数理解析研究所講究録
1514 巻 2006 年 164-170

円に関する人間らしい初等幾何証明を生成するための推論方法

山本 航　　宮本 健司
WATARU YAMAMOTO* KENJI MIYAMOTO†
法政大学工学部
FACULTY OF ENGINEERING,
Hosei University

関川 浩　　　白柳 潔
HIROSHI SEKIGAWA‡ KIYOSHI SIRAYANAGI§
日本電信電話株式会社
NTT コミュニケーション科学基礎研究所
NTT COMMUNICATION SCIENCE LABORATORIES

1 はじめに

円に関する人間らしい初等幾何証明を生成するための推論方法を提案する．本研究は，数学における機械的創造の一例として，初等幾何の人間らしい証明を機械的に生成し人間の証明支援をすることを目指す．

角を 3 点で指定 (以下，点角と呼ぶ) する方法を用いた研究として [4] などがある．これは問題を与える際に点配置に関する情報を与えなければ正しく推論することができなかった．例えば，同一円周上に点 A,B,C,D があり，直線 AB,BD,AC,CD があるとき点の配置が図 1 左のようであれば

$$AB,\ BD,\ AC,\ CD\ \vdash\ \angle ABD = \angle ACD$$

と推論することは正しい．しかし，点の配置が図 1 右のような場合 $\angle ABD$ と $\angle ACD$ は補角の関係にあり上のように推論することは誤りである．このように点の配置を具体的に与えられない問題を点角で表現し証明するには逐一場合わけを行わなければならず，このことが自動化を妨げていた．

このような問題を避けるため，近年では角を成す 2 直線で表現する方法 (以下，線角と呼ぶ) を用いた研究 ([5]) が主流となっている．線角は 2 直線 a,b の成す角を ab で表し，直線 a から直線 b に反時計回りで到達する角を意味している．線角を用いることによって前述の問題は次のように推論することができる．

$$AB,\ BD,\ AC,\ CD\ \vdash\ dc = ba$$

この推論が点配置に依存しないことは図 2 より明らかである．

*yamamoto@philos.k.hosei.ac.jp
†miyaken@k.hosei.ac.jp
‡sekigawa@theory.brl.ntt.co.jp
§shirayan@theory.brl.ntt.co.jp

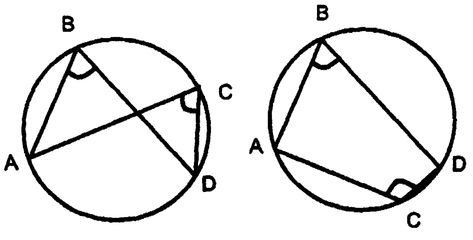

図 1: 点配置による問題

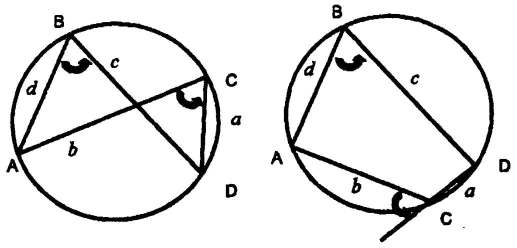

図 2: 線角による円周角の規則

しかし，線角を用いた証明器では合同を取り扱うことが困難である．例えば，合同条件「三辺相等」を考えてみよう．2つの三角形 ABC と $A'B'C'$ で $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$ であり，点 A, B, C の配置を図 3 左のようであるとする．このとき点 A', B', C' の配置が図 3 中のようであれば，

$$AB = A'B',\ BC = B'C',\ AC = A'C' \vdash cb = c'b'$$

と推論することは正しい．ところが，点 A', B', C' の配置が図 3 右のような場合，cb と $c'b'$ は互いに補角の関係なっており上のように推論することは誤りである．このように，線角を用いた証明器では合同を取り扱うことができず，我々の研究目的である「人間らしい証明の生成」にそぐわない．

