数理解析研究所講究録
1512巻 2006年 102-108

極限公式に現れる特殊函数と相互法則について II

吉田敬之 (京都大学)
Hiroyuki Yoshida (Kyoto University)

この論考は数理解析研究所講究録 1091(1999 年) に書いた論文の続編である. その後著書 Absolute CM-periods , AMS 2003 を出版してこの論文の内容も完全に著書に含まれているが, 敢えて書いておかなかった問題がある. この問題をはっきり述べることがこの論考の目的である.

§0. Motivation

F は n 次の総実代数体, K は F の総虚 2 次拡大体とする. χ は K に対応する F の Hecke 指標とする.

Conjecture (Colmez, Yoshida).

$$\exp(\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}) \sim \pi^n \prod_{\sigma\in J_K} p_K(\mathrm{id},\mathrm{id}) \sim \pi^n(\prod_{\Phi} p_K(\Phi,\Phi))^{1/2^{n-1}}.$$

ここに $a, b \in \mathbf{C}$ に対して $a \sim b$ は $b \neq 0$, $a/b \in \overline{\mathbf{Q}}$ を表す. J_K は K から $\mathbf{C}$ の中への同型全体の集合を表す. p_K は志村の周期記号である. また Φ は K の全ての CM-type の上を走る. この予想については [Y2], p. 184, p. 133 を参照されたい. またより一般的な予想の特別の場合であることを注意しておく.

$n=1$, $F=\mathbf{Q}$ のときは予想は

$$\exp(\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}) = \frac{1}{d}\prod_{a=1}^{d-1}\Gamma(\frac{a}{d})^{w\chi(a)/2h} \sim \pi p_K(\mathrm{id},\mathrm{id})^2$$

を与える. これは Chowla–Selberg formula としてよく知られている関係である. ここに虚 2 次体 K の判別式を $-d$ とし, h は K の類数, w は K に含まれる 1 の冪根の数である.

以下では Conjecture を証明する手段について考える.

§1. A limit formula

$u=(u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbf{C}^n$ に対して

$$T(u)=u_1+u_2+\cdots+u_n, \qquad N(u)=u_1u_2\cdots u_n$$

とおく. $\mathcal{O}_F$ により F の整数環を表し, $E_F=\mathcal{O}_F^\times$ は F の単数群とする. F の regulator を R_F, different を $\mathfrak{d}_F$, 判別式を D_F で表す.

$$V=\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F \setminus \{(0,0)\}$$

とおく．複素上半平面を $\mathfrak{H}$, 正の実数全体の集合を $\mathbf{R}_+$ と書く．Eisenstein 級数を

$$E(z,s)=\sum_{(c,d)\in V/E_F}\frac{N(y)^s}{N(|cz+d|)^{2s}}$$

によって定義する．ここに $s\in\mathbf{C}$, $z\in\mathfrak{H}^n$, $y=\mathrm{Im}(z)\in\mathbf{R}_+^n$ である．$E(z,s)$ は全 s 平面に有理型に解析接続され，$s=1$ での simple pole を除いて正則である．以下簡単のため F の類数は 1 であると仮定する．このとき極限公式は[1]

$$\begin{aligned}E(z,s)=&-2^{n-2}R_Fs^{n-1}\Big[1+(2n\gamma+2n\log 2\pi-2\log D_F-\frac{D_F^{1/2}\gamma_F}{2^{n-2}R_F}\\&-h(z)+\log N(y))s\Big]+O(s^{n+1}),\quad s\to 0,\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}h(z)=&\frac{D_F}{2^{n-2}\pi^nR_F}\Big[\zeta_F(2)N(y)\\&+\pi^nD_F^{-3/2}\sum_{0\neq b\in\mathfrak{d}_F^{-1}}|N(b)|^{-1}\sigma_1(bd)\exp(2\pi i(T(bx)+T(|by|))\Big]\end{aligned}\tag{2}$$

で与えられる．ここに記号の意味は次の通りである．γ は Euler 定数，$\zeta_F(s)$ は F の Dedekind ゼータ函数を表し，Euler 定数の一般化 γ_F を

$$\zeta_F(s)=\frac{2^{n-1}D_F^{-1/2}R_F}{s-1}+\gamma_F+O(s-1),\qquad s\to 1$$

で定義する．$N(b)$ は b のノルムである．d は F の differental idele を表し，

$$\sigma_1(bd)=\prod_{\mathfrak{p}|(b)\mathfrak{d}_F}(1+N(\mathfrak{p})+\cdots+N(\mathfrak{p})^{\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}((b)\mathfrak{d}_F)})$$

