数理解析研究所講究録
1511巻 2006年 74-81

Euler積で定義されるL関数の Siegel-Tatuzawaの定理について

市原由美子 (Yumiko Ichihara)
広島大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Hiroshima University

1 導入

Dirichlet 指標χが実指標でないとき、Dirichlet L関数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{s}}$$

に対して、正定数Cが存在し、次の zero-free region が与えられている。

$$\sigma>1-\frac{C}{\log(d(|t|+2))},\quad s=\sigma+it$$

χが実指標の時は、実軸において高々1つの例外の零点 (Siegelの零点) を除けば、同様の主張が証明される。ここではSiegelの零点の問題についての Siegel-Tatuzawaの定理について考察を述べる。従って、今後指標は全て実の Dirichlet 指標として、話を進める。

さて、Siegelによって次のような結果が示されている。

定理 (Siegel, 1935, [2] 参照)
任意の$\varepsilon>0$に対して、**non-effective** な正定数$C(\varepsilon)$が存在し、次を満たす。

$$L(1,\chi)>\frac{C(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}.$$

ここでχは任意の実 Dirichlet 指標で、dは指標の導手とする。
(non-effectiveとは、定数$C(\varepsilon)$は理論上存在は証明できるが、その証明方法から値を計算することはできないことを意味する。)

この主張から、実指標の場合に **non-effective** な正定数$C(\varepsilon)$で、実軸における Dirichlet L関数の zero-free region

$$\sigma>1-\frac{C(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}$$

を与えることができる。

我々は、effective な定数で zero-free region を与えることで、Siegel の零点が存在しないことを示したい。しかし、これは現在も解決していない大問題である。ただ、Tatuzawa によって、例外を含んだ状態なら、effective な定数で Siegel の定理の主張がいえることが示されている。

定理 (Tatuzawa, 1951, [13])
任意の $\varepsilon > 0$ に対して、**effective** な正定数 $C(\varepsilon)$ が存在し、次を満たす。

$$L(1,\chi) > \frac{C(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}$$

ここで、χ は高々 1 つの例外を除いた実 Dirichlet 指標であり、d は指標の導手とする。

(注) Tatuzawa の定理から Siegel の定理は導くことができる。

Dirichlet L 関数の場合、Siegel の定理や Tatuzawa の定理は同じタイプの補助関数を用いて証明されるが、Tatuzawa の定理の方が補助関数に要求する条件が厳しい。従って、Siegel-Tatuzawa 型の定理を他の L 関数に対して示そうとした場合、Tatuzawa 型の定理の証明に用いる補助関数を見つけることは、Siegel 型の定理の証明に用いる補助関数を見つけるよりも困難な場合が多い。

例えば Siegel の定理の類似が得られている L 関数は次のものたちである。

- cusp form f からなる L 関数 L_f。[3], [4] 参照。
  但し現在は Siegel の零点の非存在性が知られている。[7] 参照。
- cusp form f, g からなる Rankin-Selberg L 関数 $L_{f\otimes g}$。
  $f = g$ の時は [11], $f \neq g$ の時は [8] 参照。
  但し現在は Siegel の零点の非存在性が知られている。[1], [7], [12] 参照。

また、上記のうち、Tatuzawa の定理の類似が得られている L 関数は次のものたちである。

- cusp form f, g からなる Rankin-Selberg L 関数 $L_{f\otimes g}$。
  $f = g$ の時は [6], [11] に注意すれば証明できる。
  $f \neq g$ の時は [9] 参照。

ここで上げた例に関していえば、Siegel 型の定理の証明で用いる補助関数を利用して Tatuzawa 型の定理も証明できるものは Dirichlet L 関数と、Rankin-Selberg L 関数 $L_{f\otimes f}$ である。その理由には L 関数の極の有無が大きく影響している。まずそれを説明する。

