

## オイラーの定数の2重積分表示について

西沢 清子  
城西大学\*

NISHIZAWA, KIYOKO  
JOSAI UNIVERSITY

宮崎 里美  
城西大学

MIYAZAKI, SATOMI  
JOSAI UNIVERSITY

### 1 序

次式で定義される有名な定数であるオイラーの定数  $\gamma$  :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

は、未だに有理数か無理数か分かっていない。リーマン・ゼータ関数 :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

については1978年6月、R.Aperyによって $\zeta(3)$ の無理数性が示された。同年8月、Helsinkiで行われたICMにて、H.Cohenによっても示された。1979年、F.Beukersは $\zeta(2), \zeta(3)$ の無理数性の証明を2重積分により平易な方法で示した。本論文では、J.Sondowによるオイラーの定数の2重積分による表示について考察する。すなわち、オイラーの定数の2重積分表示がどのようにして得られたかを紹介する。

$$\gamma = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1-x}{(1-xy)(-\log xy)} dx dy.$$

Sondowの動機は、 $\zeta(2), \zeta(3)$ の2重積分表示 :

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy, \quad \zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dx dy$$

より $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性が示されたことに影響されたものである。

1998年、Sondowはオイラーの定数の交代公式の別証明を示した。また、2004年5月、P.Hadjicostasは $\Gamma$ -関数と $\zeta$ -関数の深い関係を示すものの1つといえる次の予想を与えた。

予想  $z \in \mathbb{C}, \Re(z) > -2$  を満たすとき次式が成立する :

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1-x}{1-xy} (-\log xy)^z dx dy = \Gamma(z+2) \left( \zeta(z+2) - \frac{1}{z+1} \right).$$

同年6月、この予想が $\Re(z) > -1$ の場合は成り立つことがR.Chapmanによって証明された。この結果と、交代公式の別証明を合わせることによって、2005年、Sondowによってオイラーの定数が2重積分表示できるということが示された。上記の結果からオイラーの定数の無理数性を証明出来ないかという問題をSondowは以下の論文で取り上げている ([Son03],[Son03a],[Son04])。また無理数であることは知られている交代オイラーの定数:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) \left( = \log \frac{4}{\pi} \right)$  の2重積分表示の可能性についても論じる。

\*kiyoko@math.josai.ac.jp

## 2 オイラーの定数の交代公式

オイラーの定数に関する交代公式自体はよく知られているが、最近 J.Sondow によって別証明が示された。ここでその証明を紹介する ([Son98])。

リーマン・ゼータ関数と素数との関連は、次の事実が有名である。

オイラーによる等式

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{2^s}{2^s-1} \cdot \frac{3^s}{3^s-1} \cdot \frac{5^s}{5^s-1} \cdots, \quad \Re(s) > -1$$

注意 1

$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$  は  $\Re(s) > 0$  で解析的な関数である。すなわち  $\zeta(s)$  は  $s=1$  を 1 位の極とし、それ以外では  $\Re(s) > 0$  で解析的である。

オイラーの定数の交代公式 (antisymmetric formula)

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \zeta(x) - \frac{1}{x-1} \right)$$

証明 ([Son98]) はじめに  $x > 1$  のとき、級数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x^n} \right)$  の一様収束性について示す。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{x^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right). \quad (1)$$

Weierstrass の M-test により、区間  $(1, 2]$  上で級数は一様収束して意味を持つ：

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt = \int_n^{n+1} \left( \frac{1}{n^x} - \frac{1}{t^x} \right) dt = x \int_n^{n+1} \left( \int_n^t u^{-x-1} du \right) dt \\ &\leq x n^{-x-1} \int_n^{n+1} \left( \int_n^t du \right) dt = x n^{-x-1} \int_n^{n+1} (t-n) dt = \frac{1}{2} x n^{-x-1} \leq \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

オイラーの定数  $\gamma$  は

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^1} dt \right) \quad (2)$$

と表せることより、(2) は (1) の  $x \rightarrow 1^+$  としない式に  $x=1$  を代入したものに他ならない。つまり  $x \rightarrow 1^+$  としたとき  $\gamma$  となることを示している： $\gamma = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right)$ 。 ■

## 3 F.Beukers による $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の無理数性

F.Beukers による  $\zeta(2)$  の無理数性を紹介する ([Beu79])。Beukers は  $\zeta(2), \zeta(3)$  の 2 重積分表示から、これらの無理数性を証明した。

### 3.1 素数定理と最小公倍数について

$1, 2, \dots, n$  の最小公倍数を  $d_n$  とする。また  $1, 2, \dots, n$  までの  $n$  以外の素数の個数を  $\pi(n)$  とする。 $d_n$  は  $d_n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} P_i^{e_i}$  と素因数分解される。ただし  $P_i$  は  $i$  番目の素数で  $d_n$  の約数ではない素因子  $P_j$  については  $e_j = 0$  としている。このとき、各  $P_i$  について  $P_i^{e_i} \leq n < P_i^{e_i+1}$  となる。

