数理解析研究所講究録
1513巻 2006年 46-51

代数学の基礎とデデキント*

赤堀庸子 (Yoko Akahori)†

1 序

1970年代以降、数学史（科学史）の研究は発展を遂げたといわれる。確かに、重要な先行研究（二次資料）も、一次資料の発掘（書簡や講義録など）もかなり増えてきたことは事実である。しかし、１９世紀の代数学の歴史の状況という点に限れば、着々と進展を遂げてきたというより、いまだ長期戦の最中にあるといった方がよりふさわしいように思える。とりわけ、この時期に起こった代数学（および数学）の根本的な転換をどうとらえるか、という点に注目したとき、目覚しい成果が挙がっているとはまだいい難いようにみえる。

もっとも、このことには理由がないではない。研究の際には、どうしても一人の人物の分析に集中することになる。やむをえないことではあるが、このことが問題の一因ともなるといってよい。個々の研究者が革新的な概念を考え出したとしても、そのことは即数学界全体を変えることにはつながらない。ガロアが “groupe” の語を提出したのは確かだが、それが群論を基礎とした現代代数学の普及までをカバーするわけではない。カントルが集合論について寄与したことは確かだが、それが現代の集合論的思考に基づいた数学の確立に直接力があったわけではない。このように、考え出された概念が基本的、革新的なものであるばあるほど、かの概念の普及には時間もかかり、困難も伴う。一人の人物に集中することで、この普及の過程を記述する方は、置き去りにされがちである。もちろんこうしたことに陥らないように努力を払っている研究も数多くあるが、知名度（数学史界全体への、あるいは数学読書界への）やインパクトは今ひとつであったりもするのが残念である。

筆者は、デデキント（Julius Wilhelm Richard Dedekind,1831-1916 ）の 1850 年代のガロア講義 ([1]) の位置づけを試みようとしてきて、こうした壁にぶつかってきた。その中で、次第に確信するようになってきたことがある。それは、素朴ではあるが、集合論的思考に注目する、ということである。１９世紀にはまだ集合論的思考は定着していないこと、代わりに彼らが依拠していたものは、当時の数学の基礎であったこと、この両方を常に念頭におくことが不可欠ではないかと考えられるのである。当たり前のようなこれらのことを、うまく歴史叙述に取り入れていくのは簡単ではないが、ここでは、いくつかの話題（商群ないし剰余類分解、体論）について述べておきたいと思う。[1]

---

*京都大学数理解析研究所 2005.8.

†erkym@mui.biglobe.ne.jp

[1]本発表は、津田塾大学数学・計算機研究所にて行われた数学史シンポジウムにおける発表（特に [12]）と重複するところがあることをお断りしておく。

2 代数学の基礎

多くの二次文献では、群論、体論、集合論といった基礎概念が、それぞれテクニカルタームとしていかに成熟していくかという点から分析されている。しかるに、いくつかの概念は現在と違う守備範囲を有していたし、その概念が数学全体の中で占める位置づけが現在とは異なっていることもある。これは文献を読んでいれば自然にみてとれることだが、声を大にして語られることが意外と少ないようにみえる。

現代代数学の体系においては、体概念よりも群概念の方が、より基本的な存在であるが、１９世紀の文献では、しばしば体概念の方が、より基本的な存在として捉えられていた。しかも、群概念も体概念も普及してきたと思われる１９世紀末以降にも、そうした傾向が見受けられる。Weber の "Lehrbuch der Algebra"(1890 年代) では、体の理論が群の理論よりもはじめの方におかれている。Bourbaki の "Elements" の草稿段階においてさえ、体の理論の方が先にきていたといわれている。(Beaulieu [2],p.247.)

１９世紀末には、群は数学全体にとって重要であることが認識されてはいたが、演算をひとつしかもたないがゆえにもっとも基本的なものであるとは認識されていなかったのではないか。群はあくまでひとつの有用な道具としての位置づけだったのではないだろうか。そもそも演算がひとつしかないからもっとも基本的であるという思考法は、現代代数学の思考法そのものである。

一方、体論（に相当するもの）は初めから、それ自体が数学の基礎とみなされていたように思える。１９世紀（あるいはもっと後）まで、数学は「量の科学」とみなされていた。多くの数学者が、量の理論や、数の基礎づけの試みに関わった。デデキントもその一人である。後に少し詳しく述べるが、デデキントが 1871 年に発表した体論も、数学全体（数論や代数学全体）の基礎であることが意図されていたように思われる。

