数理解析研究所講究録
1511 巻 2006 年 65-73

あるクラスに属すゼータ関数のスペクトルについて

神谷諭一 (Yuichi Kamiya)

この報告では，あるクラスに属すゼータ関数が三角多項式で近似できるかどうかを議論する．

1 Bohr の概周期関数

この節では Bohr の概周期関数を導入し，この関数の三角多項式による近似を復習しよう．

定義 集合 $E \subset \mathbf{R}$ が relatively dense であるとは，ある正数 l を適切に選べば，長さ l の任意の区間が E の元を少なくとも一つ含むときをいう．

定義 関数 $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ は連続とする．$\varphi(x)$ が uniformly almost periodic (u.a.p.) であるとは，任意の正数 ε に対し，集合

$$\{\tau \in \mathbf{R} | \sup_{x\in\mathbf{R}} |\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| \leq \varepsilon\}$$

が relatively dense であるときをいう．

u.a.p. 関数は周期関数の拡張である．周期関数はある程度のなめらかさがあれば Fourier 級数として表示されるので，それは三角多項式で近似される．それでは, u.a.p. 関数ではどうであろうか．u.a.p. 関数の三角多項式による近似を考えてみよう．

$\varphi(x)$ が u.a.p. であるとき

$$\frac{1}{X}\int_0^X \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

で $X \to \infty$ とした極限が存在することが知られている．そこで

$$a_\varphi(\lambda) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{X}\int_0^X \varphi(x)e^{-i\lambda x}dx$$

とおこう．$a_\varphi(\lambda)$ は，周期関数に対する Fourier 係数の拡張である．周期関数の Fourier 級数表示自体を，Fourier 反転公式による積分表示で Fourier 係数

$\neq 0$のところをわたって積分しているとみよう．この見方によれば，u.a.p. 関数の三角多項式による近似を考えるに際し，まず，$a_\varphi(\lambda) \neq 0$ なる λ が可算集合であるかを論じる必要があろう．実際に，このような λ は可算であることが知られている．そこで

$$\Lambda_\varphi = \{\lambda_n | n \in \mathbf{N}, a_\varphi(\lambda_n) \neq 0\}$$

とおく．u.a.p. 関数の三角多項式による近似について次が知られている．

u.a.p. 関数の近似定理 $\varphi(x)$ は u.a.p. 関数とする．任意の正数 ε に対し，ある数列 $\{b(n)\}_{n=1}^N$ が存在して

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \varphi(x) - \sum_{n=1}^{N} b(n) e^{i\lambda_n x} \right| < \varepsilon, \quad \lambda_n \in \Lambda_\varphi$$

とできる．

2 Beurling による u.a.p. 関数の翻訳

u.a.p. 関数は有界である．そこで u.a.p. 関数が属す器として, 本質的に有界な可測関数のなす空間 L^∞ を考えよう．前節の u.a.p. 関数の近似定理は, L^∞ のノルム $\|\cdot\|_\infty$ を用いて

$$\left\| \varphi(x) - \sum_{n=1}^{N} b(n) e^{i\lambda_n x} \right\|_\infty < \varepsilon, \quad \lambda_n \in \Lambda_\varphi \tag{1}$$

と書き直すことができる．

L^∞ を考えるということは，同時に，可積分関数のなす空間 L^1 も意識することが重要である．L^1 の共役空間が L^∞ であるからであり，L^1 の構造を上手く利用することができる場合があるからである．例えば，L^1 については, Wiener のタウバー型定理がある．この定理を導くときに重要な補題が用いられる．それは，大雑把にいって，L^1 の元たちの Fourier 変換で作られる空間 $\widehat{L^1}$ の元には “局所的に” 逆元が存在する (これを Wiener の補題と呼ぼう)，というものである．すぐ後で，Wiener の補題を利用したある結果を紹介する．

Beurling は [2] で，u.a.p. 関数 φ で Λ_φ が有限値に集積しないものについて，L^1 に属する関数との合成積と Fourier 変換の言葉を用いて，u.a.p. 関数であるための同値条件を表現した．

