型部分 $C(x, t\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ は $C(x, t\partial/\partial t)$ という常微分作用素に他ならない. この場合は, 正則解については Gérard-Tahara [4], [6] で, 解の一意性については Tahara [7], [8] で詳しく調べられた.

Case(2) の場合は, 正則解については Gérard-Tahara [5] で調べられたが, 解の一意性については面白い結果は知られていない. Gérard-Tahara [5] で扱かわれたのは, Case(2) の内の $l+\mu=m$ (意味は第 4 節に述べてある) のケースで, $l+\mu<m$ のケースは未開拓に等しい.

Case(3) の場合は, 正則解については Chen-Tahara [1], [2] で一部論じられた. 解の一意性については 未開拓. Chen-Tahara [1], [2] で扱かわれたのは, Case(3) の内で 確定特異点もどきの場合のみで, それ以外のケースは未開拓である. Chen 氏によると, 中国の Wuhan (武漢) の学生がこの辺を何やら調べているそうである.

分かり易く表で表すと次のとおりである.

ケース	解の存在について (正則解など)	解の一意性について
Case(1)	Gérard-Tahara [4], [6]	Tahara [7], [8]
Case(2)	$l+\mu=m$ のとき Gérard-Tahara [5] $l+\mu<m$ のとき ???	???
Case(3)	確定特異点もどきの場合 Chen-Tahara [1], [2] それ以外のとき ???	???

注 1) Chen-Tahara [1],[2] では, Case(1) を「nonlinear Fuchsian type」, Case(2) と Case(3) を「nonlinear totally characteristic type」と呼んでいるが, この命名が妥当かどうかは不明.
注 2) Case(3) の確定特異点もどきの場合というのは, (2.2) の方程式の線型部分 $C(x, t\partial/\partial t, \partial/\partial x)$ が $L(x, t\partial/\partial t, x\partial/\partial x)$ という形に書ける場合をいう.
注 3) ??? は未開拓の意味. 未開拓とは「良い理論があるのか, どうしようもない場合なのか, それも不明」という意味である. ただし筆者は「未開拓の中に, 良い理論の成り立つケースが多くある」と信じている.

3. Case (1) について

Case (1) の場合について, 結果をまとめておく. Case (1) ならば, すべての $(j,\alpha) \in I_+$ に対して $b_{j,\alpha}(x) \equiv 0$ が成り立っている. 従って, 方程式 (E) は次の様に書けている.

$$\text{(E)} \qquad \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u - \sum_{j<m} b_{j,0}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u = a(x)\,t + R_2(t,x,Du).$$

3.1. 正則解について

正則解の存在については次の結果が基本的である.

$$C(x,\lambda) = \lambda^m - \sum_{j<m} b_{j,0}(x)\,\lambda^j$$

とおく. $C(x,\lambda) = 0$ の根を $\lambda_1(x),\ldots,\lambda_m(x)$ とおき, これを (E) の特性指数と呼ぶ.

定理 1 (Gérard-Tahara [4]) A_1),A_2) および Case(1) の条件を仮定する. もしも $j = 1,\ldots,m$ に対して $\lambda_j(0) \notin \{1,2,\ldots\}$ が成り立つならば, 方程式 (E) は原点 $(0,0) \in \boldsymbol{C}^2$ の近傍での正則解 $u(t,x)$ で $u(0,x) \equiv 0$ となるものをただ一つ持っている.

3.2. 解の一意性について

解の一意性については, 最も基本的と思われる結果をひとつ掲げておく.

定義 1 次の 1),2) をみたす関数 $u(t,x)$ の全体を $\mathcal{S}_{log}(+)$ で表す.

1) ある $\varepsilon > 0, \theta > 0, \delta > 0$ があって, $u(t,x)$ は 領域 $\{(t,x) \in \mathcal{R}(\boldsymbol{C}_t \setminus \{0\}) \times \boldsymbol{C}_x\,;\, 0 < |t| < \varepsilon, |\arg t| < \theta, |x| \le \delta\}$ での正則関数であって,

2) ある正数 $a > 0$ があって, $|\arg t| < \theta$ のもとで $t \longrightarrow 0$ のとき

$$\max_{|x|\le\delta} |u(t,x)| = O\left(\frac{1}{|\log t|^a}\right)$$

が成り立つ.