は divisor function である．また $x=\mathrm{Re}(z)\in\mathbf{R}^n$ である．

$h(z)$ は調和函数であり，$h(z)-\log N(y)$ は変換 $z\to\gamma z$, $\gamma\in GL^+(2,\mathcal{O}_F)$ で不変である保型性を持ち，さらに Hecke 作用素の共通固有関数である．ここに[2]

$$GL^+(2,\mathcal{O}_F)=\{\gamma\in GL(2,\mathcal{O}_F)\mid\det\gamma\gg 0\}.$$

---

[1] 極限公式は伝統的には $E(z,s)$ の $s=1$ での振る舞いを記述するが，$s=0$ での振る舞いについて書いておいたほうが都合が良いことが多い．[Y2], Chapter V を参照されたい．

[2] $a\in F$ が総正であることを $a\gg 0$ で表す．

$n=1$, $F=\mathbf{Q}$ の場合には

$$h(z)=-\log|\eta(z)|^4,$$

$$E(z,s)=-\frac{1}{2}[1+(2\log 2\pi+\log|\eta(z)|^4+\log y)s]+O(s^2),\quad s\to 0$$

となる. ここに

$$\eta(z)=e^{2\pi iz/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi inz})$$

は Dedekind の eta 函数である.

S により集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ から $\{1,-1\}$ への写像全体の集合を表す. $\delta\in S$ とする. $\delta'(i)=(1-\delta(i))/2$ とおく. $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in\mathfrak{H}^n$ に対して

$$C_\delta(z)=(\ldots,\delta(i)\rho^{\delta'}(z_i),\ldots)\in\mathfrak{H}^n$$

とおく. ここに ρ は複素共役写像を表す. $C_\delta(z)$ の第 i 成分は $\delta(i)=1$ のとき z_i, $\delta(i)=-1$ のとき $-\bar{z}_i$ である.

(3)
$$\sum_{\delta\in S}N(C_\delta(z))=(2i)^nN(y)$$

が成り立つ.

(4)
$$\begin{aligned}H_\delta(z)=&\frac{D_F}{2^{n-2}\pi^nR_F}\left[\frac{1}{(2i)^n}\zeta_F(2)N(C_\delta(z))\right.\\&\left.+\pi^nD_F^{-3/2}\sum_{b\in\mathfrak{d}_F^{-1},\,\mathrm{sgn}(b)=\delta}\frac{\sigma_1(bd)}{|N(b)|}\exp(2\pi i(T(bx)+T(|by|))\right]\end{aligned}$$

とおく. ここに $\mathrm{sgn}(b)=\delta$ の意味は明らかであろうが一応説明しておく. F から $\mathbf{R}$ の中への同型全体の集合を $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}$ とする. $\mathrm{sgn}(b)=\delta$ は b^{σ_i} の符号が $\delta(i)$ の符号と一致していることを表す. (2) の右辺の第 2 項の和を b の符号に応じて分割したことになるから, (3) を用いて

(5)
$$h(z)=\sum_{\delta\in S}H_\delta(z)$$

を得る. $\delta_1\in S$ を $\delta_1(i)=1$, $1\leqq i\leqq n$ ととる. このとき

$$H(z)=H_{\delta_1}(z)$$

とおく. $H(z)$ は z の正則函数である.

Example 1. $F=\mathbf{Q}$ のとき

$$H(z)=-2\log\eta(z),\qquad h(z)=H(z)+\overline{H(z)}$$

である.

Example 2. $[F:\mathbf{Q}]=2$ とする. このとき $H(z)$ は Hecke が Werke No. 20, §5 で考察した函数である. ϵ を F の基本単数とする. $N(\epsilon)=-1$ ならば

$$h(z_1,z_2)=H(z_1,z_2)+\overline{H(z_1,z_2)}+H(\epsilon z_1,\epsilon'\bar{z}_2)+\overline{H(\epsilon z_1,\epsilon'\bar{z}_2)}$$

が成り立つ. ここに $\epsilon'=-1/\epsilon$ は ϵ の共役である.

§2. Arithmetic

函数 $h(z)$, $H(z)$ の CM-point における値について考察する.

