

## 拡張 Hensel 構成と多変数代数関数の特異性\*

佐々木 建昭 ( Tateaki Sasaki ) †

筑波大学 数学系

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA

稲葉 大樹 ( Daiju Inaba ) ‡

筑波大学 ベンチャービジネスラボラトリー

VENTURE BUSINESS LAB., UNIVERSITY OF TSUKUBA

片町 健太郎 ( Kentaro Katamati ) §

岩手県立大学 ソフトウェア情報学部

DEPT. SOFTWARE SCI., IWATE PREFECTURAL UNIVERSITY

### Abstract

3個以上の変数からなる多変数多項式  $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$  を拡張 Hensel 構成すると、Hensel 因子の係数部には一般に従変数  $u_1, \dots, u_\ell$  に関する有理式が現れる。一方、 $F$  の (主変数  $x$  に関する) 根として、従変数の代数関数  $\chi(u_1, \dots, u_\ell)$  が定まる。本論文はヘンゼル因子の係数部の有理式の分母の零点と  $\chi(u_1, \dots, u_\ell)$  の特異性との関係を明らかにし、拡張 Hensel 構成の有用性をアピールする。

### 0 はじめに

$F(x, u_1, \dots, u_\ell)$  は  $\mathbb{C}$  上の既約多変数多項式とする。 $F(x, s_1, \dots, s_\ell) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, s_1, \dots, s_\ell) = 0$  を満たす点  $(s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$  を Hensel 構成の特異点あるいは単に特異点と呼ぶ。 $(\alpha, s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^{\ell+1}$  が代数幾何の特異点であれば、 $(s_1, \dots, s_\ell)$  は Hensel 構成の特異点である。一般 Hensel 構成は特異点では破綻するが、特異点での Hensel 構成を可能にしたのが拡張 Hensel 構成である [Kuo89, SK93, SK99, SI00]。簡単のため以下では  $(u_1, \dots, u_\ell)$ ,  $(s_1, \dots, s_\ell)$  をそれぞれ  $(u)$ ,  $(s)$  と表す。

拡張 Hensel 構成はこれまで、特異点を經由する代数関数の解析接続 [SS96]、特異点近傍での一般 Hensel 構成の誤差解析 [SY98]、3 変数以上の多項式の解析的因数分解 [Iwa03, Iwa04]、多変数多項式の因数分解における非零代入問題の解決 [Ina05] などで、顕著な成果を挙げている。

2 変数多項式の場合、 $F(x, u_1)$  の根  $\chi(u_1)$  は特異点では Puiseux 級数に展開できる。3 変数以上の場合、 $F(x, u)$  の  $x$  に関する根  $\chi(u)$  は、特異点では  $u_1, \dots, u_\ell$  の各変数について分数べきの多変数 Puiseux 級数として表すことができる [McD95]。しかし、根  $\chi(u)$  の特異性は多変数 Puiseux 級数からはよく分らない。拡張 Hensel 構成で得られる級数根は、従変数  $u_1, \dots, u_\ell$  の斉次有理式 (分子と分母が共に斉次多項式) を係数とする (重み付き) 全次数の分数べき級数となり、 $\chi(u)$  の特異性が Hensel 因子に直接的に反映される。特に、Hensel 因子の係数部の有理式の分母が 0 になる点で何が起きるか、興味が湧く。本稿は 3 変数以上 ( $\ell \geq 2$ ) の場合にその疑問に答えるものである。

\*Work supported in part by Japanese Ministry of Education, Science and Culture under Grants 15300002.

†sasaki@math.tsukuba.ac.jp

‡inaba@math.tsukuba.ac.jp

§katamati@soft.iwate-pu.ac.jp

# 1 Newton 多項式と Moses-Yun の多項式

一般性を失うことなく原点が特異点であると仮定し、根  $\chi(\mathbf{u})$  の原点近傍での振舞いを考察する。

多項式  $F(x, \mathbf{u})$  に対し、主変数  $x$  に関する次数を  $\deg(F)$ 、主係数を  $\text{lc}(F)$  と表す。従変数  $u_1, \dots, u_\ell$  に対しては (重み付き) 全次数で扱い、 $f(\mathbf{u})$  の全次数を  $\text{tdeg}(f)$  と表す。また、位数 (各項の全次数のうち最小のもの) を  $\text{ord}(f)$  と表す。拡張 Hensel 構成では従変数に関する有理式を扱うが、有理式  $g(\mathbf{u})/h(\mathbf{u})$  の位数は  $\text{ord}(g/h) = \text{ord}(g) - \text{ord}(h)$  と定める。 $g_i(\mathbf{u})$  と  $h_j(\mathbf{u})$  を (重み付き) 全次数がそれぞれ  $i$  と  $j$  の項のみからなる斉次多項式とすると、 $g_i(\mathbf{u})/h_j(\mathbf{u})$  を位数  $i-j$  の斉次有理式と呼ぶ。C 上の位数が非負の斉次有理式全体からなる環を  $C\{\{\mathbf{u}\}\}$  と表す。P と Q の終結式を  $\text{res}(P, Q)$  と、剰余を  $\text{rem}(P, Q)$  と表す。