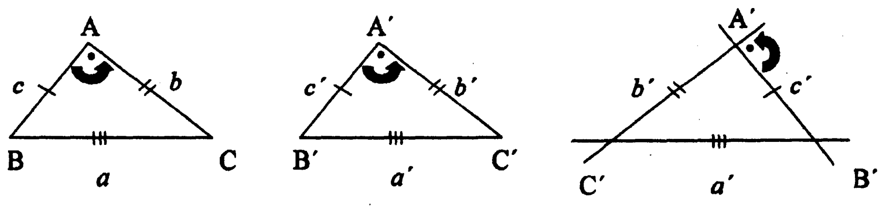

図 3: 鏡映による困難

我々は，[3] において点角にもとづきかつ点配置に依存しない角推論規則を提案し，その規則により合同を用いた初等的な機械証明が可能であることを示した．しかし，証明できる問題は直線だけから成るものに限られており，円については未解決であった．

本論文では，点角にもとづきかつ点配置に依存しない円周角の規則を提案する．実装した証明器によって得られる証明は図によらない幾何学的関係だけからなる抽象的なものであり，合同と円周角の規則を用いた，可読性に優れたものになった．

円に関する推論規則を導入したことによって，初等幾何学における全ての図形について網羅することが出来た．以下の章では，円に関する推論規則の詳細を述べた後，それらを実装した証明器による実行結果を見ていくことにする．

2 円に関する推論規則

この章では，推論で用いる幾何学的関係の表現と意味を定義し，点配置に依存しない推論規則を示す．

2.1 幾何学的関係の表現

今回提案した幾何概念を表 1 に示す．我々が取り扱う問題および証明における幾何学的関係は表 1 に示す述語による（事実とよぶ）原子式の集合で表す．

表 1: 幾何概念の記述

述語	意味
$line(L,[A_1,A_2,...,A_n])$	点 $A_1,A_2,...,A_n$ は直線 L 上にある
$circle(C,[A_1,A_2,...,A_n])$	点 $A_1,A_2,...,A_n$ は円 C の円周上の点である
$center(C,O)$	点 O は円 C の中心である
$tangent(L,C)$	直線 L は円 C の接線である
$vertical(L_1,L_2)$	直線 L_1 と直線 L_2 は垂直である
$tyokaku([A,B,C])$	$\angle ABC$ は 90° である
$eikaku([A,B,C])$	$\angle ABC$ は鋭角である

2.2 円に関する推論規則

ここでは円に関する規則を具体的に見ていく．本章で取り扱わない推論規則については付録の表 2 に示す．なお，各規則のローマ字名称は，後述する証明中で用いる．

ensyukaku 1 (円周角の規則)

$circle(C_1,[A,B,C,D])$, $line(L_1,[A,B])$, $line(L_2,[B,P,D])$, $line(L_3,[A,C,P])$, $line(L_4,[C,D])$
$\vdash\ \angle ABP = \angle DCP$.

この規則が点配置によらないことは図 4 を見れば明らかである．図 4(左) は点 B,C が直線 AD から見て同じ側にある場合で $\angle ABP$ と $\angle DCP$ は同じ弧に対する円周角で等しい．図 4(中) は点 B,C が直線 AD から見てそれぞれ反対側にある場合で，円に内接する四角形の対角の和が 180° であることから $\angle ABP$ と $\angle DCP$ は等しい．図 4(右) は図 4(左) の点 B,C，図 4(中) の点 B,D の位置が入れ代わった場合で $\angle ABP$ と $\angle DCP$ は同じ弧に対する円周角の補角になっていることから等しい．

ensyukaku 2 (円周角の規則の逆)

$line(L_1,[A,B])$, $line(L_2,[B,P,D])$, $line(L_3,[A,C,P])$, $line(L_4,[C,D])$, $\angle ABP = \angle DCP$
$\vdash\ circle(C_1,[A,B,C,D])$.

tangent 1 (接線に関する規則)

$circle(C_1,[B])$, $center(C_1,O)$, $line(L_1,[A,B])$, $line(L_2,[B,O])$, $tangent(L_1,C_1)\ \vdash\ \angle ABP = 90°$.

tangent 2 (接線に関する規則の逆)

$circle(C_1,[B])$, $center(C_1,O)$, $line(L_1,[A,B])$, $line(L_2,[B,O])$, $\angle ABP = 90°\ \vdash\ tangent(L_1,C_1)$.

radius 1 (半径に関する規則)

$circle(C_1,[A,B])$, $center(C_1,O)\ \vdash\ |AO| = |BO|$.

radius 2 (半径に関する規則の逆)

$|AO| = |BO|\ \vdash\ \exists\, C_1\ circle(C_1,[A,B]) \wedge center(C_1,O)$.

