数理解析研究所講究録
1513巻 2006年 112-120

近世日本数学における表現形式
——『大成算経』の隠題をめぐって*

小川束（四日市大学）†

1 はじめに

今日われわれが近世日本の数学書を読むとき，計算の方針が示されなかったり，記述に飛躍があって，著者の意図が判然としない場合がしばしばある．記述された結論の正誤が現代数学の援用によって判定できたとしても，著者が実際にどのような思考，計算を経て当該の結論に到達したのか，必ずしも明確にはできない．これを解明するのは日本数学史の基本的な課題の一つであるが，本稿では問題を一段遡って，そもそもなぜ計算の方針が示されなかったり記述に飛躍があるのか，という問題を考察してみたい．

本稿では，『大成算経』の隠題を検討して，

1. 中国伝来の数学の記述形式が隠題の術文の伝統的形式として強く意識されたこと，
2. 傍書法による高い記述能力は術の記述形式を変容することなく，演段部分に用いられたこと，

などを述べる．

2 近世日本数学における術文の特徴

今日われわれが近世日本の数学書を読むとき，計算の方針が示されなかったり，記述に飛躍があって著者の意図が判然としない場合がしばしばある．このことを，まず『大成算

* On a Form of Expression in Pre-modern Japanese Mathematics

† Ogawa, Tsukane (Yokkaichi University), ogawa@yokkaichi-u.ac.jp

経』巻之十九　隠題第六を例として示しておこう*1.

仮如有勾股．只云勾再自乗数與弦再自乗数相併共一百五十二寸．又云股再自乗数與弦再自乗数相併共一百八十九寸．問勾股.

すなわち，連立方程式

$$x^3 + z^3 = 152, \tag{1}$$
$$y^3 + z^3 = 189, \tag{2}$$
$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{3}$$

を解くことが問題である．(1) − (3) のように表記すると，三つの未知数を必要とするように見えるが，y，z は x であらわされるから，実際には未知数はひとつで足りる．実際，『大成算経』ではこの問題は隠題——一つの未知数で術を記述できる問題——に分類されている．

さて，この問題に対して，まず勾三寸，股四寸を答として与えたあと，術として次のような議論が展開される．

術曰立天元一為勾．$0 + 1x$．再自乗之得数以減只云数余為弦再自乗数.

$$152 - x^3. \tag{4}$$

自之為弦五乗冪.

$$23104 - 304x^3 + x^6. \tag{5}$$

寄位．　列又云数内減弦再自乗数余為股再自乗数.

$$37 + x^3. \tag{6}$$

自之為股五乗冪.

$$1369 + 74x^3 + x^6. \tag{7}$$

<u>加入勾五乗冪共得数以減寄位余為因勾冪因股冪三段弦冪</u>.

$$21735 - 378x^3 - x^6. \tag{8}$$

再自乗之為因勾五乗冪因股五乗冪二十七段弦五乗冪.

$$\begin{aligned} &10267836240375 - 535715195150x^3 + 7899520545x^6 \\ &- 4715172x^9 - 363447x^{12} - 1134x^{15} - x^{18}. \end{aligned} \tag{9}$$

---

*1 以下，引用は東大 T20-34，5 丁表〜7 丁裏による．なお適当に句点を補った．傍書式は現代的表示になおし，そこにみられる数値の誤りは正した．また後の引用のため下線も付した．

再寄. 列弦五乗羃以勾五乗羃相乗又以股五乗羃相乗就分以二十七乗之得

$$853993152x^6 + 34925040x^9 + 53379x^{12} - 6210x^{15} + 27x^{18}. \tag{10}$$

與再寄相消得開方式.

$$\begin{aligned}&10267836240375 - 535713195150x^3 + 7045527393x^6\\&- 39640212x^9 - 416826x^{12} + 5076x^{15} - 28x^{18}.\end{aligned} \tag{11}$$

一十七乗方開之得勾. 推前術得股也.