ここで, $\mathcal{R}(\boldsymbol{C}_t \setminus \{0\})$ は $\boldsymbol{C}_t \setminus \{0\}$ の普遍被覆面を表す.

定理 2 (Tahara [7]) A_1),A_2) および Case(1) の条件を仮定する. もしも $j = 1,\ldots,m$ に対して $\mathrm{Re}\,\lambda_j(0) < 0$ が成り立つならば, 方程式 (E) に対し $\mathcal{S}_{log}(+)$ の中で 解の一意性が成り立つ.

注) $t(\partial u/\partial t) = u(\partial u/\partial x)$ は, $\lambda \equiv 0$ であり, $u \equiv 0$ 以外に $u(t,x) = (x+a)/(c-\log t)$ (ただし $a,c \in \boldsymbol{C}$ は任意定数) という形の解をもっている. この例では, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ であり, 「$\mathcal{S}_{log}(+)$ の中での解の一意性は成り立たない」.

4. Case (2) について

Case (2) の場合について, 結果をまとめておく. もともとの方程式は

$$\Bigl(t\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^m u - \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} b_{j,\alpha}(x)\Bigl(t\frac{\partial}{\partial t}\Bigr)^j\Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)^\alpha u = a(x)\,t + R_2(t,x,Du)$$

であった. これに対して $\mathcal{J}$ を次のようにおく.

$$\mathcal{J} = \{(j,\alpha); \alpha > 0 \text{ で } b_{j,\alpha}(x) \not\equiv 0\}$$

4.1. 結果（正則解の存在定理）

$\mathcal{J} \neq \emptyset$ とする. μ と l を

$$\begin{aligned} \mu &= \max\{\alpha; (j,\alpha) \in \mathcal{J}\}\ (\ge 1), \\ l &= \max\{j; (j,\mu) \in \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

とおく. そして,

$$\sum_{j\le l} b_{j,\mu}(0)\,\lambda^j = 0 \tag{4.1}$$

という方程式を考える. もしも $b_{l,\mu}(0) \neq 0$ ならば, この方程式は l 次の多項式であり, その根として, l 個の複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ が決まる. 次の結果が成り立つ.

定理 3 (Gérard-Tahara [5]) A_1),A_2) および

1) $\mathcal{J} \neq \emptyset$,
2) $l + \mu = m$ (よって $l = m - \mu$),
3) $b_{l,\mu}(0) \neq 0$ (つまり $b_{m-\mu,\mu}(0) \neq 0$),
4) (4.1) の根について $\lambda_1, \dots, \lambda_l \not\in \{1, 2, \dots\}$

を仮定する. このとき, $\phi_k(0) = 0$ $(k = 0, 1, \dots, \mu-1)$ をみたす任意の正則関数 $\phi_0(t), \dots, \phi_{\mu-1}(t)$ に対して, 方程式 (E) は原点 $(0,0) \in \boldsymbol{C}^2$ の近傍での正則解 $u(t,x)$ で 次の i),ii) をみたすものをただ一つ持っている.

$$\begin{aligned} &i) \quad u(0,x) \equiv 0, \\ &ii) \quad \Bigl(\frac{\partial}{\partial x}\Bigr)^k u\Big|_{x=0} = \phi_k(t) \quad (k = 0, 1, \dots, \mu - 1). \end{aligned}$$

4.2. 証明のスケッチ

< 4.2.1. 方程式の reduction >

$u(t,x)$ の代りに

$$w(t,x) = u(t,x) - \sum_{k=0}^{\mu-1} \phi_k(t)\,\frac{x^k}{k!}$$

を考えることにすれば, 初めから

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u\Big|_{x=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, \mu-1) \tag{4.2}$$

の場合のみ考えればよい. 以下, (4.2) のケースを論じる.