多項式  $F(x, \mathbf{u})$  の項  $c x^{e_x} u_1^{e_1} \dots u_\ell^{e_\ell}$  を 2次元平面上的点  $(e_x, e_t)$  にプロットする。ここで、 $e_t$  は従変数に関する全次数  $e_t = e_1 + \dots + e_\ell$  または重み付き全次数  $e_t = w_1 e_1 + \dots + w_\ell e_\ell$  ( $w_i \in \mathbb{N}$ ) である。図1は  $F$  の全ての項のプロットを例示したものである。全プロット点の凸包を  $\mathcal{N}$  とし、Newton 多角形と呼ぶ。 $\mathcal{N}$  の下辺を右から順に  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_q$  とする。最右の  $\mathcal{L}_1$  上にプロットされた全ての項の和を Newton 多項式と名付け、 $F_{\text{New}}$  と表す。 $\mathcal{L}_j$  上にプロットされた項の和も Newton 多項式と呼び  $F_{\text{New}_j}$  と表すが、 $F_{\text{New}_j}$  は  $\mathcal{L}_j$  上の項の和を  $x^{n_{j+1}}$  で割り、常に  $x^0$ -項を持つようにする： $F_{\text{New}_1} = F_{\text{New}}/x^{n_2}$ 。

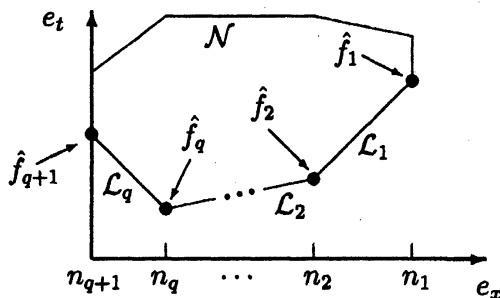


図1 Newton 多角形  $\mathcal{N}$  と下辺  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_q$

$F_{\text{New}_j} =$  辺  $\mathcal{L}_j$  上にプロットされる項の和  $/x^{n_{j+1}}$

$\hat{f}_j =$  辺  $\mathcal{L}_j$  の右端点にプロットされる項の和  $/x^{n_j}$

$n_j =$  辺  $\mathcal{L}_j$  の右端点の  $e_x$  座標 ( $n_{q+1} = 0, n_1 = n$ )

Newton 多項式  $F_{\text{New}}$  の既約因数分解を次式とする ( $H_1, \dots, H_r$  は既約多項式)。

$$\begin{cases} F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) = G_1(x, \mathbf{u}) \dots G_r(x, \mathbf{u}), & \text{gcd}(G_i, G_j) = 1 \quad (i \neq j), \\ G_i(x, \mathbf{u}) = H_i(x, \mathbf{u})^{m_i} & (i = 1, \dots, r). \end{cases} \quad (1)$$

ここで、因数分解は多項式環  $C[x, \mathbf{u}]$  内でも、代数関数  $\theta_1, \dots, \theta_s$  を添加した拡大体  $C(\mathbf{u})[\theta_1, \dots, \theta_s, x]$  内でもよい。 $r = 1$  の場合は4章で考察し、本章では  $r \geq 2$  とする。 $r \geq 2$  の場合、次式を満たす関数  $W_i^{(l)}$  ( $i = 1, \dots, r; l = 0, \dots, n-1$ ) が存在する。 $W_1^{(l)}, \dots, W_r^{(l)}$  を Moses-Yun の多項式と呼ぶ。

$$\begin{cases} W_1^{(l)} \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{G_1(x, \mathbf{u})} + \dots + W_r^{(l)} \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{G_r(x, \mathbf{u})} = x^l & (l = 0, \dots, n-1), \\ \deg(W_1^{(l)}) < \deg(G_1), \dots, \deg(W_r^{(l)}) < \deg(G_r). \end{cases} \quad (2)$$

下辺  $\mathcal{L}_1$  の傾きを  $\lambda$  (図1では正だが、負の場合もある) とし、正整数  $\hat{n}$  と  $\hat{\nu}$  を  $\hat{\nu}/\hat{n} = |\lambda|$ ,  $\text{gcd}(\hat{n}, \hat{\nu}) = 1$  を満たすように決める。拡張 Hensel 構成は、 $\mathcal{L}_1$  を含む直線を上方方向に  $1/\hat{n}$  ずつ平行移動しながら、その直線上にある項を次々に取り込みつつ、 $k$  回後には

$$\begin{cases} F(x, \mathbf{u}) \equiv F_1^{(k)}(x, \mathbf{u}) \dots F_r^{(k)}(x, \mathbf{u}) \pmod{I^{k+1}}, \\ F_i^{(k)}(x, \mathbf{u}) \equiv G_i(x, \mathbf{u}) \pmod{I} & (i = 1, \dots, r), \end{cases} \quad (3)$$

となる  $F_1^{(k)}, \dots, F_r^{(k)}$  を構成する。( $\pmod{I^{k+1}}$  は、 $\mathcal{L}_1$  を上方方向に  $k/\hat{n}$  移動した直線より上にある項を全て棄却することを意味する)。