以上を改めて説明すると，まず，(1) より

$$z^3 = 152 - x^3 \tag{12}$$

であるから，これを 2 乗して

$$z^6 = 23104 - 304x^3 + x^6. \tag{13}$$

また，(1)，(2) より

$$y^3 = 189 - z^3 = 37 + x^3 \tag{14}$$

であるから，これを 2 乗して

$$y^6 = 1369 + 74x^3 + x^6. \tag{15}$$

したがって $\underline{z^6 - (x^6 + y^6)}$ を計算すると，これは $3x^2y^2z^2$ に等しく，

$$3x^2y^2z^2 = 21735 - 378x^3 - x^6 \tag{16}$$

となる．そこで (16) を 3 乗すると，

$$\begin{aligned}27x^6y^6z^6 =&10267836240375 - 535715195150x^3 + 7899520545x^6\\&- 4715172x^9 - 363447x^{12} - 1134x^{15} - x^{18}\end{aligned} \tag{17}$$

となる．一方，(13)，(15) より，(17) の左辺は

$$27x^6y^6z^6 = 853993152x^6 + 34925040x^9 + 53379x^{12} - 6210x^{15} + 27x^{18} \tag{18}$$

だから，(17)，(18) より

$$\begin{aligned}0 =&10267836240375 - 535713195150x^3 + 7045527393x^6\\&- 39640212x^9 - 416826x^{12} + 5076x^{15} - 28x^{18}\end{aligned} \tag{19}$$

が得られる[*2]. (12) 以下 (19) までの右辺がそれぞれ順に (4) から (11) に等しい. また (12) 以下 (19) までの左辺は (4) から (11) のそれぞれ直前に文章として述べられている.

さて, 以上の術に引き続いて演段が与えられ, (8) の直前の本文「加入勾五乗冪共得数以減寄位余為因勾冪因股冪三段弦冪」(下線部分) について補足説明がなされる. すなわち

$$z^6-(x^6+y^6)=3x^2y^2z^2 \tag{20}$$

となる理由が説明されるのである.

演段

是術中得股弦各再自乗数. 故如前以分術傍書而別之先弦再自乗数亦自乗之得

$$x^6+3y^2x^4+3y^4x^2+y^6 \tag{21}$$

如此於五乗冪中有四名. 其内減去勾股各五乗冪余

$$3y^2x^4+3y^4x^2 \tag{22}$$

此数相化而見之則為勾冪股冪弦冪相乗三段数. 又再自乗為因勾五乗冪因股五乗冪二十七段弦五乗冪. 故於術中各求此両仮数而相消也

この演段の主要な内容は, (3) より

$$(z^3)^2=x^6+3y^2x^4+3y^4x^2+y^6 \tag{23}$$

であり, これから

$$z^6-x^6-y^6=3y^2x^4+3y^4x^2=3x^2y^2(x^2+y^2)=3x^2y^2z^2 \tag{24}$$

と変形するということである.

ここで改めて最初の術文を読み返してみると, (4) から (7) までは z^3, z^6, y^3, y^6 を順に計算していることは理解できるが, 何のためにこれらを計算しているのか, その目的は未だ不明である. ところが, それに続いて $z^6-x^6-y^6$ を計算することが述べられて, これが $3x^2y^2z^2$ に等しいこと (下線部分), すなわち (20) が突如提示される. つまり, この術では (20) が本質的な関係式なのであるが, それが最初に提示されないために, 最

[*2] Mathematica で計算をすると, この方程式の実数解は $x=3$ のみで, 答えは確かに正しい. しかし, 実際問題としてこの方程式を算盤上で組み立て除法により解いて, $x=3$ を得たかどうかは確証できない. あらかじめ, $x=3$, $y=4$, $z=5$ から問題を作成した可能性もあるからである.