Beurling の定理 (I) φ が u.a.p. 関数であるとき，L^1 関数 f で f の Fourier 変換 $\widehat{f}$ が Λ_φ 上で零になるものについて，次が成立する

$$f * \varphi := \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(\cdot - y)dy = 0.$$

(II) φ は有界かつ一様連続とする．$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}$ は有限値に集積しないとする．ある L^1 関数 f で $\widehat{f}$ が $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上でのみ零になり，かつ $f * \varphi = 0$ を満たすものが存在すれば，φ は u.a.p. 関数であり，$\Lambda_\varphi \subset \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ となる．

(I) は u.a.p. 関数の近似定理から直ちに従う．

Beurling は超関数の理論の先駆者であったといわれる．(II) についても超関数っぽい見方ができる．(II) では

$$\bigcap_{f \in L^1, f*\varphi=0} \{\widehat{f} \text{ の零点}\}$$

という集合が意識されていて，この集合は φ を緩い超関数とみて，それを Schwartz-Fourier 変換 (S-F 変換) したものの台と関係がある．少し詳しく述べてみよう．

今，φ は有界なので

$$\mathcal{U}_\varphi(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)g(x)dx, \quad g \in \mathcal{S}\text{: Schwartz 空間}, \tag{2}$$

で定義される $\mathcal{U}_\varphi$ は緩い超関数である．$\mathcal{U}_\varphi$ の S-F 変換 $\widehat{\mathcal{U}_\varphi}$ は

$$\widehat{\mathcal{U}_\varphi}(g) = \mathcal{U}_\varphi(\widehat{g}), \quad g \in \mathcal{S}$$

で定義され，これもまた緩い超関数である．

定義 集合 $\mathcal{O} \subset \mathbf{R}$ は開集合とする．$\widehat{\mathcal{U}_\varphi}$ が $\mathcal{O}$ 上で零になるとは $\mathcal{O}$ に台を持つすべての $g \in \mathcal{S}$ について $\widehat{\mathcal{U}_\varphi}(g) = 0$ となるときをいう．

$\widehat{\mathcal{U}_\varphi}$ の台，supp $\widehat{\mathcal{U}_\varphi}$，は $\widehat{\mathcal{U}_\varphi}$ が零になる最大の開集合の補集合として定義される．

定理

$$\bigcap_{f \in L^1, f*\varphi=0} \{\widehat{f} \text{ の零点}\} = \operatorname{supp} \widehat{\mathcal{U}_\varphi}$$

この結果の証明では，Wiener の補題が本質的である．

参考書 節 1 の内容は Besicovitch の本 [1] を参考にした．節 2 の超関数に関する内容については Katznelson の本 [8] を参考にした．上の定理はこの本の p.170 にある．また，この本には Beurling の定理の発展型もあり，興味深い．

3 Riemannゼータ関数と超関数の台

$s=\sigma+it$ を複素変数とする．Riemann ゼータ関数を $\zeta(s)$ で表そう．

Riemann ゼータ関数 $\zeta(\sigma+it)$ について σ を固定し t 変数の関数とみたとき，それを ζ_σ と記そう : $\zeta_\sigma(t)=\zeta(\sigma+it)$．$\sigma$ を $\sigma>1$ に固定した場合，Riemann ゼータ関数の Dirichlet 級数表示により

$$\zeta_\sigma(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}e^{-it\log n} \tag{3}$$

と表現できる．右辺は三角多項式の一様収束極限であるから，ζ_σ は u.a.p. 関数である．今の場合，$\bigcap_{f*\zeta_\sigma=0}\{\widehat{f}$ の零点$\}$ や supp $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ は重要ではない．これらを考える理由は三角多項式での近似の可能性を論じることにあり，(3) のようにあらかじめ表示されていれば，議論する必要はあまりないが，参考までに記せば

$$\bigcap_{f\in L^1, f*\zeta_\sigma=0}\{\widehat{f}\text{ の零点 }\}=\operatorname{supp}\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}=\{-\log n\}_{n=1}^{\infty}$$