μ と l の定義より, $\mu \geq 1$ であり, 方程式は次の形に書けている.

$$\begin{aligned}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u - \sum_{j\leq l} b_{j,\mu}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\mu u \\ - \sum_{\substack{j+\alpha\leq m\\ j<m,\alpha<\mu}} b_{j,\alpha}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u = a(x)\,t + R_2(t,x,Du).\end{aligned} \tag{4.3}$$

今, $U(t,x) = (\partial/\partial x)^\mu u$ とおいて, u に関する方程式 (4.3) を U に関する方程式に書き換えてみる. (4.2) のもとでは

$$u = D_x^{-\mu}U \qquad \left(ただし\ (D_x^{-1}f)(t,x) = \int_0^x f(t,y)\,dy\right)$$

と表される. よって 積分作用素 $D_x^{-\mu}$ を使うと, 方程式 (4.3) は次の形に変換される.

$$\begin{aligned}-\sum_{j\leq l} b_{j,\mu}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j U \\ + \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^m D_x^{-\mu}U - \sum_{\substack{j+\alpha\leq m\\ j<m,\alpha<\mu}} b_{j,\alpha}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j D_x^{\alpha-\mu}U \\ = a(x)\,t + R_2\left(t,x,\left\{\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j D_x^{\alpha-\mu}U\right\}_{\substack{j+\alpha\leq m\\ j<m}}\right).\end{aligned} \tag{4.4}$$

仮定より, $b_{l,\mu}(0) \neq 0$ であったから, 全体を $-b_{l,\mu}(x)$ で割っておき, $\beta = \alpha - \mu$ とおくと, $\beta \in \boldsymbol{Z}$, $j + \alpha - \mu = j + \beta \leq m - \mu = l$ であり, 方程式 (4.4) は次の形に書ける.

$$\begin{aligned}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^l U + c_1(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{l-1} U + \cdots + c_l(x)U \\ + \sum_{\substack{j+\beta\leq l\\ \beta<0\\ finite}} c_{j,\beta}(x)\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j D_x^\beta U\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$= a(x)\,t + R_2\Big(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j D_x^\beta U\Big\}_{\substack{j+\beta\le l\\ finite}}\Big).$$

< 4.2.2. 方程式 (4.5) に対する結果 >

結局, 定理 3 は方程式 (4.5) に対する次の結果に帰着された. (4.5) の特性指数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ を方程式

$$\lambda^l + c_1(0)\lambda^{l-1} + + \cdots + c_l(0) = 0$$

の根で定義する.

命題 1 (Gérard-Tahara [6]) もしも $j = 1, \ldots, l$ に対して $\lambda_j \notin \{1, 2, \ldots\}$ が成り立つならば, 方程式 (4.5) は原点 $(0,0) \in \boldsymbol{C}^2$ の近傍での正則解 $U(t,x)$ で $U(0,x) \equiv 0$ となるものをただ一つ持っている.

方程式 (4.5) は D_x^{-1} という積分を含んでいる. 「この様な積分-偏微分方程式をどう扱うか」については, Gérard-Tahara [6] の Chapter 10 に書かれている.

5. Case (3) について

Case (3) の場合で「確定特異点もどきのケース」について, その結果をまとめておく. もともとの方程式は

$$\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u - \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} b_{j,\alpha}(x)\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u = a(x)\,t + R_2(t, x, Du)$$

であった. ここでは次の仮定のもとで論じる.

c_1) $\qquad b_{j,\alpha}(x) = O(x^\alpha) \quad (x \longrightarrow 0$ のとき)

5.1. 結果（正則解の存在定理）

c_1) のもとでは, $b_{j,\alpha}(x) = x^\alpha c_{j,\alpha}(x)$ と書ける. $\mathcal{L}(x,\lambda,\rho)$ と $L(\lambda,\rho)$ を次の様におく.

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\rho) = \lambda^m - \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} c_{j,\alpha}(x)\lambda^j\rho(\rho-1)\cdots(\rho-\alpha+1),$$

$$L(\lambda,\rho) = \mathcal{L}(0,\lambda,\rho) = \lambda^m - \sum_{\substack{j+\alpha\le m\\ j<m}} c_{j,\alpha}(0)\lambda^j\rho(\rho-1)\cdots(\rho-\alpha+1).$$

定理 4 (Chen-Tahara [2]) A_1),A_2) および c_1) を仮定する. もしも, ある定数 $\sigma > 0$ が存在して,

(5.1) $$|L(k,l)| \ge \sigma(k+l+1)^m, \qquad (k,l) \in \boldsymbol{N}^* \times \boldsymbol{N}$$

(ただし $N^* = \{1, 2, \ldots\}$, $N = \{0, 1, \ldots\}$) が成り立つならば, 方程式 (E) は原点 $(0,0) \in C^2$ の近傍での正則解 $u(t,x)$ で $u(0,x) \equiv 0$ となるものをただ一つ持っている.