初のうちは，個々の術文は理解できるが術の全体構造が明確でない状態が続いていたのである．

(20) が提示されてはじめて，われわれは (20) の両辺をそれぞれ x の式で表すことが術の目標であることを認識する．そうして (9) 以下は容易に理解できるようになる．すなわち，われわれが得ているのは z^3，z^6，y^3，y^6 であるから，(20) を 3 乗した

$$\{z^6-(x^6+y^6)\}^3=27x^6y^6z^6 \tag{25}$$

の両辺を別々に計算するのである．左辺を計算したものが (9) であり，右辺を計算したものが (10) である．この両者が恒等的に等しくなければ x に関する方程式が得られるが，それが (11) である．

この例のように，術の本質的な関係式が冒頭に示されないような記述形式は近世日本の数学において特徴的，典型的であって，それが術文の理解を困難にしている第一の理由である．また，この例では (20) に関する補足が演段として述べられているが，演段がない場合も多く，そのような場合には同時代あるいはそれ以前の術を精査する必要があるものの，結局，推測の域を出ないという場合も多くなってしまうのである．これが術文の理解を困難にしている第二の理由である．

3 記述可能性と記述の自由性

関孝和によるいわゆる傍書法[*3]は整式を完全に記述し，整式間の加法，減法，乗法を完全に，自由に処理することを可能にした．たとえば建部賢弘の『算学啓蒙諺解大成』第八問注釈中の「自乗相乗ノ法」には，そのような例が一般の文字を用いたものと数値によるものとを組にする形で七組列挙されている[*4]．今，参考までに一つだけ挙げておくと，

$$(a+bx)(c+dx+ex^2)=ac+(ad+bc)x+(bd+ae)x^2+bex^3$$
$$(-2+1x)(-3-2x+1x^2)=6+1x-4x^2+1x^3$$

というようなものである．一方，整式間の一般の除法はない．組み立て除法を繰り返して方程式の解の近似値を求めることは一般に行われていたが，この計算が整式間の除法の特別の場合であるという認識は持っていなかったように思われる．また，因数分解は散見されが，方程式の解の分離などに有効に用いられた形跡はない．前節の例では，演段において「相化而見之」と称して共通因子により括る操作が見られる．傍書法を用いれば除法や

[*3] 当初は帰源整法と呼ばれていた．

[*4] 拙論 [2]，66–67 ページにその一覧を挙げてある．

因数分解ももちろん可能ではあるが，記述が可能であることとその計算が実現されることは別のことである．

このように傍書法は強力な表現方法で、これにより近世日本の数学が急速に発展したことはつとに知られているところである．それにも関わらず，隠題の術においては，思考の過程を必ずしも自由に記述することができなかったのである．

前節で挙げた例を見ると直ちにわかるように，術文として記述されているのは「天元一」を置くところ以下，すべて算盤上に算木によって表現できるものばかりである．すなわち，術に記載することのできる等式というのは，左辺（または右辺）が必ず算盤上に算木によって表現できるものである．逆に言えば，(20) のような両辺がともに算盤上に算木で表現できない式を術文として術に書くことができない．もう少し詳しく見てみると，術文の典型的な型は「A ＋為＋ B ＋傍書式」である．A は天元一以下，すでに傍書式として表現された量を用いて新たな量を構成する計算手順，B はその計算の結果得られる量，傍書式は A の計算手順に基づいて計算した結果の算木表現，である．前節の例はこの型の文が連続しているといってよい．

4　隠題の術とその演段

傍書法を発明後，関は問題を三つに分類した．すなわち，未知数を用いないで術を記述できる見題，ひとつの未知数で術を記述できる隠題，複数の未知数を術の記述に必要とする伏題である[*5]．伏題の核心は傍書法を用いた行列式の計算による未知数の消去法である．これは中国伝来の数学にはなかったもので，日本において創出された理論であった．それに対して，隠題は基本的に中国伝来の手法で解くことのできる問題群であった．