## 2 原点 (特異点) 近傍での $\chi(\mathbf{u})$ の振舞い

与式  $F(x, \mathbf{u})$  の主係数を  $f_n(\mathbf{u})$  とする。  $f_n(\mathbf{s}) \neq 0$  なる点  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^l$  では 1 変数多項式  $F(x, \mathbf{s})$  の根は有界である。主係数の零点上では  $F(x, \mathbf{u})$  の少なくとも一つの根は無限大に発散する。

次に特異点である原点近傍での根の振舞いを考察する。原点近傍では高次項は無視できるから、根  $\chi(\mathbf{u})$  の振舞いは Newton 多項式でほぼ決まる。すなわち、Newton 線  $\mathcal{L}_1$  の傾き  $\lambda$  が正 (または負) の場合、  $(u_1, \dots, u_\ell) \rightarrow (0, \dots, 0)$  とともに  $\chi(\mathbf{u})$  は  $\infty$  (または 0) になる。そこで、Newton 線の傾きによらず根の振舞いを議論するため、“規格化根 (scaled root)”  $\bar{\chi}(\mathbf{u})$  を次式で定める。

$$\bar{\chi}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{u}|^\lambda \chi(\mathbf{u}), \quad |\mathbf{u}| \stackrel{\text{def}}{=} (|u_1|^2 + \dots + |u_\ell|^2)^{1/2}. \quad (4)$$

5章で説明するように、  $F(x, \mathbf{u})$  の全ての根の振舞いが  $\mathcal{L}_1$  の傾き  $\lambda$  で決まるのではなく、  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_q$  のそれぞれの傾き  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$  で決まる  $q$  個のグループに類別される。本章では、そのうち  $\lambda_1 (= \lambda)$  で決まる根のみを考察する。  $\lambda_1$  で規定される根  $\bar{\chi}(\mathbf{u})$  は、  $f_n(\mathbf{s}) \neq 0$  なる  $\mathbf{s}$  に対しては  $\lim_{\mathbf{s} \rightarrow 0} \bar{\chi}(\mathbf{s}) = \text{有限}$  となる。

Newton 線  $\mathcal{L}_1$  で規定される全ての規格化根が  $f_n(\mathbf{u})$  の零点で発散するわけではない。拡張 Hensel 構成の第一段階では、(1) の初期因子  $G_1, \dots, G_r$  として  $x$  と  $\mathbf{u}$  の多項式を用いる。  $F$  の各根は  $F_1^{(\infty)}, \dots, F_r^{(\infty)}$  の根に分配されるので、次の定理を得る。(実際には主係数  $f_n(\mathbf{u})$  の各因子を  $G_1, \dots, G_r$  へ分配する操作が必要だが、それは根  $\chi(\mathbf{u})$  の原点近傍での振舞いには影響を及ぼさない)。

**定理 1** 各  $i \in \{1, \dots, r\}$  に対し、初期因子  $G_i(x, \mathbf{u})$  は  $\mathbb{C}[x, \mathbf{u}]$  の要素とする。  $G_i$  に対応する Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  の規格化根の少なくとも一つは、  $\text{lc}(G_i)$  の零点に沿って原点に近づくときにのみ発散する。  $\square$

## 3 初期因子が多項式の場合の拡張 Hensel 構成

一般 Hensel 構成では、初期因子は 1 変数多項式ゆえ、Moses-Yun 多項式も 1 変数多項式となる。しかし、拡張 Hensel 構成では Newton 多項式が多変数多項式ゆえ、Newton 多項式をどの範囲で因数分解するかにより、得られる Hensel 因子は大きく異なる。本章では、Newton 多項式を  $\mathbb{C}[x, \mathbf{u}]$  内で因数分解した場合を考察する。この場合、Moses-Yun 多項式  $W_i^{(l)}$  ( $l = 0, \dots, n-1$ ) は一般に  $\mathbf{u}$  に関する有理式となる。まず、  $W_i^{(l)}$  の分母因子を解明する。

$\tilde{G}_i = F_{\text{New}}/G_i$  とおく。  $W_i^{(0)}$  は  $V_i^{(0)}G_i + W_i^{(0)}\tilde{G}_i = 1$ ,  $\deg(W_i^{(0)}) < \deg(G_i)$ , の ( $x$  に関する) 多項式解として一意的に定まる (具体的には拡張互除法で計算できる)。

$$G_i = g_m x^m + \dots + g_1 x + g_0, \quad \tilde{G}_i = \tilde{g}_{n'} x^{n'} + \dots + \tilde{g}_1 x + \tilde{g}_0 \quad (n' = n - m) \quad (5)$$

とおけば、  $W_i^{(0)} = W/\text{res}(G_i, \tilde{G}_i)$  と定まる。ここで、  $W$  は次の行列式である。

$$W = \begin{vmatrix} g_m & \cdots & g_1 & g_0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ & & g_m & \cdots & g_1 & 0 \\ \tilde{g}_{n'} & \cdots & \tilde{g}_1 & \tilde{g}_0 & & x^{m-1} \\ & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ & & \tilde{g}_{n'} & \cdots & \tilde{g}_1 & x^0 \end{vmatrix}.$$