3 円に関する初等幾何証明

本章では，前章で述べた推論規則にもとづく証明器で実際にいくつかの証明問題を解いてみることにする．なお，証明中には今回提案したものではない幾何概念，推論規則が含まれている．これらについては [1],[3] を見よ．また，問題と証明の形式については [3] を見よ．

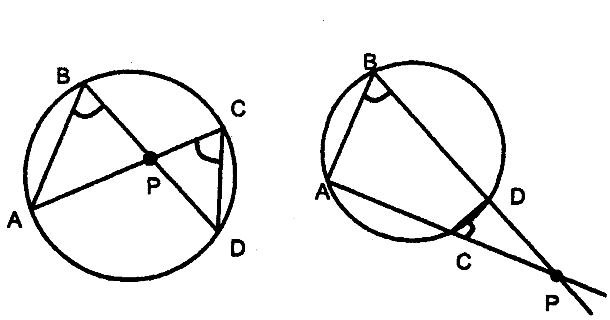

図 4: 円周角の規則が直線の配置によって円周角を表す場合（左）と円に内接する四角形の外角と内対角を表す場合（中）と円周角の補角を表す場合（右）

実行例

問題 1. 円周上に A,B,C,D があり，直線 AB,BC,CD,AD があるとき $AD//BC$ であれば $AB=CD$ となることを証明せよ．

```
{point(a),point(b),point(c),point(d),line(line1,[a,b]),line(line2,[b,c]),line(line3,[c,d]),
line(line4,[a,d]),parallel(line4,line2),circle(circle1,[a,b,c,d])}
```

⇒ `eqlength([a,b],[d,c])`

```
0:ensyukaku1,[a,d,c,b],[circle1],[[a,d,crosspoint(line(a,c),line(d,b))]=
  [b,c,crosspoint(line(a,c),line(d,b))],_,
   crosspoint(line(a,c), line(d,b)),_,line(d,b),line(a,c),_,_]
1:ensyukaku1,[c,b,a,d],[circle1],[[c,b,crosspoint(line(a,c),line(d,b))]=
  [d,a,crosspoint(line(a, c), line(d,b))],_,_,_,_,_,_,_]
2:heiko,[d,a,b,c,0-3],[line4//line2,0-5,0-6],[[a,d,crosspoint(line(a,c),line(d,b))]=
  [c,b, crosspoint(line(a,c),line(d,b))],_,
  [c,crosspoint(line(a,c),line(d,b)),d]=[a,crosspoint(line(a, c),line(d,b)),b],_]
3:equality_angle,[0-1,1-1,2-1],[[b,c,crosspoint(line(a,c),line(d,b))]=
  [c,b,crosspoint(line(a, c),line(d,b))]]
4:nitohen2,[0-3,c,b],[3-1],[[crosspoint(line(a,c),line(d,b)),c]=
  [crosspoint(line(a,c),line(d, b)),b]]
5:equality_angle,[0-1,1-1,2-1],[[a,d,crosspoint(line(a,c),line(d,b))]=
  [d,a,crosspoint(line(a, c),line(d,b))]]
6:nitohen2,[0-3,d,a],[5-1],[[crosspoint(line(a,c),line(d,b)),d]=
  [crosspoint(line(a,c),line(d, b)),a]]
7:goudou2,[0-3,c,0-3,b,d,a],[4-1,6-1,2-3],[[c, d]=[b, a],_,_]
```