一例を挙げておこう．近世日本の数学に多大な影響を与えた『算学啓蒙』（朱世傑，1299）の開方釈鎖門第八は

今直田八畝五分五厘．只云長平和得九十二歩．問長平各幾何．

という問題に対して，次のような術を与えている．

---

*5 『発微算法演段諺解』亨巻冒頭の演段起例には，「凡題ニ見，隠，伏ノ三品アリ．見題ハ全折ノ法ヲ以テ正，変ノ二形ニ随テ問フ所ヲ求ム．隠題ハ天元ノ一ヲ立テ虚真ノ二数ヲ得テ問フ所ヲ求ム．此二題ノ術ハ算学啓蒙ニ其法則ヲアラハス．然モ天元ノ一ヲ立テ意ノ如ク之ヲ求ムトイヘトモ，相消数容易（タヤスク）見難ヲ伏題ト云フナリ．伏題ニ単伏，衆伏アリ．此書ニ記ス演段ヲ以テ推ス時ハ，単伏，衆伏共ニ皆術ヲ得スト云フコトナシ」とある．

術日立天元一為平．$0 + 1x$．以減云数余為長．用平乗起為積．

$$0 + 92x - x^2. \tag{26}$$

寄左．列畝通歩與寄左相消得開方式．

$$-2052 + 92x - x^2. \tag{27}$$

平方開之得平．以減和歩即長．合問．

この術は『大成算経』における隠題の記述形式と同一である．『算学啓蒙』は1658年に久田玄哲，土師道雲によって訓点が施され，1672年には星野実宣によって『新編算学啓蒙註解』が刊行された．また関孝和の高弟，建部賢弘も1690年に『算学啓蒙演段諺解』を著していることから，関孝和による傍書法発明の源泉の一つに『算学啓蒙』があったことは間違いがない．最初に例示した隠題の術における記述形式は『算学啓蒙』をはじめとする中国伝来の記述形式を踏襲したものであった．また，関，建部に先立つ沢口一之の『古今算法記』(1671) などがこの形式を踏襲したことも一定の影響力を持っていたに違いない．

さて，隠題という分類の根底には，単一の未知数で解く——記述する——ことが可能であるという技術上の分類のほかに，中国伝来の数学における術の記述形式の伝統を尊守するという意識が強く働いていることも忘れてはならない．算木運用による立元之法と開方術はすでに完成したものとして日本に伝来した．そのため初期の数学者にとっては，まずこれらを解釈し，技能を習得することが最大の課題となった．そのごく初期に関孝和は，遺題を解くために係数に文字を書く棒書法を開発したのだった．傍書法は大きな能力を秘めており，それに適した表現形式を導入する可能性はあったが，関や建部はそのようにはしなかった．隠題における術文の記述形式はあくまでも中国伝来のそれを踏襲したのである．最初に挙げた隠題の例において (20) のような重要な等式であっても，それを記述しようとすると伝統的な記述方法の枠に収まらない．そこで，これを演段として別に記述する必要があったのである．

関も含めて初期の数学者が試みた解釈するという立場は，既に確立した枠組みの中にとどまろうとする力となって働き，漢字文化圏の中での一貫性を保つという圧力となった．しかしながら，傍書法による記述能力の向上は複雑な等式の記述を可能にし，そのために処理できる問題の水準は飛躍的に高くなった．それはたとえば関の『発微算法』(1674) と建部賢弘の『発微算法演段諺解』(1685) を見れば明らかである[*6]．関の『発微算法』の記述は，術の冒頭部分においては，算木表現はないものの，隠題の記述形式を模している．

[*6] 拙著 [2] を参照されたい．

しかし，途中からは最終的な方程式の係数を順に述べたものとなり，もはやその術文をそれだけで理解することは困難である．術文に至るまでの過程が複雑すぎ，その術の根拠を推測できないのである．それを補ったのが建部賢弘の『発微算法演段諺解』である．ここには隠題の術の記述形式にとらわれない極めて自由な記述を見ることができる．