もうひとつ注意しておきたいことは、デデキントのゲッティンゲン時代の先輩、リーマン（Georg Friedrich Bernhard Riemann,1826-1866) による多様体論 (Mannigfaltigkeitslehre) のことである。[2]これは、n 次元の一般量論として考察されたものであった。数学史家フェレイロスは、Mannigfaltigkeitslehre を、幾何学の範囲に限定して解釈すべきでないと主張する。カントルの集合に関する論考のタイトルに、Mannigfaltigkeitslehre の語が用いられていることからも、リーマンの仕事は集合論の先駆の役割を果たしたともいえるであろう。([3],[4]) こうしたことは、代数学の基礎の歴史にとって重要な要素になっていくと思われる。

最後にもうひとつだけ注意をしておきたいことがある。世紀転換期に出た "Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften"(1898–1935) などにおける当時の学問分類をみると、Arithmetik の下位概念として、集合や（有限）群が（同格の立場で）あがっているのが分かる。([12],pp.97-98,101-102.) 新旧のパラダイムが共存しているこうした状況が、長期間続いていたのである。

2.1 商群の概念

ここで、１９世紀中葉から後半における、商群（ないしは剰余類分解）の概念の理解（定式化）について述べてみたい。(詳細は拙稿 [10],[11]) 群の概念が次第に定着してきたこの時期、商群（ないしは剰余類分解）の定式化が意外にうまくいっていないように見受けられるのである。

１９世紀中葉の群概念に相当するものに関する論考は、1844 年のコーシー（Augustin-Louis Cauchy,1789-1857）の置換論と、1854 年のケイリー (Arthur Cayley,1821-1895) の抽象群論、1850 年代後半 (1856–58) のデデキントの（ゲッティンゲン大学における私講師の講義）代数学講義 ([1])

[2]1854 年 6 月の就職講演で発表された。デデキントも同じ月に就職講演を行っている。

である。このうち、コーシーのものがもっとも大部で体系的、影響力もあったようである。一方、ケイリーのアプローチは、(特に大陸への) 影響が少なかったとはいえ、革新的であるとされている。(イギリス記号代数学派の影響を受け、群の各元に相当するものをsymbolであると述べた。群表をあげ、位数の低い群の分類をやっている。)

筆者が不思議に思ったのは、このケイリーが晩年になって、ヘルダー (Otto Ludwig Hölder,1859-1937) の論考にある G/H なる記号法を拒否していること、のみならず、1854年論文の続きでも、商群概念の理解についていちじるしく要領の悪いところをみせていることであった。それはコーシーにおけるコセット分解よりはるかに劣るといえるものである。(もちろんimplicitには捉えられているのではあるが)

また、ジョルダン (Marie Ennemond Camille Jordan,1838-1922) の論考 (1870)、ヘルダーの論文 (1889) においても、そのコセット分解の記述はコーシーのものと同じ図式にたよっており、我々の感覚とはまだへだたりがある。

ここでちなみに、、これらの著作の剰余類分解の図式をあげておくこととする。

コーシーの場合 ([5], 第6節定理1)

$$\begin{array}{ccccc} 1, & P, & Q, & R, & \cdots \\ U, & UP, & UQ, & UR, & \cdots \\ V, & VP, & VQ, & VR, & \cdots \\ W, & WP, & WQ, & WR, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

ジョルダンの場合 ([7], 第2部第1章第1節第38項)

$$\begin{array}{cccc} 1, & S_1, & \cdots & S_{n-1} \\ \Sigma, & \Sigma S_1, & \cdots & \Sigma S_{n-1} \\ \Sigma_1, & \Sigma_1 S_1, & \cdots & \Sigma_1 S_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

ヘルダーの場合 ([8], 第4節)

$$\begin{array}{cccc} B, & B_1, & B_2, & \cdots \\ S_1B, & S_1B_1, & S_1B_2, & \cdots \\ S_2B, & S_2B_1, & S_2B_2, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{n-1}B, & S_{n-1}B_1 & S_{n-1}B_2, & \cdots \end{array}$$

コーシーの著作の発表から40年が過ぎ、群概念も普及してきたと思われるこの時期に、このような図式が書かれているのは少し意外である。2次元的な広がりをもつ概念を、そのまま理解することが難しかったのだろうか。

これらと比べると、デデキントの仕事は (特に集合論的思考において) 優れたところを示している。1850年代後半に行われた代数学講義 [1] を少しみてみよう。内容は、置換論、ラグランジュの方程式論、ガロアの方程式論について自らの解釈で再編集をほどこしたものである。