となる．

それでは，$\sigma<1$ でも ζ_σ は三角多項式で近似できる余地があるだろうか．この場合には ζ_σ は非有界であることが知られているので，当然，u.a.p. 関数ではない．そのために上記の $\bigcap_{f*\zeta_\sigma=0}\{\widehat{f}$ の零点$\}$ の類似を考えるときには，f が属す空間を L^1 より小さくして，その共役空間 (L^∞ より大きくする) に ζ_σ が属すようにしなければならない．ζ_σ が属す空間を指定することは今は得策とは思えないので，この類似の考察についてはとりあえずはおいておく．一方で，ζ_σ は非有界ではあるが $|t|$ について多項式オーダーであることから等式 (2) のようにして ζ_σ は緩い超関数とみなせる．即ち，

$$\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_\sigma(t)g(t)dt,\quad g\in\mathcal{S}$$

で定義される $\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}$ は緩い超関数である．そこで $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ の台を考察することは意義がある．即ち，

$$\widehat{\mathcal{U}_\varphi}(g)=\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_\sigma(t)\widehat{g}(t)dt,\quad g\in\mathcal{S} \tag{4}$$

の台を考察しよう．このためには，$\sigma<1$ での ζ_σ の情報が必要である．$\sigma<1$ について ζ_σ を "近似" する手段としては，少なくとも次の三つがある:

(i) Euler-Maclaurin 和公式による近似
(ii) Carlson の方法による近似
(iii) 近似関数等式による近似.
以下では，(i) (ii) を使って $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ の台を考察しよう.

4 (i) による $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ の台の決定

M は自然数とし σ は $\sigma > -M+1$ なるよう固定する．$\zeta(s)$ に Euler-Maclaurin 和公式を適用させ，若干の評価を行うと

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} - \frac{N^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2N^s} + \sum_{l=1}^{M-1} \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \cdot \frac{(s)_l}{N^{s+l}} + O\left(\frac{(1+|t|)^M}{N^{\sigma+M-1}}\right) \tag{5}$$

となる．但し，B_l は Bernoulli 数であり，$(s)_l$ は

$$(s)_l = s(s+1)\cdots(s+l-1)$$

で定義される．(5) を (4) に代入して計算すると

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}(g) =& 2\pi \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\sigma} g(-\log n) - 2\pi \int_{-\log N}^{\infty} e^{-(1-\sigma)y} g(y) dy \\ & - \frac{\pi}{N^\sigma} g(-\log N) + 2\pi \sum_{l=1}^{M-1} \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \cdot \frac{1}{N^{\sigma+l}} \sum_{k=0}^{l} c_k \frac{d^k g}{dt^k}(-\log N) \\ & + O\left(\frac{1}{N^{\sigma+M-1}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^M |\widehat{g}(t)| dt\right).\end{aligned}$$

となる．今，$g \in \mathcal{S}$ ととっているが，$g \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ は C^∞ 級かつコンパクト台をもつ関数たちのなす空間 (テスト関数の空間)，に制限する．そして，$N \to \infty$ とし，そのあとで $M \to \infty$ を考えれば次を得る．

定理 1 $\sigma < 1$ のとき

$$\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}|_{\mathcal{D}}(g) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} g(-\log n) - 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-\sigma)y} g(y) dy.$$

$\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ は緩い超関数であった．それを $\mathcal{D}$ に制限した $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}|_{\mathcal{D}}$ は Schwartz の超関数である．定理 1 から直ちに，Schwartz の超関数 $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}|_{\mathcal{D}}$ の台は $\mathbf{R}$ であることがわかる．$\mathcal{D}$ は $\mathcal{S}$ にて dense であるから，$\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}|_{\mathcal{D}}$ の台と $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ の台は一致する．従って supp $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}} = \mathbf{R}$ がわかった．

5　あるクラスに属すゼータ関数と超関数の台

前節ではζ_σにEuler-Maclaurin和公式を適用して supp $\widehat{\mathcal{U}_{\zeta_\sigma}}$ を決定した．他のゼータ関数について前節と類似の議論をしようとすると困難に出会う．つまり，ゼータ関数のDirichlet級数表示におけるDirichlet係数に数論的な関数が入るとEuler-Maclaurin和公式を適用させることができないので前節のような議論ができない．この困難を回避するために，Carlsonによる近似を利用しよう．