Dirichlet L 関数に対して、Siegel, Tatuzawa の定理は次の補助関数たちを利用して証明される。([2], [13] 参照)。

$$\zeta(s)L(s,\chi), \quad \zeta(s)L(s,\chi_1)L(s,\chi_2)L(s,\chi_1\chi_2)$$

これらは大雑把に書くと、以下の性質を持っている。

(a) Dirichlet 級数表示で現れる係数が非負で、初項が 1。
(b) $s=1$ で pole を持つ。
(b)' $s=1$ で simple pole を持つ。
(c) 補助関数の留数が $L(1,\chi)$ で評価できる。

(a)(b)(c) の性質が Siegel の定理の証明に必要な条件で、(a)(b)'(c) が Tatuzawa の定理の証明で利用する条件である。従って、一般には Siegel 型の定理を証明するための補助関数が見つかっても、それを用いて Tatuzawa 型の定理を証明できると言い切れないのである。

上記のタイプの補助関数の係数の正値性や極がポイントになっているとすれば、Dirichlet L 関数に次いで $L_{f\otimes f}$ の Tatuzawa 型の定理が証明できることは自然である。特に $s=1$ で simple pole を持っていることが効いている。そこで、極を持たない $L_{f\otimes g}(f\neq g)$ の Tatuzawa 型の定理が証明されていることに注目したい。この証明は [9] を参照していただければ分かるが、更に新しいタイプの補助関数を導入することで、補助関数に対する極の要求 (b)' を緩めて証明を与えている。今回は [9] で紹介した結果を更に拡張し、一般的にオイラー積で定義される L 関数に対して、Siegel-Tatuzawa 型の定理を証明するための方法を考察したので、それを報告したい。これは名古屋大学多元数理・松本耕二氏との共同研究である。

2 主結果

J は自然数、p を素数として、$a(j,p)$ $(1\leq j\leq J)$ を複素数として、次のような L 関数を考える。

$$\mathcal{L}(s,\chi)=\prod_{p:\text{prime}}\prod_{j=1}^{J}\left(1-\frac{a(j,p)\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

この L 関数に対して Tatuzawa 型の定理を示すことが目標である。さて、この L 関数は次の (A1)-(A3) を満たしていると仮定する。

Assumption. L 関数 $L(s,\chi)$ について

(A1) $L(s,\chi)$ は有理形関数として全平面に解析接続される。また、極は χ が principal であれば、$s=1$ に存在する可能性があるとし、χ が non-principal であれば、整関数であるとする。

(A2) 任意の $\varepsilon>0$ に対して、$-\delta\le\sigma\le 1+\delta$ において一様に

$$L(s,\chi)\ll\exp\left(\exp(\varepsilon|t|)\right),\qquad |t|\to\infty,$$

が成立するような $0<\delta<1/2$ が存在する。

(A3) χ を primitive とする。このとき、$L(s,\chi)$ は次の関数等式を持つ。

$$\widetilde{L}(s,\chi)=W_\chi\widetilde{L}(1-s,\chi),$$

ここで

$$\widetilde{L}(s,\chi)=Q_{chi}^s\prod_{\nu=1}^{N}\Gamma\left(\alpha_\nu s+\beta_\nu(\chi)\right)L(s,\chi).$$

ここで、N 自然数, $\alpha_\nu>0$ は実数、$\beta_\nu(\chi)$ は複素数とする。
また、Q_χ は実数で、$Q_\chi\ll d^\gamma$ (γ は自然数) を満たし、
W_χ は複素数で、$|W_\chi|=1$。

$L_1(s,\chi)=\mathcal{L}(s,\chi)$ と置くことにする。$L_1(s,\chi)$ が次頁の (H3) を満たすと仮定する。更に、上の (A1)-(A3) を満たす K 個の L 関数

$$L_k(s,\chi)=\prod_{p:\text{prime}}\prod_{j=1}^{J(k)}\left(1-\frac{a_k(j,p)\chi(p)}{p^s}\right)^{-1},\quad (1\le k\le K)$$

にを選び、e_k $(1\le k\le K)$ を自然数として

$$\Lambda(s,\chi)=\prod_{k=1}^{K}L_k(s,\chi)^{e_k}$$

とおき、$\sigma>1$ で、$\log\Lambda(s,\chi)$ を

$$\log\Lambda(s,\chi)=\sum_{p:\text{prime}}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{\chi^h(p)}{hp^{hs}}b(h,p)$$

と展開した時、次頁の (H1),(H2) を満たすと仮定する。

Hypothesis.