第1節が置換論であり、まず置換の一般的な説明、そして置換の積の定義の説明がなされる。

デデキントは、積の基本的な性質として、結合律、簡約律が成り立つことを述べる。(簡約律は、元の個数が有限の場合は、現在の単位元の存在および逆元の存在、と論理的に同値になる。) さらに興味深いことに、デデキントはこの二つの法則に公理的性格をもたせることができる旨の発言をしている。

> これから続く研究は、今証明した両定理（筆者注：結合律と簡約律のこと）と、置換の数が有限である、ことのみに基づくのである。同じ結果が、有限の要素、又は事物、又は概念 $\theta, \theta', \theta'' \cdots$ の領域— θ, θ' から定義された積の様なもの θ, θ' が、同じ領域の元になり、かつこの積が上記二法則に従う、そういう積の定まった領域—に対しあてはまる。
>
> 数学の多くの分野で、すなわち数論や代数においては、この理論に対する無尽蔵ともいえるほどの例を見出せる。証明の方法は、さきに述べたと同じでよい。しかし、簡単のため、我々は置換論の語はそのままにしておこう。ただし、後に（第６項）この一般的解釈を使うのであるが。

第４項において、群 (Gruppe) の語が現れる。ここでは積で閉じた（置換の）集まりが群であると定義される。準備ののち、次の定理が証明される。

> 定理５．ＧとＫの両方が群であり、ＫがＧに含まれるならば、Ｋの度数（Grad）はＧの度数の約数である。

デデキントはここでＫをＧの約子 (Divisor) といっている。

証明の方針はコーシーのものと同じである。デデキントは剰余類分解を次のように書き下している。

$G = K + K\theta_1 + K\theta_2 + \cdots\cdots + K\theta_{n-1}$

剰余類分解の記述に、元たちを一括してとらえた記号を用いている点では、集合論的理解が非常に進んでいるといってよいだろう。（記号の説明もあらかじめきちんとしてある。）

第６項では商群概念の定式化が行われている（Substitutions-Körper という語を用いている）。正規部分群に相当するもの（eigentliche Divisor) が定義された後、その部分群による剰余類たちの集まりがふたたび群とみなせることを、結合律、簡約律が成り立つことによって示している。「置換体」なる語を用いたのは、「置換的なるもの」くらいの意味合いだったと思われる。（整数の場合と違い、置換群から作られる商群はもはや置換群ではないことに注意。）

ここでデデキントは、商群という新しい概念を得るにあたって、第２項のおわりにある公理的な思考を利用した。同時に、第２項の終わりに書き記した公理的思考法が、商群の概念を得ることによって、より確かなものとなったとみてよいだろう。ここにあるのは、まぎれもない集合論的思考そのものであるといえる。

集合論の受容ということでしばしば話題にとりあげられるのは、無限をめぐる議論であろう。もちろん無限の問題は重要であるが、集合論的思考の普及を阻んだものが無限だけではないようにみえる。無限も含めて、集合（かたまりで考えること？２次元的な思考法？）そのものを受け容れることに躊躇があったように思える。（ここでもまた、リーマンのデデキントへの影響の可能性が浮かび上がる。）

3

---

[3]ここで誤解のないように一言付け加えておくなら、ある数学者が集合を受け容れているか否かということは、その数学者の総合的な評価とはとりあえず別ものであるとしておきたい。話が横道にそれるが、次のようなことを考えてみよう。我々はパソコンのファイルのありかを示すのに、（たとえば C:¥Programs¥Hidemaru¥Hidemaru.exe といったような形で）パスという表現を使用する。これは、よく考えてみると、C: ⊃ Programs ⊃ Hidemaru ∋ Hidemaru.exe とでも書くべきものであろうが、そうした解説がパソコンの参考書でなされているのを見かけたことはない。（文字コードの問題などもあろうが。）ちなみに、パスという表現もよく考えれば妙である。（これはたとえば、東京都から新宿区へと連なる道が定義されていながら、新宿区と渋谷区を結ぶ道は定義されていないという状況に匹敵する。）それでも、この定義によりファイルの場所は一意的に示せているので、パスという概念に対して批判が出ることもない。こうして、「集合論を利用しないがために複雑になっている概念」というものが、現代にも一応存在することになる。これが良いたとえかどうか分からないが、集合論的思考の普及の遅れを理解する一助にはなるのではないか。