問題 2. 円に内接する四角形 $ABCD$ において A,D からそれぞれ直線 DC,AB に平行線を引き直線 BD,AC との交点を P,Q とするとき PQ と BC が平行であることを証明せよ．

```
{point(a),point(b),point(c),point(d),point(p),point(q),line(line1,[a,b]),
```

```
line(line2,[b,c]),line(line3,[c,d]),line(line4,[a,d]),line(line5,[a,c,q]),
line(line6,[b,d,p]),line(line7,[p,q]),line(line8,[a,p]),line(line9,[q,d]),
parallel(line8,line3),parallel(line9,line1),circle(circle,[a,b,c,d])}

 ⇒ parallel(line2,line7)

0:ensyukaku1,[a,d,c,b],[circle],[_,_,crosspoint(line5, line6),_,_,_,_,_]
1:ensyukaku1,[c,b,a,d],[circle],[[c,b,crosspoint(line5,line6)]=
  [d,a,crosspoint(line5,line6)],_,_,_,_,_,_,_]
2:ensyukaku1,[a,b,d,c],[circle],[_,[a,b,crosspoint(line5,line6)]=
  [d,c,crosspoint(line5,line6)],_,_,_,_,_,_]
3:heiko,[p,a,d,c,0-3],[line8//line3,line6,line5],[_,_,_,[p,a,crosspoint(line5,line6)]=
  [d,c, crosspoint(line5, line6)]]
4:equality_angle,[2-2,3-4],[[p,a,crosspoint(line5, line6)]=[a, b, crosspoint(line5, line6)]]
5:heiko,[d,q,b,a,0-3],[line9//line1,line6,line5],[[q,d,crosspoint(line5,line6)]=
  [a,b, crosspoint(line5, line6)],_,_,_]
6:equality_angle,[4-1,5-1],[[q,d,crosspoint(line5, line6)]=[p, a, crosspoint(line5, line6)]]
7:ensyukaku2,[q,d,0-3,p,a],[6-1],[[q, d, a, p]]
8:ensyukaku1,[q,p,a,d],[7-1],[[q,p,crosspoint(line5,line6)]=
  [d,a,crosspoint(line5,line6)],_,_,_,_,_,_,_]
9:equality_angle,[1-1,8-1],[[q,p,crosspoint(line5, line6)]=[c, b, crosspoint(line5, line6)]]
10:heiko3,[0-3,p,q,b,c],[9-1],[line7//line2]
```

問題3. 円周上にA,B,C,Dがあり，直線AB,BD,CD,ACがあるとき$AC//BD$であれば$\angle ABD = \angle BDC$となることを証明せよ.

問題3は問題1の証明を2回繰り返し，合同を適用することにより証明可能であるため割愛する.

実行例に示した証明ステップ数と証明結果からみて本証明器が人間らしい証明を生成可能であることがわかる.

4 実装

4.1 証明器のシステム構成

証明器の基本的な構成は[1],[2],[3]と同様である．前提と帰結からなる推論規則群を格納する推論規則データベースと，各推論ステップで得られた幾何情報を蓄積管理する知識表現部と，知識表現部で見つかった適用箇所候補を前提として各推論規則を適用したときの帰結として得られる幾何情報を知識表現部に追加する推論部からなる.

4.2 円周角の規則

円周角の規則については2章において示したが，円周上にA,B,C,Dがあり，直線AB,DCのみのときにも適用可能であり，

ensyukaku 1 (円周角の規則)

$circle(C_1, [A, B, C, D]),\ line(L_1, [A, B]),\ line(L_2, [C, D]), \neg\ BC//AD\ \vdash\ line(L_3, [B, D, P]),$
$line(L_4, [A, C, P]),\ line(L_5, [B, C, Q]),\ line(L_6, [A, D, Q]),\ \angle ABP = \angle DCP \land \angle BAQ = \angle DCQ.$

と推論する (図 5). ここで, 規則の前提に現れず帰結だけに現れる点 P,Q は補助点を意味する ([1] 補助線つき推論より).

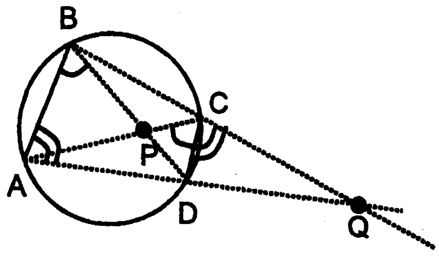

図 5: 補助点を追加する円周角の規則

5 議論

円に関する人間らしい証明を生成するための推論方法について述べた.

点角にもとづきかつ点配置に依存しない円周角の規則を代表とする円に関する推論規則を導入したことによって, 円を含む問題においても図によらない抽象的な証明が生成可能になった.

3 章の問題 3 において今回提案した円周角の規則の特徴を見ることができる. この問題の帰結である $\angle ABD = \angle BDC$ は, 平行な 2 直線 AC と BD が無限遠点 P で交わるとした時の円周角の規則とみなすことができる. このことから, $AC//BD$ であり交点 P を取ることが出来ない場合においても円周角の規則を拡張することができているといえる.