次に、  $W_i^{(l)}$  ( $l = 1, 2, \dots, n-1$ ) は逐次算式  $W_i^{(l)} = \text{rem}(xW_i^{(l-1)}, G_i)$  で計算できる。この算式によれば、  $W_i^{(l)}$  には  $\text{lc}(G_i) = g_m$  のべき乗が分母に入り込むように見える。驚くべきことに、  $W_i^{(l)}$  の分母因子には  $g_m$  は現れず、次の命題が成立する (証明は英語論文 [SIK05] を参照されたい)。

**命題 1**  $W_i^{(l)} = N_i^{(l)} / \text{res}(G_i, F_{\text{New}}/G_i)$  と表せば、 $N_i^{(l)} \in \mathbb{C}[x, u]$  ( $0 \leq l \leq n-1$ ) である。(分母の終結式のいくつかの因子は分子  $N_i^{(l)}$  の因子とキャンセルすることがある)。□

拡張 Hensel 構成の算式によれば、Hensel 因子に現れる分母因子は Moses-Yun 多項式分母因子のみであることがわかる。したがって、上記命題より直ちに次の定理を得る。

**定理 2** 拡張 Hensel 構成の初期因子が  $x$  と  $u$  の多項式であるとき、Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}(x, u) \in \mathbb{C}\{(u)\}[x]$  の係数部に現れる有理式分母因子は  $\text{res}(G_i, F_{\text{New}}/G_i)$  の因子の巾乗のみである。□

## 4 代数関数を初期因子に含む拡張 Hensel 構成

前章の拡張 Hensel 構成を実行したあとの Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  を改めて  $F(x, u)$  と名付けるならば、 $F(x, u)$  の Newton 多項式は  $F_{\text{New}}(x, u) = H(x, u)^m$ ,  $\deg(H) = s, \text{lc}(H) = h_s(u)$ , となる。ここで  $H(x, u)$  は  $\mathbb{C}[x, u]$  内の既約多項式である。主係数  $h_s(u)$  の零点での根  $\chi(u)$  の振舞いは 2 章で議論したから、本章では  $H(x, u) \mapsto h_s^{s-1} H(x/h_s, u)$  なる変換を施し、以後、 $H(x, u)$  は  $x$  についてモニックと仮定する。

$\deg(H) = s \geq 2$  のとき、 $H(x, u)$  は  $\mathbb{C}$  上で既約な多項式ゆえ、形式的に次のように因数分解できる。

$$H(x, u) = (x - \theta_1) \cdots (x - \theta_s), \quad \theta_1, \dots, \theta_s \text{ は互いに共役な代数関数。} \quad (6)$$

$F(x, u)$  は互いに素な多項式  $(x - \theta_1)^m, \dots, (x - \theta_s)^m$  を初期因子として拡張 Hensel 構成できる。この場合、Moses-Yun 多項式と Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  の形について次の定理が得られている [SK99]。

**定理 3 (Sasaki and Kako)**  $F_{\text{New}}(x, u) = H(x, u)^m$  であるとき、Moses-Yun の多項式  $W_i^{(l)}$  と Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  ( $i = 1, \dots, s$ ) は次の形となる。(全次数変数に関する分数べきは  $\theta_i$  を通じて現れる)。

$$\begin{cases} W_i^{(l)} = w_{s-1}^{(l)}(x, u) \theta_i^{s-1} + \cdots + w_0^{(l)}(x, u) \theta_i^0, & w_j^{(l)}(x, u) \in \mathbb{C}(u)[x] \quad (j = s-1, \dots, 0), \\ F_i^{(\infty)} = C_{s-1}^{(\infty)}(x, u) \theta_i^{s-1} + \cdots + C_0^{(\infty)}(x, u) \theta_i^0, & C_j^{(\infty)}(x, u) \in \mathbb{C}\{(u)\}[x] \quad (j = s-1, \dots, 0). \end{cases} \quad (7)$$

Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  は  $u$  の (重み付き) 齊次有理式を係数とする  $x$  と  $\theta_i$  の多項式となるが、前章と同様の終結式の議論より、係数部の有理式分母に関して次の定理が得られる。

**定理 4** (7) 式の  $C_j^{(\infty)}(x, u)$  の分母因子は  $\text{res}(H, \partial H / \partial x)$  の因子の巾乗のみである。□

Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  の有理式係数の分母の零点で何が起きるか考察しよう。分母の零点では個々の係数は発散するが、第 2 章で見たように、規格化根  $\chi(u)$  が発散する訳ではない。定理 2 および定理 4 より、分母の零点は終結式  $R_G = \text{res}(G_i, F_{\text{New}}/G_i)$  および  $R_H = \text{res}(H, \partial H / \partial x)$  の零点である。これら終結式の零点を  $u_0$  とする。従変数が 2 個以上と仮定しているので、終結式の零点は原点近傍で曲線あるいは曲面を形成するはずである。したがって、 $u_0$  は終結式 = 0 を満たしながら動くパラメータとみなす。