### 命題 1

$d_n$  について次の評価式が成り立つ:

$$d_n < 3^n$$

証明  $d_n$  については次式が成立する:

$$d_n = \prod_{p \text{ prime } \leq n} p^{\lfloor \frac{\log n}{\log p} \rfloor} < \prod_{p \text{ prime } \leq n} p^{\frac{\log n}{\log p}} = n^{\pi(n)}.$$

素数定理  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$  から  $\forall \varepsilon > 0$  について  $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  なので  $\forall n > n_0$  において  $\pi(n) < (1 + \varepsilon) \cdot \frac{n}{\log n}$  となる。ここで  $\varepsilon = 0.09 (< \log 3 - 1 = 0.98 \dots)$  に対する  $n_0$  をとると、 $\forall n > n_0$  に対して

$$\pi(n) < (1 + \varepsilon) \cdot \frac{n}{\log n} < (\log 3) \cdot \frac{n}{\log n}$$

したがって  $d_n = \prod_{i=1}^{\pi(n)} P_i^{\varepsilon_i} \leq n^{\pi(n)} < n^{(\log 3) \cdot (\frac{n}{\log n})} = 3^n$ . ■

### 3.2 $\zeta(2)$ と $\zeta(3)$ の2重積分表示

ここでは F.Beukers による  $\zeta(2)$  と  $\zeta(3)$  の積分表示について述べる ([Beu79])。  $\zeta(2) < 2$  に注意する。

#### 定理 2

$$\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy, \quad \zeta(3) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dx dy$$

証明

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2 y^2 + \dots) dx dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (1 + xy + x^2 y^2 + \dots) dx \right\} dy \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \zeta(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{-(\log x + \log y)}{1-xy} dx dy \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{-\log x}{1-xy} dx + \int_0^1 \frac{-\log y}{1-xy} dx \right\} dy \\ &= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots = \zeta(3) \end{aligned}$$

### 3.3 $\zeta(2)$ の無理数性について

ここでは F.Beukers による  $\zeta(2)$  の無理数性について述べる ([Beu79])。

## 定理 3

$r, s \in \mathbb{N} \cup 0$ ,  $r > s$  のとき  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^r y^s) dx dy$  は有理数で、その分母は  $d_r^2$  の約数である。そして  $r = s$  のとき

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^r y^s) dx dy = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots - \frac{1}{r^2}$$

である。特に  $r = s = 0$  のとき、分数部分を 0 とみなすので  $\zeta(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy$  と表せる。

## 補題 4

$r > s$  とし、 $\sigma$  は任意の負の数でないとする。このとき次式が成立する：

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}) dx dy = \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+1+\sigma} + \cdots + \frac{1}{r+\sigma} \right\}$$

証明  $\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + (xy)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$  より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}) dx dy &= \int_0^1 y^{s+\sigma} \int_0^1 x^{r+\sigma} (1 + xy + x^2 y^2 + \cdots) dx dy \\ &= \int_0^1 y^{s+\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} y^k \int_0^1 x^{k+r+\sigma} dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+r+\sigma+1} \int_0^1 y^{k+s+\sigma} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)(k+s+\sigma+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1} \right\} \end{aligned}$$

$r = s+l, s+\sigma+1 = t$  とおく。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{k+s+\sigma+1} - \frac{1}{k+r+\sigma+1} \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+\sigma+1} - \frac{1}{r+\sigma+1} + \frac{1}{s+\sigma+2} - \frac{1}{r+\sigma+2} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+\sigma+1} - \frac{1}{s+l+\sigma+1} + \frac{1}{s+\sigma+2} - \frac{1}{s+l+\sigma+2} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{t+l} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+1+1} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \cdots + \frac{1}{t+l-1} \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+1+\sigma} + \frac{1}{s+2+\sigma} + \frac{1}{s+3+\sigma} + \cdots + \frac{1}{r+\sigma} \right\} \end{aligned}$$

ここで  $\sigma = 0$  とおくと

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^r y^s) dx dy = \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \cdots + \frac{1}{r} \right\}$$

と表される。上記の式の右辺は有理数である。これを  $\frac{q}{p}$  とする。分母  $p$  が  $d_r^2$  の約数であることを示す。  
 $r-s$  は  $d_r$  の約数であり、 $s+i$  は  $d_r$  の約数である：

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} + \cdots + \frac{1}{r} \right\} = \frac{m}{d_r^2}$$