(H1) $b(h,p) \geq 0$

(H2) $\chi = \chi_0$ 自明な指標の時, $\Lambda(s) = \Lambda(s, \chi_0)$ と書くことにする。r を $\Lambda(s)$ の $s = 1$ における極の位数とする。
このとき $1 \leq r \leq e_1$ となる。

(H3) effective な定数 $C_1 > 0$ が存在して、$L_1(s,\chi)$ が次の範囲で実軸上に零点がないとできる。

$$\sigma > 1 - \frac{C_1}{\log d}, \quad (0 < |t| \leq 1).$$

この時、$L_1(s,\chi)$ に対して、次の Tatuzawa 型の定理が証明できる。

定理 1
X を全ての実の primitive な Dirichlet 指標全体の集合とする。$L_1(s,\chi)$ が (H3) を満たし、更に、(A1)-(A3),(H1)(H2) を満たすような $L_k(s,\chi)(2 \leq k \leq K)$ が存在すれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、**effective** な正定数 $C(\varepsilon)$ が存在し、次を満たす。

$$|L_1(1,\chi)| > \frac{C(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}$$

ここで、χ は高々ひとつの例外を除いた任意の X の元であり、d は χ の導手。

この定理の証明で用いる補助関数は次の通りである。

$$\begin{aligned}
\varphi(s,\chi_1,\chi_2) &= \Lambda(s)\Lambda(s,\chi_1)\Lambda(s,\chi_2)\Lambda(s,\chi_1\chi_2),\\
\varphi(s,\chi) &= \Lambda(s)\Lambda(s,\chi),\\
\varphi_0(s,\chi) &= \zeta(s)\varphi(s,\chi),
\end{aligned}$$

ここで、$\chi_1\chi_2$ は自明ではないとしている。これらの補助関数を用いると、[9] と同様の方法で定理 1 を証明することができる。

(H1) は補助関数の Dirichlet 級数表示における係数が非負であること、初項が 1 であるという性質 (a) を保障するもので、従来の設定方法と同じである。(H2) は従来の極の位数に関する条件 (b)' を緩めたものである。その点に注意すると、(H3) の条件が増えた分、一般に Tatuzawa 型の定理の証明に対して「補助関数が見つけやすくなった」と思えないか

もしれないが、そうではない。実は、通常 (H3) は (H1)(H2) から導かれることが多い。特に $\overline{L_1(s,\chi)}$ が $\Lambda(s,\chi)$ の因子になっている時は、(H3) は (H1)(H2) より導かれることがスタンダードな方法で証明できる。

3 Symmetric power L 関数への応用

定理 1 を用いて、symmetric power L 関数に対する Tatuzawa 型の定理を示すことが出来る。まず、$f(z)$ を重さ k レベル N の newform とする。$f(z)$ の Fourier 級数表示を

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z}$$

と書くとき、素数 p に対して θ_p を次のように定義する。

$$a(p) = 2p^{\frac{k-1}{2}} \cos\theta_p.$$

n を自然数として n-th symmetric power L 関数を

$$L_{sym,n}(s,\chi) = \prod_{p \nmid N} \prod_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{\chi(p) e^{i\theta_p(n-2j)}}{p^s}\right)^{-1}$$