$R_G(u_0) = 0$  の場合、 $H_i$  と  $H_j$  ( $j \neq i$ ) が  $u_0$  上で共通因子を持つ。 $u \neq u_0$  では  $H_i$  と  $H_j$  は異なる既約多項式だから、このことは  $u_0$  上で  $H_i$  (の全部または一部) が別の既約多項式  $\tilde{H}_i$  になることを意味する。前章までの議論によると、根  $\chi(u)$  の原点近傍での振舞いは Newton 多項式の既約因子で決定されるから、 $H_i$  が  $\tilde{H}_i$  に変わると根  $\chi(u)$  の振舞いも変わる。 $u_0$  上で Newton 線の傾きが変わる場合は根  $\chi(u)$  の位数が変わり、Newton 線の傾きが変わらない場合でも代数関数  $\theta_1, \dots, \theta_s$  が変わる。しかも後者の場合、本章の最後で述べるように、新しい級数が発生する。 $R_H(u_0) = 0$  の場合も同様である。

**例 1**  $F(x, u, v) = x^6 + 2x^4(u+v) + x^2[u^2+v^2 - 2(u^3+v^3) + u^5+v^5] - 2uv(u+v) + u^5+v^5$ .  
Newton 多項式とその  $\mathbb{C}[x, u, v]$  内での因数分解は  $F_{\text{New}} = [x^2 + u + v] \cdot [x^4 + x^2(u+v) - 2uv]$  となる。

$G_1 = x^2 + u + v$ ,  $G_2 = x^4 + x^2(u+v) - 2uv$  とおけば,  $\text{res}(G_1, G_2) = -2uv$  であり, Moses-Yun 多項式は分母因子として  $uv$  を持つ. Hensel 因子  $F_1^{(2)}$  と  $F_2^{(2)}$  は次式となり,  $u = 0$  および  $v = 0$  で発散する.

$$\begin{aligned} F_1^{(2)} &= [x^2 + u + v] - [(u^3 + v^3)(u+v)/uv], \\ F_2^{(2)} &= [x^4 + x^2(u+v) - 2uv] + [x^2(u^3 + v^3)(u+v)/uv - 2(u^3 + v^3)]. \end{aligned}$$

$u = 0$  では,  $\tilde{F}(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, 0, v) = x^6 + 2x^4v + x^2(v^2 - 2v^3 + v^5) + v^5$  となり,  $\tilde{F}_{\text{New}}(x, v) = (x^2 + v)^2 x^2$  となって,  $(x^2 + v)^2$  および  $x^2$  に対応する 6 次の Hensel 因子として次式を得る.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1^{(6)} &= [x^4 + 2x^2v + v^2] - [2v^3] - [x^2v^3 + 2v^4] - [2x^2v^4 + 3v^5], \\ \tilde{F}_2^{(6)} &= x^2 + v^3 + 2v^4. \end{aligned}$$

原点近傍では,  $F_1^{(\infty)}$  の根  $\chi_1(u, v)$  は  $\chi_1(u, v) \sim \pm\sqrt{-u-v}$  と振舞い,  $F_2^{(\infty)}$  の根の振舞いは  $\chi^4 + \chi^2(u+v) - 2uv = 0$  で定まる.  $u = 0$  では  $F_2^{(0)}$  は二つの既約成分に分裂し, そのうち一つは  $F_1^{(0)}$  と合流する. 合流成分に対応する因子  $\tilde{F}_1^{(\infty)}$  の根  $\tilde{\chi}_1(v)$  は, 原点近傍では  $\tilde{\chi}_1(v) \sim \pm\sqrt{-v}$  と振舞い,  $\chi_1(0, v)$  の振舞いと一致する. しかし, あとで見るように, 新しい級数が発生する. 一方,  $\tilde{F}_2^{(\infty)}$  の根  $\tilde{\chi}_2(v)$  は原点近傍では  $\chi_2(v) \sim \pm(-v)^{3/2}$  と振舞う.  $F_2^{(\infty)}$  と  $\tilde{F}_2^{(\infty)}$  の Newton 線の傾きはそれぞれ  $-1/2, -3/2$  であり,  $\chi_2(u, v)$  に比べて  $\tilde{\chi}_2(v)$  の位数が増加している.  $\square$

例 2  $F(x, u, v) = x^2 + x(u+v+u^2v-uv^2) + (u^2-v^2+u^4+v^4)$ .

Newton 多項式  $F_{\text{New}}$  とその因数分解は次式となるので,  $(x-\theta_1)$  と  $(x-\theta_2)$  を初期因子に選ぶ.

$$F_{\text{New}} = H(x, u, v) = x^2 + x(u+v) + (u^2-v^2) = (x-\theta_1)(x-\theta_2).$$

$R(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \text{res}(H, \partial H / \partial x) = (u+v)(3u-5v)$  ゆえ, Moses-Yun 多項式  $W_i^{(1)}$  および Hensel 因子  $F_i^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ) の分母には  $R(u, v)$  が現れるはずである. 実際, 4 次まで拡張 Hensel 構成すると次式を得る.

$$\begin{aligned} F_i^{(4)} &= x - (u+v)(u^4 - 2u^3v + 4u^2v^2 - 2uv^3 + v^4) / R(u, v) + (u+v)C_4 / R(u, v)^2 \\ &\quad + \theta_i[-1 - (2u^4 - u^3v + uv^3 + 2v^4) / R(u, v) + 2C_4 / R(u, v)^2], \\ C_4 &= u^8 - u^7v + u^6v^2 - u^5v^3 + 2u^4v^4 + u^3v^5 - u^2v^6 + uv^7 + v^8. \end{aligned}$$

