数理解析研究所講究録
1514巻 2006年 74-80

Solving and visualizing parametric quantified constraints in control system design

兵頭 礼子
NORIKO HYODO[*]
(株) アルファオメガ
ALPHAOMEGA INC.

Myunghoon Hong[†]
(株) 富士通ソフトウェアテクノロジー
FUJITSU SOFTWARE TECHNOLOGIES LTD.

屋並 仁史
HITOSHI YANAMI[‡]
(株) 富士通研究所/CREST JST
FUJITSU LABORATORIES LTD./CREST JST

穴井 宏和
HIROKAZU ANAI[§]
(株) 富士通研究所/CREST JST
FUJITSU LABORATORIES LTD./CREST JST

Stefan Ratschan[¶]
Max-Planck-Institut für Informatik

原 辰次
SHINJI HARA[||]
東京大学/CREST JST
UNIVERSITY OF TOKYO/CREST JST

1 始めに

近年、計算機能力の向上やアルゴリズムの改良によって、工学や産業上の諸問題を数式処理を利用して解決することが現実的となって来た。ここでは、数値計算ツールであるMATLABを利用して、数式処理のアルゴリズムを用いたロバスト制御系の設計支援ツールを作成した。このツールでは、制御系設計の諸問題をSDC(Sign Definite Condition)とよばれる比較的簡単な制約式に変換できることを利用し、これに特化したQuantifier Elimination (以下、QE) を用いることで制御系設計問題を解決する。このツールは、制約問題を解く数式処理のアルゴリズムであるQEを用いることで、要求される制御仕様を満たす制御器のパラメータの決定をパラメトリックに行う制御系設計支援ツールである。QEを用いることにより、パラメトリックな取り扱いが可能となるだけではなく、非凸な制約問題に帰着される制御系設計問題も(正確に)解くことができる。また、このツールでは一連の設計作業を全てGUI上で行なえることが特徴である。

付加機能として、3変数の問題に関しても、パラメータの可能領域の平面図だけでなく三次元表示機能も追加した。また、大規模なプラントに対する設計問題を処理する際に、数式処理のアルゴリズムだけでは計

[*]noriko@a2z.co.jp
[†]fj6533hv@aa.jp.fujitsu.com
[‡]yanami@labs.fujitsu.com
[§]anai@jp.fujitsu.com
[¶]stefan.ratschan@mpi-inf.mpg.de
[||]Shinji_Hara@ipc.i.u-tokyo.ac.jp

算コストの問題で解を得ることができないことも多い。その場合に、区間数を用いた数値計算で所望のパラメータの可能領域を、指定された精度で、実行可能な領域、実行不可能な領域、そして、わからない領域の3種類にに分割して求めて表示する機能も実装した。

2 パラメータ空間アプローチによる制御系設計

本ツールは、H_∞ ノルム制約やゲイン・位相余裕、極配置等の制御系設計の諸問題を、Sign Definite Condition(以下、SDC) と呼ばれる係数にパラメータを含む1変数多項式の正定条件の形に帰着させ、SDC に特化した QE アルゴリズムを用いることにより、設計パラメータの可能領域を求める。この節では、まず全体の制御系設計の手順を簡単に示し、その後 SDC の定義と各制御仕様の SDC への帰着の手順について例を示す。

2.1 設計手順

図1のようなフィードバック制御系を考え、制御系設計をパラメトリックアプローチによって行なう場合の手順を以下に示す。

1. コントローラ C の種類を決定し、コントローラCにおいて設計するパラメータを決める。PI 制御系の例を挙げると、パラメタ:k, m、コントローラ $C(s) = k + \frac{m}{s}$ となる。
2. 設計仕様 ϕ_i を first-order formula ψ_i に変形する。
3. QE を用いて ψ_i を解き、すべての仕様 ϕ_i を満たすCのパラメータの可能領域を計算する。
4. パラメタ空間において、仕様 ϕ_i を満たす領域を重ね合わせる。重ね合わせで得られた領域から、パラメタの値を選び、制御系に適用する。

2.2 SDC(Sign Definite Condition)

まず、SDC の定義は以下である。

定義 1
関数 $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ が区間 $x \in [a, b], a < b$ において符号を維持、または x 軸と交わらないとき、関数 $f(x)$ は *Sign Definite* であるといい、$f(x) \in N_0[a, b]$ と記述する。