注) (5.1) のタイプの条件は ふつう 「Poincaré 条件」といわれる.

5.2. 証明のスケッチ

ここでは, 形式的べき級数 $f(t,x) = \sum_{i,j} f_{i,j}\, t^i x^j \in C[[t,x]]$ に対して $|f|(t,x)$ と $S(f)(t,x)$ (この S を shift operator という) を次で定義する.

$$|f|(t,x) = \sum_{i,j} |f_{i,j}|\, t^i x^j,$$
$$S(f)(t,x) = \sum_{i,j} f_{i,j+1}\, t^i x^j.$$

< 5.2.1. 形式解の構成 >

A_1),A_2), c_1) のもとでは, 方程式 (E) は

$$\mathcal{L}\Big(x, t\frac{\partial}{\partial t}, x\frac{\partial}{\partial x}\Big)u = a(x)\,t + R_2\Big(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{(j,\alpha)\in I}\Big) \tag{5.2}$$

と書ける. 左辺の $\mathcal{L}$ の中では $x\partial/\partial x$ がひとつの単位として入っているが, 右辺の R_2 の中では $\partial/\partial x$ のままである.

形式解を

$$u(t,x) = \sum_{k\geq 1} u_k(x)\,t^k, \quad u_k(x) \in C[[x]] \ (k \geq 1) \tag{5.3}$$

とおき, これを 方程式 (5.2) に代入すると

$$\mathcal{L}\Big(x, k, x\frac{\partial}{\partial x}\Big)u_k = f_{k-1}\Big(x, \Big\{p^j \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u_p\,;\, 1 \leq p \leq k-1, (j,\alpha) \in I\Big\},\Big) \tag{5.4}$$

という形の漸化式が得られる. ここで $f_0 = a(x)$ であり, $k \geq 2$ のとき f_{k-1} は $u_1, \ldots, u_{k-1}$ から決まるものである. (5.4) は

$$L\Big(k, x\frac{\partial}{\partial x}\Big)u_k = f_{k-1}$$
$$+x \sum_{(j,\alpha)\in I} S(c_{j,\alpha})(x)\,k^j \Big(x\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(x\frac{\partial}{\partial x} - 1\Big)\cdots\Big(x\frac{\partial}{\partial x} - \alpha + 1\Big)u_k$$

と表されるので, $f_{k-1} \in C[[x]]$ が既知ならば 解 $u_k \in C[[x]]$ は一意的に解ける. これより (5.3) の形の形式解が一意的に得られることが分かった.

< 5.2.2. 形式解の収束性について >

もともとの方程式 (5.2) は

$$(5.5)\qquad L\Big(t\frac{\partial}{\partial t}, x\frac{\partial}{\partial x}\Big)u$$

$$= x\sum_{(j,\alpha)\in I} S(c_{j,\alpha})(x)\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(x\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(x\frac{\partial}{\partial x}-1\Big)\cdots\Big(x\frac{\partial}{\partial x}-\alpha+1\Big)u$$

$$+a(x)\,t + R_2\bigg(t, x, \Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{(j,\alpha)\in I}\bigg)$$

であった. これの優級数の方程式として, 次を考えるのは自然であろう.

$$(5.6)\qquad \sigma Y = x\sum_{(j,\alpha)\in I}|S(c_{j,\alpha})|\,(x)\,Y$$

$$+|a|(x)\,t + |R_2|\bigg(t, x, \Big\{1^j S^\alpha(Y)\Big\}_{(j,\alpha)\in I}\bigg).$$

命題 2　(5.1) の Poincaré 条件を仮定する. 次が成り立つ.

(1) (5.5) の形式解を $u(t,x)$, (5.6) の形式解を $Y(t,x)$ とすると $u \ll Y$ が成り立つ.

(2) もっと詳しくは,

$$u = \sum_{k\geq 1, l\geq 0} u_{k,l}\,t^k x^l, \qquad Y = \sum_{k\geq 1, l\geq 0} Y_{k,l}\,t^k x^l$$

とおくと

$$(k+l+1)^m |u_{k,l}| \leq |Y_{k,l}|, \qquad (k,l)\in \boldsymbol{N}^* \times \boldsymbol{N}$$

が成り立つ.