関連研究

[6] で用いられる不動点法は, 我々の証明器同様, 演繹により推論を行う論理的方法である. [6] では角の表現方法として線角を用いているため, 1 章でも述べたように, 今回問題となった円周角の規則を点配置に依存することなく一意的に表すことができる. さらに, 3 章で取り上げた問題 1,2,3 を証明可能である. しかし, 線角を用いているため合同を扱うことが出来ず, 生成される証明も伝統的な証明とは異なるためわかりづらいものになる.

将来研究

数値にかかわる問題 (具体的な長さ, 面積, 角度, 相似, 比, またそれらの量の四則演算) は現在推論規則を欠いており証明不能である. これらの推論規則を追加することによって初等幾何における大部分の問題をカバーすることが出来る.

[1] 宮本健司, 関川浩, 白柳潔, 町田文彦. 「初等幾何における読みやすい証明の生成手法について」 **京都大学数理解析研究所講究録** *1335, "Computer Algebra–Algorithms, Implementations and Applications"*, pp. 20-27, 2003.

[2] 宮本健司, 大矢孝次, 関川浩, 白柳潔. 「初等幾何の自動証明における効率的な補助線の発見法について」 **京都大学数理解析研究所講究録** *1395, "Computer Algebra–Algorithms, Implementations and Applications"*, pp. 157-163, 2004.

[3] 白柳潔, 宮本健司, 関川浩, 山本航. 「人間らしい初等幾何証明における角の取り扱いについて」 **京都大学数理解析研究所講究録** *1456, "Computer Algebra–Algorithms, Implementations and Applications"*, pp. 90-99, 2005.

[4] Arthur J. Nevins. Plane geometry theorem proving using forward chaining, *Artificial Intelligence*, Vol. 6, pp. 1-23, 1975.

[5] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II: Theorem proving with full-angles. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 17, pp. 349-370, 1996.

[6] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. A deductive database approach to automated geometry theorem proving and discovering. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 25, pp. 219-246, 2000.

付録

今回提案した推論規則 (本文で紹介したものを除く) を表 2 にまとめる.

表 2: 推論規則一覧

推論規則	前提	帰結
doukaku2	$eikaku([A,B,C])$ $line(L_1,[B,H,C])$ $tyokaku([A,H,B])$	$same\_side(B,[C,H])$
heiko3	$line(L_1,[A,B,C])$ $line(L_2,[A,D,E])$ $line(L_3,[B,D])$ $line(L_4,[C,E])$ $eqangle([A,B,D],[A,C,E])$	$parallel(L_3,L_4)$
goudou4	$tyokaku([A,B,C])$ $tyokaku([D,E,F])$ $eqlength([A,C],[D,F])$ $eqangle([A,C,B],[D,F,E])$	$eqlength([A,B],[D,E])$ $eqlength([B,C],[E,F])$ $eqangle([B,A,C],[E,D,F])$
goudou5	$tyokaku([A,B,C])$ $tyokaku(D,E,F)$ $eqlength([A,B],[D,E])$ $eqlength([A,C],[D,F])$	$eqlength([B,C],[E,F])$ $eqangle([A,C,B],[D,F,E])$ $eqangle([B,A,C],[E,D,F])$
tyukaku	$eqangle([B,A,P],[C,A,P])$ $line(L_1,[B,P,C])$	$same\_side(B,[C,P])$ $same\_side(C,[B,P])$ $eikaku([B,A,P])$ $eikaku([C,A,P])$
suisen	$eqangle([A,B,D],[C,B,D])$	$line(L_1,[B,H,C])$ $line(L_2,[A,I,B])$ $line(L_3,[D,H])$ $line(L_4,[D,I])$ $vertical(L_1,L_3)$ $vertical(L_2,L_4)$ $eqangle([D,B,H],[D,B,I])$
sesen	$circle(C_1,[D,E,F])$ $line(L_1,[A,F,B])$ $line(L_2,[B,D,C])$ $line(L_3,[A,E,C])$ $tangent(L_1,C_1)$ $tangent(L_2,C_1)$ $tangent(L_3,C_1)$ $same\_side(A,[B,F])$	$same\_side(C,[B,D])$