2.2 体（Körper）について

体の概念の歴史に関する筆者なりの注意については既に述べたが、ここでデデキントが定義した体（Körper）について簡単にみておこう。

体（Körper）が定義されたのは、デデキント『ディリクレ整数論講義付録（1871）』の第159節においてである。

> 体，というのは無限個の実または複素数の総体で，それ自身完結していて完全であるもの，すなわち任意の二数の加法，減法，乗法，除法から同じ総体の数を生じることをいう．

デデキントの定義は、表面上は数の範囲にとどまっているようにみえる。しかしこれが、数学全体の基礎も念頭におかれていると思われるということは、既に述べた。実は、未発表の原稿の中に、Körper という語で定義された別の概念（２種類）がある。

ひとつは既に述べたように、ガロア講義の中で、商群の概念を表すのに Substitutions-Körper の語を用いているものである。[4]

もうひとつには、点集合論に関する考察で、ここでは開集合に対して「体」の語が使われている。

> 空間についての一般的諸定理
>
> １．点 $p, p', \cdots$ たちの総体 (System)P が体（Körper）をなすとは，各々 p に対して，δ が定まり，p からの距離が δ より小さいような全ての点たちがまた P に属す，ことをいう．点 $p, p', \cdots$ たちは P の内部にある。
>
> ２．P' が体で，その全ての点が P にあるとき，P' は P の部分者であるという．
>
> ３．定理．ある定点 P から，与えられた長さ δ より短い距離にあるすべての点は体をなす．(以下略) —[5]

このように、現在からみれば、数体よりも抽象的な対象が Körper の語に付与されていた。しかし、それらを公開されず、結局数体の意味に限定されたものが発表された。デデキントの意図を理解するには、こうした経過をふまえておく必要があるだろう。

結局、体は、群に代数学における基本的地位を明け渡すことによって、現代代数学の確立に貢献することとなる。Körper の元の意味合いを考えれば、これはいささか皮肉なことであるのかもしれない。

3 結び

歴史叙述がらみのコメントで終始してしまったが、大切なのは原典を読むことであるのはいうまでもない。デデキントの著作は、革新的でありながら、その語り口は丁寧である。読み手の側も、あまり乱暴な仕事は許されないであろう。

参考文献

[1] Richard Dedekind,"Eine Vorlesung über Algebra", in:W.Scharlau,hrsg.," Richard Dedekind 1831–1981", (Braunschweig/Wiesbaden,1981).S.59–100.

[4][1]. なお、体概念に相当するものには、Gebiet の語が用いられている。
[5][9],S.353.Ferreirós はこれを 1860 年代に書かれたものと推測している。[3],p.28.

[2] Liliane Beaulieu,"Dispelling a Myth:Questions and Answers about Bourbaki's Early Work,1934–1944",in; Sasaki,Sugiura,Joseph W.Dauben eds.,"The Intersection of History and Mathematics",(Birkhäuser,1994)pp.241–252.

[3] José Ferreirós,"Traditional logic and the early history of sets,1854-1908", AHES 50(1996),pp.5–71.

[4] José Ferreirós,"Labyrinth of Thought:a history of set theory and its role in modern mathematics" (Birkhäuser,1999)

[5] A.L.Cauchy,"Mémoire sur les arrangements que l'on peut former avec des lettres données et surles permutations ou substitutions à l'aide desquelles on passe d'un arrangement à un autre" (1844); Oeuvres(2)13,pp.171–282.

[6] A.Cayley,"On the theory of groups as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$." Philosophical Magazine,(1854) pp.40–47.

[7] C.Jordan,"Traité des substitutions et des équations algébrique",(Paris,1870)

[8] O.Hölder,"Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen",Mathematische Annalen 34(1889),S.26–56.

[9] R.Dedekind,"Allgemeine Sätze über Räumen", Gesammelte mathematische Werke II,S.353–355.

[10] 赤堀庸子,『ケイリーとデデキント—１８５０年代の群概念』第 10 回数学史シンポジウム (1999)(津田塾大学数学・計算機科学研究所報 20,2000)pp.27–43.

[11] 赤堀庸子,『いわゆる「ラグランジュの定理」について』第 12 回数学史シンポジウム (2001)(津田塾大学数学・計算機科学研究所報 23,2002)pp.133–143.

[12] 赤堀庸子,『１９世紀代数学史の Histriography について』第 14 回数学史シンポジウム (2003)(津田塾大学数学・計算機科学研究所報 25,2004)pp.95–102