われわれの立場からすれば，『発微算法演段諺解』の演段の記述があれば，『発微算法』の術など不要といってもよいのであるが，関や建部においては，術文というのはあくまでも中国伝来の形式に準拠すべきものであった．それに対して，傍書法に基づく演段という自由な記述形式は，当時の日本の数学が直面した諸問題に対するひとつの解決策であり，日本独自の数学を発展させる原動力であった．堅固な伝統意識に基づく術と，自由な飛躍を目指す演段とは近世初期の日本の数学を直接特徴づけるものであるが，これを伝統の一貫性を保つ方向と自在な発想による多方面への飛躍が混在する文化論的な現象の中に位置づけることも可能かも知れない．

ところで，演段をめぐっては三上義夫や林鶴一などによって議論がなされ，複数の未知数を含む代数方程式系から未知数を消去する方法と定義されている場合もある*7．しかしながらそのようなものばかりが演段ではない．中国伝来の伝統的な術の記述形式以外の，傍書法に基づく記述法を演段といったほうがむしろ適当なのではあるまいか．伏題の場合には伝統的な記述方法がそもそもないのであるから，これは当然演段として記述されることになるが，第2節で挙げた演段の例では，複数の未知数を含む等式の単なる変形が主要な内容である．この演段の問題は今日でも解決は見ていないように思う*8．

5 おわりに

近世日本の数学書を読むときに感ずる難解さと，それにもかかわらず読み進めて行くうちに得られる慣れの感覚の根底には，日本の数学者の持っていた共通の様式感がある．これが今日のわれわれにも共有されているかどうかはわからないのだが，彼らにある種の様式感を感じとることは確かである．その様式感の主要な部分は中国数学において確立した伝統に対する一貫性の意識である．中国数学との一貫性の保持を図りつつ，日本の数学は傍書法によって中国数学が達し得なかった地点へと向かうことができた．最近よく言われるようになった漢字文化圏における数学における，個々の数学のあり方というものを，近世日本の数学は提示しているのではなかろうか*9．

---

*7 三上義夫 [6] 9 ページ，[7] 65 ページおよび注．

*8 林 [5] も参照されたい．

*9 漢字文化圏の数学ということについては王（吉山）[1]，徐 [4] などを参照されたい．

これまで述べてきたことは関孝和や建部賢弘の時代についての議論である．また，ごく少数の例によって考察しただけであって，結論というよりはむしろ作業仮説といった方が適当である．しかし，このような観点から近世日本数学史を全面的に捉える試みにも，あるいは一定の価値があるのではなないかと思う．

文献

[1] 王青翔「日本における中国宋元数学の受容——関孝和の数学の数学的ルーツ——」(東京大学学位論文，1993)．

[2] 小川束『関孝和「発微算法」——現代語訳と解説——』(大空社，1994)．

[3] 小川束「建部賢弘の『算学啓蒙諺解大成』における「立元の法」に関する註解について」『数理解析研究所講究録』1444 (2005)，63–72．

[4] 徐澤林「中日方程論之比較」『自然科学史研究』, Vol. 18, No. 3, 1999, p219.

[5] 林鶴一「天元術及ビ點鼠術ニ就テ」『林鶴一博士和算研究集録』上（林博士遺著刊行会，東京開成館，1937）に集録．（初出は『東北数学雑誌』第 40 巻，1935)．

[6] 三上義夫「関孝和の業績と京坂算家並に支那の算法との関係及び比較（（一)」『数学史研究』第 2 巻第 10 号（(二) は同第 2 巻第 11 号．これらの初出は『東洋学報』第 20 巻第 2 号 (1932) 〜第 22 巻第 1 号 (1935))．

[7] 三上義夫「文化史上より見たる日本の数学」(岩波文庫，1999)．