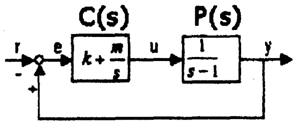

図 1: PI コントローラ設計例

2.2.1 H_∞ ノルム制約条件

次に、H_∞ ノルム制約条件の SDC への変換例を示す。

図1のようなシステムの感度関数 $S(s)$ および相補感度関数 $T(s)$ は以下のように表される。

$$S(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \frac{s^2 - s}{s^2 + (k-1)s + m} \tag{1}$$

$$T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{ks - m}{s^2 + (k-1)s + m} \tag{2}$$

ここで、感度関数は目標値応答性に関係し、低周波では小さい方が望ましい。つまり、各周波数 ω_s 以下において γ_s 未満にしたいとする。また、相補感度はロバスト安定性に関係し、高周波で小さい方が望ましい。つまり、各周波数 ω_{rs} 以上において γ_r 未満になるようにしたいとする。

この制約条件は、周波数帯域を $[\omega_1, \omega_2]$ に限定したノルム

$$||G||_{[\omega_1,\omega_2]} = \sup_{\omega_1 \le \omega \le \omega_2} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \tag{3}$$

を定義すると、以下のように表せる。

$$||S(s)||_{[0,\omega_s]} < \gamma_s \tag{4}$$

$$||T(s)||_{[\omega_t,\infty]} < \gamma_t \tag{5}$$

ここで、安定な n 次の伝達関数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ において、ハミルトン行列

$$H = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C^TC & -A^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ C^TD \end{bmatrix} \times (\gamma^2 I - D^TD)^{-1} \begin{bmatrix} -D^TC & B^T \end{bmatrix} \tag{6}$$

の特性多項式

$$h(s^2) = |sI - H| = \sum_{i=0}^{n} h_i s^{2i} \tag{7}$$

に関して、s^2 を x と置き換え、

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} h_i x^i \tag{8}$$

とする。このとき、安定な n 次の伝達関数数 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ が $||G||_{[\omega_1,\omega_2]} < \gamma$ を満たすための必要十分条件は、$\bar{\sigma}(G(j\omega_1)) < \gamma$ または $\bar{\sigma}(G(j\omega_2)) < \gamma$ を満たし、$\omega_1^2 \le x \le \omega_2^2$ で $f(x) \ne 0$、すなわち、$f(x) \in \mathrm{N}_0[\omega_1^2, \omega_2^2]$ となることである。

これを条件 (4),(5) に適用すると、(1),(2) より

$$f_s(x) = x^2 + \frac{(2m\gamma_s^2 - (k-1)^2\gamma_s^2 + 1)x + m^2\gamma_s^2}{-1 + \gamma_s^2} \in \mathrm{N}_0[0, \omega_s^2] \tag{9}$$

$$f_t(x) = x^2 + (2m - (k-1)^2 + \frac{k^2}{\gamma_t^2})x + m^2(1 - \frac{1}{\gamma_t^2}) \in \mathrm{N}_0[\omega_t^2, \infty] \tag{10}$$

となる。本ツールで用いている SyNRAC の SDC 用 QE では、$f(x) > 0, x > 0$ という条件のもののみを対象としているので、この条件に (9),(10) を変換する。すなわち、$[\omega_1^2, \omega_2^2]$ を $[0, \infty]$ に移す変換

$$z = \frac{x + \omega_1^2}{1 + \frac{x}{\omega_2^2}} \tag{11}$$

を用いて、

$$f_s(z) = \frac{(\gamma_s^2 - 1)\gamma_s^4 z^2 + (z - \omega_s^2)^2 m^2 \gamma_s^2 + ((k-1)^2\gamma_s^2 - 2m\gamma_s^2 - 1)(\omega_s^2 z - 1)\omega_s^2 z}{(\gamma_s^2 - 1)(z - \omega_s^2)^2} \in \mathrm{N}_0[0, \infty] \tag{12}$$

$$f_t(z) = (z - \omega_t^2)^2 + m^2(1 - \frac{1}{\gamma_t^2}) + (2m - (k-1)^2 + \frac{k^2}{\gamma_t^2})(z - \omega_t^2) \in \mathrm{N}_0[0, \infty] \tag{13}$$

と変換する [2]。これらの SDC に対して、SDC に特化した Sturm-Habicht 列を用いた QE アルゴリズム [1] を適用して、設計仕様を満たすコントローラのパラメータの実行可能領域を求めパラメタ空間内にプロットする。