Theorem. K は F の総虚 2 次拡大体とする. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ..., $\mathfrak{A}_{h_K}$ を K のイデアル類を代表する分数イデアルとする.

$$\mathfrak{A}_i=\omega_{i,1}\mathcal{O}_F\oplus\omega_{i,2}\mathcal{O}_F,\qquad w_i=\omega_{i,1}/\omega_{i,2}$$

とおく. K の *CM-type* Φ_i を

$$\mathrm{Im}(w_i^\sigma)>0,\qquad \forall\sigma\in\Phi_i$$

ととる. このとき $(w_i^\sigma)_{\sigma\in\Phi_i}$ は $\mathfrak{H}^n$ の点を定めるが, 簡単のためこの点を w_i と書く. このとき

$$\begin{aligned}\frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)}=&n\gamma+n\log 4\pi-\frac{1}{2}\log|D_K|-\frac{D_F^{1/2}\gamma_F}{2^{n-1}R_F}\\&-\frac{1}{h_K}\sum_{i=1}^{h_K}(h(w_i)-\log(N(\mathrm{Im}(w_i)))\end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで F の類数は 1 と仮定して公式を書いたが, 一般の場合の証明は, [Y2], Chapter V, Theorem 2.5 を参照されたい.

この定理により, §0 の Conjecture は

$$(6_c)\qquad \exp\Big(-\frac{1}{h_K}\sum_{i=1}^{h_K}h(w_i)\Big)\sim\exp\Big(\frac{D_F^{1/2}\gamma_F}{2^{n-1}R_F}-n\gamma\Big)\prod_{\sigma\in J_K}p_K(\sigma,\sigma),$$

或いは

$$(7_c)\qquad \exp\Big(-\frac{2^{n-1}}{h_K}\sum_{i=1}^{h_K}h(w_i)\Big)\sim\exp\Big(\frac{D_F^{1/2}\gamma_F}{R_F}-2^{n-1}n\gamma\Big)\prod_{\Phi}p_K(\Phi,\Phi)$$

と書ける．ここに式番号に subscript c を付けたのは予想式であることを意味する．

$F = \mathbf{Q}$ としよう．$p_K(\rho,\rho) \sim p_K(\mathrm{id},\mathrm{id})$ により，(6_c) は

$$(8) \qquad (\prod_{i=1}^{h_K} |\eta(w_i)|^4)^{1/h_k} \sim p_K(\mathrm{id},\mathrm{id})^2$$

と同値となる．周知の関係

$$\eta(w_i)^2 \sim \eta(-\bar{w}_i)^2 \sim p_K(\mathrm{id},\mathrm{id}), \qquad \overline{\eta(w_i)} = \eta(-\bar{w}_i)$$

により (8) が従い，Chowla-Selberg formula が証明できた．

さて (7_c) の右辺と (5) を比べよう．ともに分解された形をしているが，両者の間には自然な対応関係がある．最も楽観的な形で予想を定式化してみよう．

Hope. *K の CM-type Φ をとる．$\Phi = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$，$\sigma_i \in J_K$ とおく．$\delta \in S$ に対して CM-type を $\Phi(\delta) = \{\ldots, \sigma_i \rho^{\delta'(i)}, \ldots\}$ で定める．Theorem における同様に w_i から CM-type Φ_i を定め，$\Phi_i = \Phi(\delta_i)$，$\delta_i \in S$ と書く．このとき*

$$\exp(-\frac{2^{n-1}}{h_K}\sum_{i=1}^{h_K} H_{\delta_i}(w_i)) \sim \exp(\frac{D_F^{1/2}\gamma_F}{2^n R_F} - \frac{n\gamma}{2}) p_K(\Phi,\Phi).$$

Conjecture とするには根拠が充分ではないので Hope としてある．

$H(z)$ と Eisenstein 級数との直接的関係を与えよう．

$$E_2(z,s) = \sum_{(c,d)\in V/E_F} N(cz+d)^{-2} N(|cz+d|)^{-s}, \qquad z \in \mathfrak{H}^n, \quad s \in \mathbf{C}$$

とおく．$E(z,s)$ は全 s 平面正則に解析接続される．

$$E_2(z) = E_2(z,0)$$

とおく．$n \geqq 2$ ならば $E_2(z)$ は $GL^+(2,\mathcal{O}_F)$ についての weight $(2,2,\ldots,2)$ の正則保型形式でその Fourier 展開は

$$(9) \qquad E_2(z) = \zeta_F(2) + (2\pi i)^n D_F^{-3/2} \sum_{0 \ll b \in \mathfrak{d}_F^{-1}} \sigma_1(bd) \exp(2\pi i T(bz))$$

で与えられる．(4) と (9) を比べれば関係

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial z_1} \cdots \frac{\partial}{\partial z_1} H(z) = \frac{D_F}{2^{n-2}(2\pi i)^n R_F} E_2(z)$$

が得られる. (10) は $n=2$ の場合に Hecke が Werke, p. 398 で注意している.
$n=1$ の場合には

$$E_2(z) = \zeta(2) + (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i n z} - \frac{\pi}{2y}$$

と非正則項 $-\pi/2y$ が加わる. この場合は (10) に対応する関係は

$$\frac{\partial}{\partial z} H(z) = \frac{1}{\pi i} E_2(z) - \frac{i}{2y}$$

である.