この節では次の仮定を満たすゼータ関数φの族を考察する：

(i) $\varphi(s)$は有理型関数で$s=1$にのみ極を持ちえてよい．$s=1$に極を持つ場合は

$$\varphi(s)=\frac{C_{-l}}{(s-1)^l}+\cdots+\frac{C_{-1}}{s-1}+\text{正則部分}$$

のように表示する．$\sigma>1$では$\varphi(s)$は絶対収束するDirichlet級数

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

として表示できる．但し，a_nは複素数とする．

(ii) bは$b<1$なる実数, mは自然数, C_bはbにのみ依存する正数，が存在して

$$|\varphi(s)|\le C_b\left|\frac{t}{2}\right|^{m-1/2}$$

が$\sigma\ge b$, $|t|>1$なるsについて成立する．

(iii) 次の評価が成立する:

$$\int_{-T}^{T}|\varphi(b+it)|^2dt\ll T,\quad T\to\infty.$$

これらの仮定を満たす代表例は$\zeta(s)$の冪乗である．例えば$\zeta^2(s)$については，$l=2$, $a_n=d(n)$, $d(n)$は約数関数，$m=1$, bは$1/2<b<1$なる任意の数にとることができる．

さて，上記の仮定を満たすゼータ関数はCarlson [3] によって考察された．次の近似公式は [3] の方法をまねれば容易に得られる．

Carlson の近似公式 s は $\sigma > b$ なるものとする．$\beta = \sigma - b$ とおく．このとき

$$\sup_{T>0}\left\{\frac{1}{1+2T}\int_{-T}^{T}\left|\varphi(s) - \sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^s}\left(1-\left(\frac{n}{N}\right)^{2\beta}\right)^m \right.\right.$$
$$\left.\left. + \chi_\varphi \operatorname*{Res}_{w=1}\frac{m!(2\beta)^m\varphi(w)N^{w-s}}{(w-s)\cdots(w-s+2m\beta)}\right|^2 dt\right\}^{1/2} \ll \frac{1}{N^\beta}$$

となる．但し，$\varphi(s)$ が $s=1$ に極をもつとき $\chi_\varphi = 1$，極を持たないときは $\chi_\varphi = 0$ とする．

ゼータ関数 $\varphi(\sigma+it)$ について σ を $b<\sigma<1$ に固定し t 変数の関数とみたとき，それを φ_σ と記そう：$\varphi_\sigma(t) = \varphi(\sigma+it)$．仮定 (ii) により

$$\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}}(g) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\sigma(t)\widehat{g}(t)dt, \quad g \in \mathcal{S}$$

で定義される $\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}}$ は緩い超関数である．Carlson の近似公式を利用すると $\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}}$ は次のように計算できる：

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}}(g) =& 2\pi\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n^\sigma}g(-\log n)\\
&+ 2\pi\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^j}{N^{2j\beta}}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n g(-\log n)}{n^{\sigma-2j\beta}}\\
&- 2\pi\sum_{h=0}^{l-1}\frac{C_{-(h+1)}}{h!}\int_{-\log N}^{\infty}e^{-(1-\sigma)y}(-y)^h g(y)dy\\
&- 2\pi\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\frac{(-1)^j}{N^{2j\beta}}\sum_{h=0}^{l-1}\frac{C_{-(h+1)}}{h!}\int_{-\log N}^{\infty}e^{-(1-\sigma+2j\beta)y}(-y)^h g(y)dy\\
&+ O\left(\frac{\|\widehat{g}\|_{\mathcal{A}^2}}{N^\beta}\right).
\end{aligned}$$

$g \in \mathcal{S}$ を $g \in \mathcal{D}$ に制限する．そして，$N \to \infty$ とすれば次を得る．

定理 2 $b < \sigma < 1$ のとき

$$\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}}|_{\mathcal{D}}(g) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} g(-\log n) - 2\pi \sum_{h=0}^{l-1} \frac{C_{-(h+1)}}{h!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-\sigma)y}(-y)^h g(y)dy.$$