2.2.2 ゲイン・位相余裕

次に、ゲイン・位相余裕を考える。制御系 $G(s)$ を以下のように分解する。

$$G(j\omega) = \frac{g_r(\omega) + jg_j(\omega)}{d(\omega)} \tag{14}$$

ここで、

$$\begin{cases} f_1(\omega, t) = g_r(\omega) - d(\omega) = 0 \\ f_2(\omega) = g_j(\omega) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} f_3(\omega) = g_r^2(\omega) + g_j^2(\omega) - d^2(\omega) = 0 \\ f_4(\omega, t) = g_r(\omega) - d(\omega)t = 0 \end{cases} \tag{16}$$

とする。$G(s)$ がゲイン余裕 (γ_m, γ^M) をもつとき、$f_g(t) = Euc[f_1(\omega, t), f_2(\omega), \omega]$ とすると、

$$f_g(t) \in \mathrm{N}_0[-1/\gamma_m, -1/\gamma^M] \tag{17}$$

を得られる。ここで、$Euc[f, g, t]$ は、f, g からユークリッドの互除法を用いて変数 t を消去する演算である。

同様に、$G(s)$ が位相余裕 $\phi(0 \le \phi < 2\pi)$ をもつとき、$f_p(t) = Euc[f_3(\omega), f_4(\omega, t), \omega]$ とすると、

$$f_g(t) \in \mathrm{N}_0[-1, \cos(-\pi + \phi)] \tag{18}$$

を得られる [3]。これら $f_g(t), f_p(t)$ を H_∞ ノルム制約条件の場合と同様に、$[\omega_1, \omega_2]$ を $[0, \infty]$ に移す変換

$$z = \frac{-(t - \omega_1)}{(t - \omega_2)} \tag{19}$$

を行ない、$f_g(z), f_p(z)$ を得る。これらの SDC に対して、SDC に特化した Sturm-Habicht 列を用いた QE アルゴリズムを適用して、設計仕様を満たすコントローラのパラメータの実行可能領域を求めパラメタ空間内にプロットする。

3 Parametric robust control ツールボックス

これまで、前節で述べた設計手法に基づいた MATLAB 上の Parametric robust control ツールボックス (以下、PRC ツールボックスと書く)[4, 1] を作成してきた。ここでは、簡単に PRC ツールボックスの基本機能について述べ、今回新たに追加した機能について説明する。

3.1 基本機能

PRC ツールボックスは、パラメタや仕様を設定したり、演算結果や変数の値を入力/表示する基本ウインドウ (図 2 左)、システムの仕様を GUI 上で設定する制御仕様ウインドウ (図 2 右上、基本ウインドウの [Windows] 項目、[Param] ボタン押下で表示)、選択された仕様を満たすパラメタ領域を表示するパラメタ領域ウインドウ (図 2 右下、基本ウインドウの [Windows] 項目、[DNF] ボタン押下で表示) から構成される。基本的な使用方法は以下の通りである。

1. 基本ウインドウの [Windows] ボタンで表示させたい図のボタンを押下

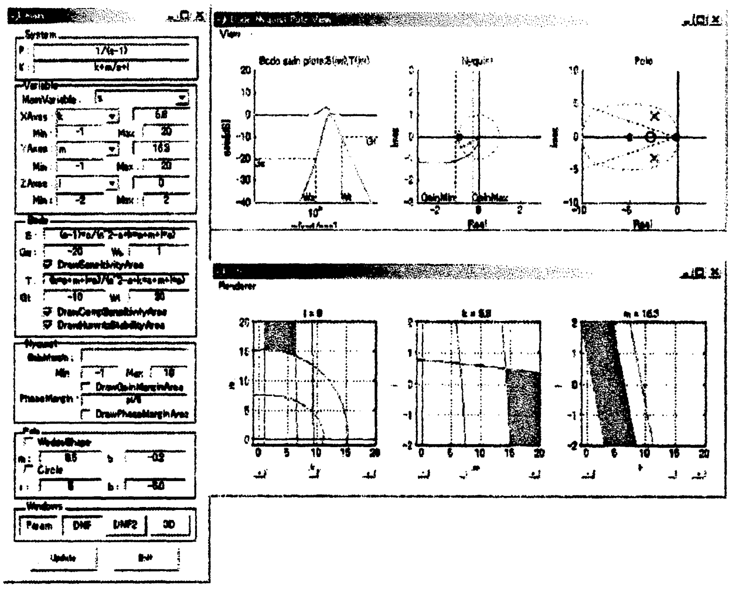

図 2: PRC ツールボックス

2. 基本ウインドウの [System] 項目に、プラント、コントローラの伝達関数を入力
3. 適用したい制御仕様のチェックボックスにチェックを入れ、仕様を設定
(仕様の設定に関しては、基本ウインドウのエディットボックスに直接入力するか、制御仕様ウインドウ上でグラフィックオブジェクトを操作することで設定可能)
4. 基本ウインドウの [Update] ボタンを押下