と定義する。

さて、R. Murty によって、自明な指標の場合、$L_{sym,n}(s,\chi)$ が $\sigma = 1$ 上で零点を持たないことが示された ([10] 参照)。その証明の中で、R. Murty は次の補助関数を導入している。

n が偶数の時

$$\Lambda(s,\chi) = L_{sym,0}(s,\chi) L_{sym,2}(s,\chi) \cdots L_{sym,2n}(s,\chi)$$

n が奇数の時

$$\Lambda(s,\chi) = (L_{sym,0}(s,\chi) L_{sym,1}(s,\chi) L_{sym,2}(s,\chi) \cdots L_{sym,2n+1}(s,\chi))^2 \times L_{sym,2n+2}(s,\chi).$$

(R. Murty によって導入された補助関数は指標が自明な場合。)

これらは (H1)(H2) を満たしていて、(H3) も証明することが出来る。従って、定理 1 を適用すると次の結果が得られる。

定理 2
X は定理 1 と同じ集合とする。n-th symmetric power L 関数 $L_{sym,n}(s,\chi)$ に対して、n が偶数 (resp. 奇数) の時、$L_{sym,m}(s,\chi)$, $0 \le m \le 2n$ (*resp.* $2n+2$) が任意の指標 $\chi \in X$ に対して整関数として全平面に解析接続でき、(A2)(A3) を満たしているとする。この時、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、**effective** な正定数 $C(\varepsilon)$ が存在し、次を満たす。

$$|L_{sym,n}(1,\chi)| > \frac{C(\varepsilon)}{d^{\varepsilon}}$$

ここで、χ は高々ひとつの例外を除いた任意の X の元であり、d は χ の導手。

(注) 1 章の導入で L_f が Siegel の零点を持たないことには触れたが、あえて Tatuzawa 型の定理を考えるなら、定理 1 を使って証明を与えることも可能。

参考文献

[1] W. D. Banks, *Twisted symmetric-square L-functions and the nonexistence of Siegel zeros on* $GL(3)$, Duke Math. J. **87** (1997) 343-353.

[2] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory* (2nd ed.), Springer-Verlag (1980).

[3] E. P. Golubeva and O. M. Fomenko, *Values of Dirichlet series associated with modular forms at the points* $s = \frac{1}{2}$, 1, J. Soviet Math. **36** (1987), 79-93. Translated from Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **134** (1984), 117-137.

[4] E. P. Golubeva and O. M. Fomenko, *Behavior of the L-functions of cusp forms at* $s = 1$, J. Math. Sci. **79** (1996) no.5, 1293-1303. Translated from Zap. Nauchn. Sem. S. -Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **204** (1993), 37-54.

[5] F. Grupp, *On Dirichlet series attached to cusp forms and Siegel-zero*, Glasgow Math. J. **25** (1984), 107-119.

[6] J. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. of Math. **140** (1994) 161-181 (with an appendix by D. Goldfeld, J. Hoffstein and D. Lieman).

[7] J. Hoffstein and D. Ramakrishnan, *Siegel zeros and cusp forms*, Intern. Math. Res. Notices (1995) 279-308.

[8] Y. Ichihara, *The Siegel-Walifsz theorem for Rankin-Selberg L-functions associated with two cusp forms*, Acta Arith. **92** (2000) 215-227.

[9] Y. Ichihara, *Rankin-Selberg L 関数の zero-free region — Siegel-Tatuzawa 型の定理について—*, 数理解析研究所講究録 1274 (2002), 53-61.

[10] M. Ram Murty, *Oscillations of Fourier coefficients of modular forms*, Math. Ann. **262** (1983) 431-446.

[11] A. Perelli, *On the prime number theorem for the coefficients of certain modular forms*, Elementary and analytic theory of numbers(Warsaw, 1982), 405-410, Banach Center Publ., **17**, PWN, Warsaw, 1985.

[12] D. Ramakrishnan and S. Wang, *On the exceptional zeros of Rankin-Selberg L-functions*, Compositio Math. **135** (2003), 211-244.

[13] T. Tatuzawa, *On a theorem of Siegel*, Japanese J. Math. **21** (1951) 163-178.