これから，前節と同じようにして，$b < \sigma < 1$ について，$\varphi(s)$ が $s = 1$ に極をもつときは $\mathrm{supp}\,\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}} = \mathbf{R}$，$\varphi(s)$ が $s = 1$ に極をもたないときは $\mathrm{supp}\,\widehat{\mathcal{U}_{\varphi_\sigma}} \subset \{-\log n\}_{n=1}^{\infty}$，が証明できる．

6 まとめ

節 4, 5 ではゼータ関数に付随する超関数の S-F 変換の台を考察した．これは Beurling の定理の (I) に対応している．Beurling の定理の (I) は L^∞ ノルムによる不等式 (1) から導かれる．節 4 の結果は Euler-Maclaurin 和公式による評価 (5) によったが，これも関数空間のノルムの不等式とみなせる．

つまり (5) は

$$L_M^\infty := \{\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C};\ 可測\ \mathrm{s.t.} \|\psi\|_{\infty,M} := \operatorname*{esssup}_{t\in\mathbf{R}} \frac{|\psi(t)|}{(1+|t|)^M} < \infty\}$$

なる Banach 空間のノルムによって

$$\left\|\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{1-s} + \frac{1}{2N^s} - \sum_{l=1}^{M-1} \frac{B_{l+1}}{(l+1)!} \cdot \frac{(s)_l}{N^{s+l}}\right\|_{\infty,M} \ll \frac{1}{N^{\sigma+M-1}}$$

と表される．節 5 の結果は Carlson の近似公式によったが，これも関数空間のノルムの不等式とみなせる．つまり Carlson の近似公式は

$$\mathcal{B}^2 := \{\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{C};\ 可測\ \mathrm{s.t.} \|\Phi\|_{\mathcal{B}^2} = \sup_{T>0} \left(\frac{1}{1+2T} \int_{-T}^{T} |\Phi(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty\}.$$

なる Banach 空間のノルムによって

$$\left\|\varphi(s) - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s} \left(1 - \left(\frac{n}{N}\right)^{2\beta}\right)^m + \chi_\varphi \operatorname*{Res}_{w=1} \frac{m!(2\beta)^m \varphi(w) N^{w-s}}{(w-s)\cdots(w-s+2m\beta)}\right\|_{\mathcal{B}^2} \ll \frac{1}{N^\beta}$$

と表される．従って，ゼータ関数に付随する超関数のS-F変換を調べることができた根拠は，ゼータ関数を含む適切な関数空間を考えそのノルムの意味でゼータ関数の近似がある程度わかっていたから，といえよう．

一方，Beurlingの定理の(II)はこれの逆方向の考察を意味する．つまり，ある関数が適切な関数空間に含まれ，その関数に付随する超関数のS-F変換がある程度はっきりしていれば，その関数をS-F変換の台をわたる三角多項式によって近似することができるのではないか，という考察である．こちらの方向については，ほとんどわかっていないように思うが，少なくともHelsonによる研究[4]がある．またHelsonの研究の類似として[6]もある．いづれにせよ，まだわからないことが多いというのが現状である．

References

[1] A. S. Besicovitch, Almost Periodic Functions, Dover, 1954.

[2] A. Beurling, Sur une classe de fonctions presque-périodiques, C. R. Acad. Sci., Paris, 1947, 326–327.

[3] F. Carlson, Contributions à la théorie des séries de Dirichlet. I, Ark. Mat. Ast. Fys. **16** (1922), 1–19.

[4] H. Helson, Foundations of the theory of Dirichlet series, Acta Math. **118** (1967), 61–77.

[5] Y. Kamiya, On spectrums of certain harmonic functions attached to the Riemann zeta-function, Acta Math. Hungar. **105** (2004) 103–114.

[6] Y. Kamiya, An analogue of a theorem of Helson. プレプリント

[7] Y. Kamiya, An approach to spectral sets of certain zeta-functions. プレプリント

[8] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, 2nd ed., Dover, 1976.

19-4 Nishinobo Daiwa-cho
Okazaki-city Aichi 444-0931
Japan
e-mail: kamiya-9@m3.catvmics.ne.jp