基本ウインドウの [Update] ボタンを押下すると、指定した設計仕様に対する実行可能なパラメータの領域がパラメータ空間中にプロットされ、仕様を満たす領域が赤色によって表示される。複数の仕様を選択した場合は、それぞれの条件を満たす領域の重ね合わせが表示される。図 2 に表示されているのは、感度関数、相補感度関数、Hurwitz 安定性の 3 条件の重ね合わせである。

また、基本ウインドウのパラメタ入力欄に数値を入力、またはパラメタ領域ウインドウ上をマウスでクリック・ドラッグすることによって、パラメタの値が制御仕様ウインドウに反映され、パラメタ領域上のある点におけるシステムの特性を確認することが出来る。

3.2 付加機能

3.2.1 3D 表示

図 1 の例では、PI コントローラを用いており、使用するパラメータ変数は m, k の 2 変数であった。実際の制御設計では、2 変数以上の変数を扱うこともある。PRC ツールボックスでは、PID コントローラのような 3 つのパラメータ変数 (ここでは、m, k, l とする) をもつ場合に、パラメタの実行可能領域の 3D 表示と、切断面での 2D 表示で可視化する (図 3)。この機能は、PRC ツールボックスの基本ウインドウで、[3D] ボタンを押下することで使用可能である。

3D 表示ウインドウには、全領域表示、解領域表示、XY 平面表示、YZ 平面表示、ZX 平面表示のチェックボックスを持つ。図 3 は、解領域表示の例である。XY 平面表示、YZ 平面表示、ZX 平面表示では、各平

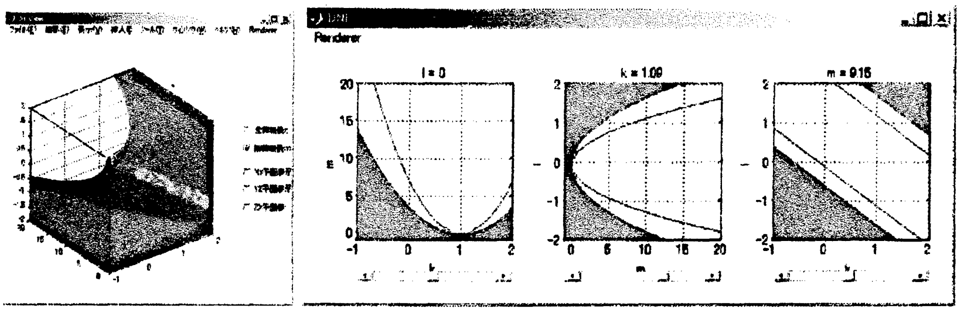

図 3: 3D 解領域表示

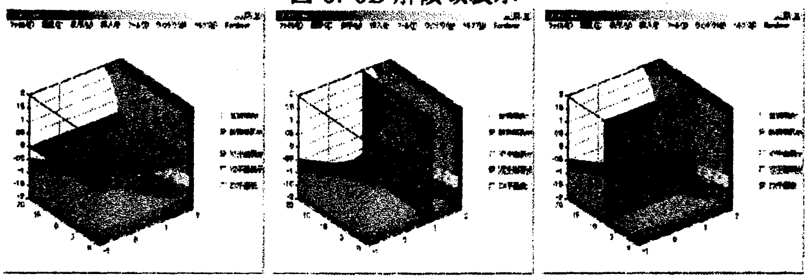

図 4: 各平面への断面表示

面で解領域を切断した面が表示され、この断面がパラメタ領域ウインドウと連動しており、パラメタ領域ウインドウの各図下部のスライダバーを動かすことによって、3D 解領域の断面を移動させることが出来る。

3.2.2 精度保障付き数値計算によるパラメータの可能領域の抽出

PRC ツールボックスでは、制御の諸問題を SDC に帰着させて、QE を使用して適合する領域を得ていた。これは、数式処理を利用するため正確な解は得られるが、演算時間が制御系が大きくなった場合などは大変にかかる等の問題もでてくる。そこで、追加機能として、2 変数の場合に区間演算を用いて制度保証付き数値計算によって描画を行なう機能を実装した。この機能は、PRC ツールボックスの基本ウインドウで、[DNF2] ボタンを押下することで使用可能である。実装にあたっては、区間演算に基づいて精度を保障しつつ制約問題を解くことができる RSolver[1] を用いている。RSolver は、入力として