原点近傍では,  $F(x, u, v)$  の根  $\chi(u, v)$  は  $\chi(u, v) \sim [-(u+v) \pm \sqrt{-3u^2 + 2uv + 5v^2}] / 2$  と振舞い, Hensel 因子  $F_i^{(\infty)}$  は  $R(u, v)$  の零点で発散する. しかし, 直線  $u+v = 0$  上では  $\tilde{F}(x, v) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, -v, v) = x^2 + 2xv^3 + 2v^4$  となり,  $\tilde{F}(x, v)$  の根  $\tilde{\chi}(v)$  は  $\tilde{\chi}(v) \sim \pm\sqrt{-2v^2}$  と振舞い,  $u+v = 0$  上で根の位数が増加する.  $\square$

(1) 式における  $r = 1$  の場合と 4 章における  $F_{\text{New}} = (x-\theta)^m$ ,  $m > 1$ , の場合の根の求め方を簡単に復習する (詳細は [SK99] を参照). 前者の場合,  $H(x, u)$  を因数分解すれば後者に帰着する. 後者の場合,  $F(x, u) = x^m + f_{m-1}x^{m-1} + \dots + f_0$  に変換  $x \mapsto x' = x - f_{m-1}/m$  を施す (Tschirnhaus 変換). これにより,  $F^{(\infty)}(x, u)$  は  $F'^{(\infty)}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} F^{(\infty)}(x - f_{m-1}/m, u)$  に変換され,  $F_{\text{New}} \rightarrow x^m$  となる. また,  $F'^{(\infty)}$  の Newton 多項式は二つ以上の既約因子を持つようになり,  $F'^{(\infty)}$  の拡張 Hensel 構成が可能になる.  $F(x, u)$  の根  $\chi(u)$  を計算するには, 一般に複数回の Tschirnhaus 変換が必要である.

2 変数多項式  $F(x, u)$  の Puiseux 級数根は一般に  $\chi(u) = \sum_{i=1} u^{r_i} (c_{i0} + c_{i1}u + c_{i2}u^2 + \dots)$ ,  $r_i \in \mathbb{Q}$ , と幾つかの級数の和となる. 同様に, 3 変数以上の多項式の拡張 Hensel 構成でも, Tschirnhaus 変換をする毎に新たな級数が現れることになる. 今の場合,  $F'^{(\infty)}$  の Newton 線は  $F$  のそれより傾きが大きくなり,  $F'^{(\infty)}$  の Newton 多項式の根から位数の大きい代数関数が生じる.

## 5 Newton 多角形に沿う拡張 Hensel 構成

Newton 多項式は  $F_{\text{New}}(x, u) = x^{n_2} F_{\text{New}_1}(x, u)$  と表すことができる. ここで,  $F_{\text{New}_1}(0, u) \neq 0$  である. 今までは  $F_{\text{New}_1}(x, u)$  に対する Hensel 因子について議論したが, 本章では  $x^{n_2}$  に対する因子について議論

する。Newton 多角形  $\mathcal{N}$  の下辺  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_q$  の右端の座標をそれぞれ  $(n_1, e_1), \dots, (n_q, e_q)$  とし、 $\mathcal{L}_q$  の左端の座標を  $(n_{q+1}, e_{q+1})$  とする ( $n_1 = n, n_{q+1} = 0$ )。下辺の右から  $j$  番目の頂点  $(n_j, e_j)$  上にプロットされる項の和を  $x^{n_j} \hat{f}_j(\mathbf{u})$  と表す (図 1 参照)。 $\hat{f}_j(\mathbf{u})$  は  $F_{\text{New}_j}$  の主係数である。

$F$  を  $F_{\text{New}_1}$  と  $x^{n_2}$  を初期因子として拡張 Hensel 構成すると、 $F = F_{\mathcal{L}_1}^{(\infty)} F_2^{(\infty)}$  を得る。ここで、 $F_{\mathcal{L}_1}^{(\infty)}$  と  $F_2^{(\infty)}$  はそれぞれ初期因子  $F_{\text{New}_1}$  と  $x^{n_2}$  に対応する Hensel 因子である。 $\hat{f}_2 F_2^{(\infty)}$  の Newton 多項式は  $x^{n_3} F_{\text{New}_2}$  であるから、 $\hat{f}_2 F_2^{(\infty)}$  を  $F_{\text{New}_2}$  と  $x^{n_3}$  を初期因子として拡張 Hensel 構成すれば、 $\hat{f}_2 F_2^{(\infty)} = F_{\mathcal{L}_2}^{(\infty)} F_3^{(\infty)}$  を得る。ここで、 $F_3^{(\infty)}$  は初期因子  $x^{n_3}$  に対応する Hensel 因子である。これを繰り返せば、 $F \cdot \hat{f}_2 \cdots \hat{f}_q$  は次のように分解される。

$$\begin{cases} F(x, \mathbf{u}) \cdot \hat{f}_2 \cdots \hat{f}_q = F_{\mathcal{L}_1}^{(\infty)}(x, \mathbf{u}) \cdots F_{\mathcal{L}_q}^{(\infty)}(x, \mathbf{u}), & F_{\mathcal{L}_j}^{(\infty)} \in \mathbb{C}\{\{\mathbf{u}\}\}[x] \quad (j = 1, \dots, q), \\ \text{lc}(F_{\mathcal{L}_1}^{(\infty)}) = f_n(\mathbf{u}), & \text{lc}(F_{\mathcal{L}_j}^{(\infty)}) = \hat{f}_j(\mathbf{u}) \quad (j = 2, \dots, q). \end{cases} \quad (8)$$