この命題より $u(t,x)$ の収束性を得るには $Y(t,x)$ の収束性を言えばよい.

< 5.2.3. $Y(t,x)$ の収束性について >

$Y(t,x)$ の形は

$$Y = \sum_{k\geq 1, l\geq 0} Y_{k,l}\,t^k x^l$$

となっていた. $k \geq 1$ という条件を利用して $Y(t,x)$ の収束性を示そう.

$$W(\rho) = \rho \sum_{k\geq 1, l\geq 0} Y_{k,l}\,\rho^{(2m+1)(k-1)+l}$$

とおくと, $Y(\rho^{2m+1},\rho) = \rho^{2m}W(\rho)$, $W(0)=0$ で「 $W(\rho)$ が収束すれば $Y(t,x)$ も収束する」. 従って 問題は $W(\rho)$ の収束性の証明にある. (5.6) の中の shift operator の処理には次の命題を使う.

命題 3　次が成り立つ.

$$S^{\alpha}(Y)(\rho^{2m+1},\rho) \ll \rho^{m+(m-\alpha)}W(\rho) = O(\rho^m)W(\rho).$$

これと (5.6) から次を導くことは易しい.

$$\sigma\rho^{2m}W \ll \rho C(\rho)\rho^{2m}W + |a|(\rho)\rho^{2m+1} + |R_2|\left(\rho^{2m+1},\rho,\{\rho^{m+(m-\alpha)}W\}_{(j,\alpha)\in I}\right).$$

両辺から ρ^{2m} をキャンセルすると

$$\sigma W \ll \rho C(\rho)W + |a|(\rho)\rho + G_2(\rho,W)$$

という形の不等式を得る. ここで

$$G_2(\rho,W) = \frac{1}{\rho^{2m}}|R_2|\left(\rho^{2m+1},\rho,\{\rho^{m+(m-\alpha)}W\}_{(j,\alpha)\in I}\right)$$

であり, $G_2(\rho,W)$ は (ρ,W) の正則関数で その Taylor 展開は (ρ,W) について 2 次以上の項のみから出来ている. 結局のところ,

$$\sigma Z = \rho C(\rho)Z + |a|(\rho)\rho + G_2(\rho,Z), \qquad Z(0) = 0 \tag{5.7}$$

という関数方程式を考えると, その形式解 $Z(\rho)$ は $W(\rho) \ll Z(\rho)$ をみたすことが分かる. よって 問題は $Z(\rho)$ の収束性の証明に帰着された.

< 5.2.4. $Z(\rho)$ の収束性の証明 >

関数方程式 (5.7) に陰関数の定理を使うと「(5.7) は $\rho = 0$ の近傍での正則解 $Z = Z^*(\rho)$ をただ一つ持っている」ことが分かる. 形式的に計算してみると, 形式解 $Z(\rho)$ はただ一つであることが分かるので, それは正則解 $Z^*(\rho)$ を展開したものに他ならない. これで, 形式解 $Z(\rho)$ の収束性が証明された.

参考文献

[1] H. Chen and H. Tahara : *On the holomorphic solution of non-linear totally characteristic equations,* Preprint 98/20, Institut für Mathematik, Potsdam, 1998.

[2] H. Chen and H. Tahara : *On totally characteristic type non-linear partial differential equations in the complex domain,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 35 (1999), 621-636.

[3] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 26 (1990), 979-1000.

[4] R. Gérard and H. Tahara : *Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 121-151.

[5] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular partial differential equations, II.* " Structure of differential equations, Katata/Kyoto, 1995 " (edited by Morimoto-Kawai), 135-150, World Scientific, 1996.

[6] R. Gérard and H. Tahara : *Singular nonlinear partial differential equations,* Aspects of Mathematics, E 28, Vieweg-Verlag, 1996

[7] H. Tahara : *Uniqueness of the solution of non-linear singular partial differential equations,* J. Math. Soc. Japan, 48 (1996), 729-744.

[8] H. Tahara : *On the uniqueness theorem for nonlinear singular partial differential equations,* J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 5 (1998), 477 - 506.