の形になる。ただし  $m$  は整数である。これにより  $p$  は  $d_r^2$  の約数である。

次に  $r = s$  と仮定する。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^{r+\sigma} y^{r+\sigma}) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{r+\sigma} (1+xy+x^2y^2+\cdots) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{k+r+\sigma} dx dy \\ &= \int_0^1 y^{k+r+\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^{k+r+\sigma} dx dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+r+\sigma+1} \int_0^1 y^{k+r+\sigma} dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2} \end{aligned}$$

と表すことが出来る。 $\sigma = 0$  のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} (x^r y^r) dx dy &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2} \\ &= \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{(r+2)^2} + \frac{1}{(r+3)^2} + \cdots \\ &= \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \cdots - \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

となる。

次の補題は上の定理より明らかである。

#### 補題 5

次の積分は  $A_n \in \mathbb{Z}, B_n \in \mathbb{Z}$  を使って次の表現を持つ:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy = (A_n + B_n \zeta(2)) d_n^{-2} \quad (3)$$

ここで  $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$  は Legendre-type の多項式であり

$$n! P_n(x) = \left\{ \frac{d}{dx} \right\}^n x^n (1-x)^n$$

によって与えられている。

#### 定理 6

$\zeta(2)$  は無理数である。

**証明** (3) の左辺を  $x$  に関して  $n$  回部分積分して式変形する:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} dx dy \right| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy \right| \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy} dx dy = \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{5n} \zeta(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 < |A_n + B_n \zeta(2)| &= d_n^2 \left| \int_0^1 \int_0^1 \left( \frac{y(1-y)x(1-x)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} dx dy \right| \\
&< d_n^2 \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) < (3^n)^2 \left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}^{5n} \zeta(2) \\
&< 2 \left\{ \frac{48}{59} \right\}^n
\end{aligned}$$

$\zeta(2)$  が有理数であると仮定する：ここで  $\zeta(2) = \frac{h}{g}$ .

$$g|A_n + B_n \zeta(2)| = g|A_n + hB_n| \geq 1 \quad (4)$$

一方

$$g|A_n + B_n \zeta(2)| < g \cdot 2 \left\{ \frac{48}{59} \right\}^n \quad (5)$$

(5) は十分大きな  $n$  に対して 1 より小さい。このことは (4) に矛盾する。したがって  $\zeta(2)$  は無理数である。 ■

#### 4 交代オイラーの定数

交代オイラーの定数の定義式は  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right)$  である。J.Sondow によってこの定数は、次のように積分表現されることが示された ([Son05]) :

定理 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1-x}{(1+xy)(-\log xy)} dx dy = \log \frac{4}{\pi}$$

証明

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \log \frac{n+1}{n} \quad \text{となる。}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

である。また、後者は Wallis の積の対数になる。

$$\log \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^{n-1}} \right) = \log \left( \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \dots \right) = \log \frac{\pi}{2}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{1}{n} - \log \frac{n+1}{n} \right) = \log \frac{4}{\pi} = \log 2 - \log \frac{\pi}{2} = \log 2 - \log \pi + \log 2$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{1-x}{(1+xy)(-\log xy)} dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1-x}{-\log xy} (xy)^n dx dy \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 (1-x) \frac{(xy)^n}{-\log xy} dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 \int_n^{\infty} (1-x)(xy)^t dx dy dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_n^{\infty} \left( \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) \left( \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{(t+1)(t+2)} \right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{n+1} - \log \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{n} - \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right\} = \log \frac{4}{\pi}
\end{aligned}$$

### 参 考 文 献

- [Beu79] F.Beukers, A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$ , Bull.London Math.Soc. Vol.11,1979,pp.268-272
- [Cha04] R.Chapman, A proof of Hadjicostas's conjecture, <http://arXiv.org/abs/math/0405478>
- [Had04] P.Hadjicostas, A conjecture-generalization of Sondow's formula, <http://arXiv.org/abs/math/0405423>
- [Son98] J.Sondow, An antisymmetric formula for Euler's constant, Math. Mag. Vol.71,1998,pp.219-220
- [Son03] J.Sondow, Criteria for irrationality of Euler's constant, Proc.A.M.S. Vol.131,2003, pp.3335-3344
- [Son03a] J.Sondow, An Infinite Product for  $\gamma$  via Hypergeometric Formulas for Euler's constant  $\gamma$ , <http://arXiv.org/abs/math/0306008>
- [Son04] J.Sondow, A faster product for  $\pi$  and a new integral for  $\ln \frac{\pi}{2}$ , <http://arXiv.org/abs/math/0401406>
- [Son05] J.Sondow, Double Integrals for Euler's Constant and  $\text{Ln} \frac{4}{\pi}$  and an Analog of Hadjicostas's Formula, Amer. Math. Monthly Vol. 112, 2005, pp.61 - 65