上記の拡張 Hensel 構成における Moses-Yun 多項式については、次の命題が得られている [SI00]。

**命題 2 (Sasaki and Inaba)**  $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) = x^{n-d}G(x, \mathbf{u})$ ,  $\deg(G) = d$ ,  $G(0, \mathbf{u}) \neq 0$  とする。 $V^{(l)}G + W^{(l)}x^{n-d} = x^l$ ,  $\deg(V^{(l)}) < n-d$ ,  $\deg(W^{(l)}) < d$ , を満たす Moses-Yun 多項式  $V^{(l)}, W^{(l)}$  ( $l=0, 1, \dots, n-1$ ) は次式で与えられる。

$$\begin{cases} l \geq n-d \text{ のとき: } V^{(l)} = 0, & W^{(l)} = x^{l-n+d}, \\ l < n-d \text{ のとき: } V^{(l)} = G_{\text{Inv}(x^{n-d-l})} x^l, & W^{(l)} = [1 - G_{\text{Inv}(x^{n-d-l})}G]/x^{n-d-l}. \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $G_{\text{Inv}(x^m)}$  は  $x^m$  を法とする  $G$  の逆元であり、 $\deg(G_{\text{Inv}(x^m)}) < m$  を満たす。  $\square$

$G_{\text{Inv}(x^m)}G = 1 + x^m R$  と表せるゆえ、上式の  $W^{(l)}$  は  $x$  の多項式であることを注意しておく。 $G_{\text{Inv}(x^m)}$  は ( $x$  をべき級数変数とみなし)  $1$  を  $G$  で割って計算できる。したがって、Moses-Yun 多項式  $V^{(l)}, W^{(l)}$  の分母には  $G$  の ( $x$  に関する) 定数項のみが現れ、次の定理を得る。

**定理 5** (8) 式の Hensel 因子  $F_{\mathcal{L}_j}^{(\infty)}(x, \mathbf{u})$  の分母に現れるのは  $\hat{f}_2, \dots, \hat{f}_{j+1}$  のべき乗のみである。  $\square$

$F_{\mathcal{L}_j}^{(\infty)}$  の分母因子として  $\hat{f}_{j+1}$  が現れるのは奇異に思われるかも知れないが、 $\hat{f}_{j+1}$  の零点では  $F_{\text{New}_j}$  が変化するので  $F_{\mathcal{L}_j}^{(\infty)}$  も変化するはずであり、なんら奇異ではない。

**例 3**  $F(x, u, v) = x^4(u^3+u^5) + x^3(u^2-u^3+u^4) + x^2(u+v+u^2+v^2+u^4-v^4) + x(v^2-v^3+v^4) + (v^3-v^4)$ . Newton 多角形は二つの下辺  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  を持ち、 $\hat{f}_1 = u^3$ ,  $\hat{f}_2 = u+v$  である。 $\hat{f}_2 F$  に対する Newton 多項式は  $(u+v)x^2 \cdot (x^2u^3+xu^2+u+v)$  と因数分解される。初期因子を  $F_{\text{New}_1} = x^2u^3+xu^2+u+v$ ,  $\hat{f}_2 F^{(0)} = (u+v)x^2$  として Moses-Yun 多項式を計算すれば、分母に  $(u+v)$  の巾乗が現れることがわかる。辺  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  上の Hensel 因子は次式となり、やはり分母に  $(u+v)$  の巾乗が現れる。

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{L}_1}^{(3)} &= \frac{x^2(u^3+u^5) + x(u^2-u^3+u^4) + (u+v+u^2+v^2) - (xu^3v^2 + u^2v^2)}{(u+v)} \\ &\quad + \frac{(u^5+u^4v+u^3v^2-uv^4-v^5)}{(u+v)} + \frac{(xu^3v^2 + u^2v^2)(u^2+uv+2v^2)}{(u+v)^2}, \\ F_{\mathcal{L}_2}^{(4)} &= \frac{x^2(u+v) + xv^2 - x(u^2v^2+uv^3+2v^4)}{(u+v)} \\ &\quad + \frac{[x(u^4v^2+4u^2v^4+3uv^5+3v^6) + u^2v^3+2uv^4+v^5]}{(u+v)^2}. \end{aligned}$$