§3. Periods and cohomology

§2 の Hope についてはこれ以上考察を進めることができない. しかし関係 (10) は示唆的である. 類似の関係を用いて Eichler–志村型の周期積分から保型形式に付随した cohomology 類を直接構成できる. [Y2], Chapter V, §5 に書いておいたが, このアイデアはそれまで注意されたことがないと思うので, 簡単な場合について説明しよう.

$[F:\mathbf{Q}]=2$ とし, Γ は $SL(2,\mathcal{O}_F)$ の合同部分群とする. F から $\mathbf{R}$ の中への同型を $\{\sigma_1,\sigma_2\}$ とし, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対して $\gamma^{(i)} = \begin{pmatrix} a^{\sigma_i} & b^{\sigma_i} \\ c^{\sigma_i} & d^{\sigma_i} \end{pmatrix}$, $i=1$, 2 とおく.

Γ についての weight $(2,2)$ の保型形式 h をとる. 微分形式 $\mathfrak{d}(h) = h(z)dz_1dz_2$ を考える. 基点 $(w_1,w_2)\in\mathfrak{H}^2$ をとって

$$H(z) = \int_{w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(h), \qquad z=(z_1,z_2)\in\mathfrak{H}^2$$

とおく. $H(z)$ は $\mathfrak{H}^2$ 上の正則函数であり

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2} H(z) = h(z)$$

を満たす. $\mathfrak{H}^2$ 上の正則函数全体がなすベクトル空間を $\mathcal{H}$ とし,

$$(\gamma\varphi)(z) = \varphi(\gamma^{-1}z), \qquad \varphi\in\mathcal{H}, \quad \gamma\in\Gamma$$

によって, $\mathcal{H}$ を left Γ-module にする. h の保型性により, $\gamma\in\Gamma$ に対して

$$(\gamma H)(z) = H(\gamma^{-1}(z)) = \int_{w_1}^{(\gamma^{(1)})^{-1}z_1}\int_{w_2}^{(\gamma^{(2)})^{-1}z_2} \mathfrak{d}(h) = \int_{\gamma^{(1)}w_1}^{z_1}\int_{\gamma^{(2)}w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(h)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}(\gamma H - H) = 0 \tag{11}$$

を得る. 故に

$$(\gamma H - H)(z_1, z_2) = f(\gamma; z_1) + g(\gamma, z_2) \tag{12}$$

と分解される. ここに $f(\gamma; z_1)$ は z_1 にのみ依存する正則函数, $g(\gamma; z_2)$ は z_2 にのみ依存する正則函数である. $f(\gamma; z_1)$, $g(\gamma; z_2)$ を $\mathcal{H}$ に値をもつ Γ の 1-chain とみる. d により Γ の n-chain から $n+1$-chain を作る coboundary 作用素を表す. (12) から明らかに

$$df(\gamma_1, \gamma_2; z_1) + dg(\gamma_1, \gamma_2; z_2) = 0, \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \tag{13}$$

である. $df(\gamma_1, \gamma_2; z_1)$ は z_1 のみの函数, $dg(\gamma_1, \gamma_2; z_2)$ は z_2 のみの函数であるから, (13) により

$$df(\gamma_1, \gamma_2; z_1) = \text{constant} \in \mathbf{C} \tag{14}$$

が結論される. $df(\gamma_1, \gamma_2; z_1)$ は Γ の $\mathbf{C}$ に値をもつ 2-chain であるが, 作り方から明らかにこれは 2-cocycle である. この cohomology 類を $c(h) \in H^2(\Gamma, \mathbf{C})$ と書く. このように自然な方法で保型形式から cohomology 類を構成できる. $c(h)$ は基点の取り方によらず, また分解 (12) のとり方にもよらないことが証明できる. $c(h)$ を代表する 2-cocycle $\tilde{c}(h)$ を具体的に書けば

$$\tilde{c}(h)(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{(\gamma_1\gamma_2)^{(1)}w_1}^{\gamma_1^{(1)}w_1} \int_{w_2}^{\gamma_1^{(2)}w_2} \mathfrak{d}(h), \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \tag{15}$$

である.

文献

[S] G. Shimura, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton Mathematical Series 46, Princeton University Press, 1998.

[Y1] 吉田敬之, 極限公式に現れる特殊函数と相互法則について, 数理解析研究所講究録 1091 (1999), 45–53.

[Y2] H. Yoshida, Absolute CM-periods, Mathematical Surveys and Monographs 106, American Mathematical Society, 2003.