- 制約条件 ϕ(一階述語論理式)
- 矩形 B(パラメータ空間における有限領域)

が与えられたとき、次のような 3 種類の 2 次元の矩形 B に含まれる box の集合のリスト $[T, F, U]$ を出力する。ここで、

- $T = \{$ ϕ が、すべての box 中のパラメータ値において真となるような box $\}$、
- $F = \{$ ϕ が、すべての box 中のパラメータ値において偽となるような box $\}$、
- $U = \{$ T, F のどちらかわかっていない box $\}$。

である。

[1] JavaApplet 版 RSolver が以下の URL で公開されている: `http://139.19.1.8:8080/Rsolver/RsolverApplet.html`

例えば、$\exists y \in [-2,2]\ x^2+y^2 \le 1$ で x が区間 $[-2,2]$ の場合を考える。ここで、$x^2+y^2 \le 1$ を制約条件と考えると、矩形 $[-2,2]\times[-2,2]$ ではこの制約条件はすべては満たされないので U となる。そこで、y の区間を 2 等分して、制約条件を $\exists y \in [-2,0]\ x^2+y^2 \le 1 \vee \exists y \in [0,2]\ x^2+y^2 \le 1$ のように作り直す。この手順を繰り返して、領域 $[-2,2]\times[-2,2]$ を T, F, U の 3 種類の矩形に所望の精度 (つまり、最小 box のサイズ) まで分割していく。PRC ツールボックスでは、RSolver を適用して、T の場合を赤色、F の場合を白色、U の場合を黒色で描画することで、制約条件の満たされる領域を描画する。分割の精度については、ユーザが現状では「細, 中, 粗」の 3 段階を選ぶ形で指定できる。

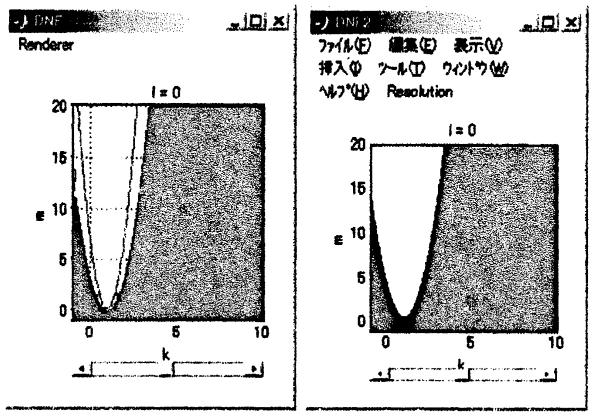

図 5: SDC による領域と RSolver による領域表示

4 まとめ

制御工学における設計の諸問題が SDC の形に帰着できることを利用して。QE を利用した数式処理による設計支援ツールを作成した。従来の数値計算を用いて Trial & Error によるテストを繰り返して設計をしていく手法と比べて、GUI で操作できること、またパラメタの値を選んだ際のボーデ線図、ナイキスト線図などの状態を画像で確認できるため、制御工学の設計問題を扱う際には有用であると考える。

今後の課題は、制御設計において有用な仕様 (極配置等) を実装することである。

参考文献

[1] H. Anai, H. Yanami, K. Sakabe, and S. Hara", Fixed-structure robust controller synthesis based on symbolic-numeric computation: design and algorithms with a CACSD toolbox. Proceedings of CCA/ISIC/CACSD 2004 (Taipei, Taiwan), pages 1540–1545, 2004.

[2] 近藤 良, 原 辰次, 金子 卓司. パラメータ空間設計による H_∞ 制御 計測自動制御学会論文集, 27(6):714–716, 1991.

[3] T.Kimura and S.Hara. A Robust Control System Design by a Parameter Space Approach Based on Sign Definite Condition. *In Proceedings of Korean Automatic Control Conference(KACC)*, pases 1533–1538, 1991.

[4] 坂部 啓, 屋並 仁史, 穴井 宏和, 原 辰次. A MATLAB Toolbox for Parametric Robust Control System Design based on symbolic computation. 講究録 *1395*「Computer Algebra – Design of Algorithms, Implementations and Applications, 2003」, pages 231–237. 京都大学数理解析研究所, 2004.