一方、 $\tilde{F}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, u, -u) = x^4(u^3+u^5) + x^3(u^2-u^3+u^4) + x^2(2u^2) + x(u^2+u^3+u^4) - (u^3+u^4)$  の Newton 多角形は三つの下辺  $\tilde{\mathcal{L}}_1, \tilde{\mathcal{L}}_2, \tilde{\mathcal{L}}_3$  を持つ。直線  $u+v=0$  上では、 $\mathcal{L}_1$  と  $\mathcal{L}_2$  が短縮されてそれぞれ  $\tilde{\mathcal{L}}_1$  と  $\tilde{\mathcal{L}}_3$  になり、新たに  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  が生じる。なお、 $\tilde{F}(x, u)$  に対する Hensel 因子は原点で発散しない。  $\square$

## 6 Newton 多面体の異なる面での拡張 Hensel 構成

前章までの例では従変数に関しては単なる全次数で扱ってきた。本章では重み付き全次数で扱い、重みを変えた場合の根の振舞いを簡単に考察する。本格的な考察は Osoekawa-Sasaki により行われている。

$F(x, u)$  の各項  $cx^{e_x}u_1^{e_1}\cdots u_\ell^{e_\ell}$  に対して、重み  $(w_1, \dots, w_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$  により全次数  $e_t = w_1e_1 + \cdots + w_\ell e_\ell$  を定め、格子点  $(e_x, e_t, w_1, \dots, w_\ell)$  にプロットする。 $F(x, u)$  の各項をあらゆる重みに対してプロットした点の凸包を Newton 多面体と呼ぶ。Newton 多面体の  $e_x, e_t$  に関する下稜線上にプロットされる項の和で Newton 多項式が定義される。下稜線は一般に複数個あるので、その個数だけの Newton 多項式が存在し、その数だけの異なる組の Hensel 因子が得られる。異なる組の Hensel 因子から  $F(x, u)$  の根  $\chi(u)$  の特異性の異なる面が見えるであろう。

$$\text{例 4 } F(x, u, v) = x^4 - 2(u^2 + v^2)x^2 + (-u^2 + u^4 + 4uv^2 - 3v^4).$$

従変数  $u, v$  にそれぞれ重み  $w_u, w_v$  を付けた場合の  $F$  の Newton 多項式を  $F_{\text{New}(w_u, w_v)}$  と表す。重みを種々に変えるとき、異なる Newton 多項式として次の三つのみが現れるので、その因数分解とともに示す。

$$\begin{aligned} F_{\text{New}(1,1)} &= x^4 - u^2 &&= (x^2 + u) \times (x^2 - u), \\ F_{\text{New}(2,1)} &= x^4 - 2v^2x^2 - (u^2 - 4uv^2 + 3v^4) &&= (x^2 + u - 3v^2) \times (x^2 - u + v^2), \\ F_{\text{New}(3,1)} &= x^4 - 2v^2x^2 - 3v^4 &&= (x^2 - 3v^2) \times (x^2 + v^2). \end{aligned}$$

Newton 多項式  $F_{\text{New}(1,1)}$ ,  $F_{\text{New}(2,1)}$ ,  $F_{\text{New}(3,1)}$  の因子の終結式はそれぞれ  $4u^2$ ,  $4(u-2v^2)^2$ ,  $16v^4$  となる。 $F_{\text{New}(1,1)}$  の因子を初期因子とする Hensel 因子は係数部の分母に因子  $u$  を持つので、原点近傍では  $F(x, u, v)$  の根  $\chi(u, v)$  は、直線  $u = 0$  上で位数が変化するが、別の級数部を持つことになる。しかし、 $F_{\text{New}(2,1)}$  を見ると、 $\chi(u, v)$  の振舞いに変化するの、正確には曲線  $u = 2v^2$  上であることがわかる。□

## 参 考 文 献

- [Aby90] S.S. Abhyankar: *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers*. Number 35 in Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [Ina05] D. Inaba: Factorization of multivariate polynomials by extended Hensel construction. *ACM SIGSAM Bulletin* 39 (2005), 142-154.
- [Iwa03] M. Iwami: Analytic factorization of the multivariate polynomial. *Proc. CASC 2003 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technische Universität München Press, pp. 213-225, 2003.
- [Iwa04] M. Iwami: Extension of expansion base algorithm to multivariate analytic factorization. *Proc. CASC 2004 (Computer Algebra in Scientific Computing)*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), Technische Universität München Press, pp. 269-282, 2004.
- [Kuo89] T.-C. Kuo: Generalized Newton-Puiseux theory and Hensel's lemma in  $\mathbb{C}[[x, y]]$ . *Canad. J. Math.* XLI (1989), 1101-1116.
- [McD95] J. McDonald: Fiber polytopes and fractional power series. *J. Pure Appl. Algebra* 104 (1995), 213-233.
- [SI00] T. Sasaki and D. Inaba: Hensel construction of  $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$ ,  $\ell \geq 2$ , at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin* 34 (2000), 9-17.
- [SK93] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, March, 1993.
- [SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 16 (1999), 257-285.
- [SS96] K. Shiihara and T. Sasaki: Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 13 (1996), 107-116.
- [SY98] T. Sasaki and S. Yamaguchi: An analysis of cancellation error in multivariate Hensel construction with floating-point number arithmetic. *Proc. ISSAC'98 (Intern'l Symp. Symbolic and Algebraic Computation)*, O. Gloor (Ed.), ACM Press, pp. 1-8, 1998.