数理解析研究所講究録
1515巻 2006年 34-39

固有デファイナブル作用について

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

ここでは、実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ で考察する。このような構造は、[12] により、非可算無限個存在することが知られている。実閉体上でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[1], [2] などに性質がまとめられている。ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

連続のカテゴリーでのスライスの存在・埋め込み定理等の古典的な結果 [7], [8], [9], [10] が知られており、その固有デファイナブル版を考察する。詳しい内容は、[6] に書かれている。G がコンパクトの場合は、[4], [3] 等で研究されている。固有の場合が、G がコンパクトの場合の一般化にあたる。

$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル写像**とは、f のグラフがデファイナブル集合であることである。ここでは、デファイナブル写像は連続と仮定する。

$\mathbb{R}^n$ のデファイナブル部分集合 G が**デファイナブル群**とは、G が群であって、群演算 $G \times G \to G, G \to G$ がデファイナブル写像となることである。

G をデファイナブル群, X をデファイナブル集合とするとき、デファイナブル写像 $\phi :$ $G \times X \to X$ で次を満たすものを**デファイナブル群作用**という。

(1) $\forall x \in X, \phi(e, x) = x$, ただし、$e$ は G の単位元とする。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 57R22, 03C64.
Keywords and Phrases. Definable G sets, definable slices, proper, o-minimal, definable G imbeddings.

(2) $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$, $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$。
簡単のため、$\phi(g, x)$ のことを gx と書く。

デファイナブルG集合とは、デファイナブル集合とデファイナブル群作用 $\phi : G \times X \to X$ の組のことである。簡単のため、X と略記する。デファイナブル写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル固有**とは、Y の任意のデファイナブルコンパクト部分集合 C に対して、$f^{-1}(C)$ がコンパクトとなることである。デファイナブル G 集合 X が**固有デファイナブル G 集合**とは、写像 $\phi \times id : G \times X \to X \times X, (g, x) \mapsto (gx, x)$ がデファイナブル固有となることである。G がコンパクトデファイナブル群ならば、任意のデファイナブル G 集合は、固有となる。

G がコンパクトの場合、軌道型が定義されている。固有作用の場合に、軌道型について考える。X をデファイナブル G 集合, $x \in X$ のとき、$G(x) := \{gx | g \in G\}$ を x を**通る軌道**という。ある $x \in X$ が存在して、$X = G(x)$ のとき、作用が**推移的**または X を**等質空間**という。

定理 1 (Definable quotients, 10.2.3, 10.2.5 [1]). 群 G をデファイナブル群、X を固有デファイナブル G 集合とするとき、軌道空間 X/G はデファイナブル集合で、射影 $\pi : X \to X/G$ は全射デファイナブル固有デファイナブル写像となる。

G をデファイナブル群とする。G の部分群 H が**デファイナブル部分群**とは、H が G のデファイナブル部分集合であることである。[11] より、G の任意のデファイナブル部分群は、閉部分群となる。この逆は成立しない。$\mathbb{R}$ の閉部分群 $\mathbb{Z}$ はデファイナブルでない。

H をデファイナブル群 G のデファイナブル部分群とするとき、$H \times G \to G, (h, g) \mapsto hg$ により、G はデファイナブル H 集合とみれる。定理 1 より、以下の命題を得る。

命題 2. H をデファイナブル群 G のデファイナブル部分群とする。このとき、G は、固有デファイナブル H 集合で、射影 $G \to G/H$ は全射デファイナブル固有デファイナブル写像である。

X, Y をデファイナブル集合とする。同相写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル同相写像**とは、f がデファイナブルであることである。

X, Y をデファイナブル G 集合とする。写像 $f : X \to Y$ が **G 写像**とは、$\forall g \in G, \forall x \in X$ $f(gx) = gf(x)$ となることである。G 写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル G 写像**とは、f がデファイナブル写像となることである。デファイナブル G 写像 $f : X \to Y$ が**デファイナブル G 同相写像**とは、f が同相写像となることである。$x \in X$ とするとき、$G_x := \{g \in G | gx = x\}$

を x の**アイソトロピー部分群**という。X が固有のとき、任意の $x \in X$ に対して、G_x がコンパクトとなる。

命題 3. G をデファイナブル群、X を推移的 G 作用をもった固有デファイナブル G 集合、$x \in X$ とする。このとき、$f : G/G_x \to X, f(gG_x) = gx$ はデファイナブル G 同相写像である。

この命題の証明には、少し準備を要する。

定理 4 (部分的自明性定理、9.1.2 [1]). X, Y をデファイナブル集合、$f : X \to Y$ を連続とは仮定しないが、グラフがデファイナブルな写像とする。このとき、Y の有限個のデファイナブル部分集合への分割 $\{C_i\}$ とデファイナブル同相写像 $k_i : f^{-1}(C_i) \to C_i \times f^{-1}(a_i)$ が存在して、$f|f^{-1}(C_i) = p_i \circ k_i$ となる。ただし、$a_i \in C_i, p_i : C_i \times f^{-1}(a_i) \to C_i$ を射影とする。

この定理の系として以下を得る。

系 5. $f : X \to Y$ を連続とは仮定しないが、グラフがデファイナブルな写像とする。このとき、X のデファイナブル開集合 Z が存在して、$f|Z : Z \to Y$ は連続で、$\dim(X - Z) < \dim X$。ただし、$\dim \emptyset = -\infty$ とする。

命題 3 の証明. 定理 1 より、G/G_x はデファイナブル集合である。f の構成法より、f は全単射連続 G 写像である。系 5 より、X のデファイナブル開部分集合 U が存在して、$f^{-1}|U : U \to f^{-1}(U)$ は連続である。$g \in G$ で移すことによ、f^{-1} は連続となる。 □

この証明でデファイナブルを仮定しない一般の場合は、f^{-1} の連続性を導くことができない。系 5 が本質的である。

G をデファイナブル群とする。二つの等質固有デファイナブル空間が**同値**とは、それらがデファイナブル G 同相であることである。G/H の同値類を (G/H) で表す。等質固有デファイナブル G 集合の同値類 $(X), (Y)$ に対して、順序 $(X) \geq (Y)$ が成立するとは、デファイナブル G 写像 $f : X \to Y$ が存在することと定義する。$(X) = (G/H), (Y) = (G/K)$ のとき、$(X) \geq (Y) \Leftrightarrow H$ が K のデファイナブル部分群と共役なることである。

この順序は、一般の以下の順序の公理を満たす。

(1) $(X) \leq (X)$。

(2) $(X) \leq (Y)$ かつ $(Y) \leq (X)$ ならば $(X) = (Y)$。

(3) $(X) \leq (Y)$ かつ $(Y) \leq (Z)$ ならば $(X) \leq (Z)$。

公理の (1) と (3) を満たすことを確かめるのは容易だが、(2) を示すには、デファイナブルの仮定がないとできない。この同値類を**軌道型**という。この軌道型の有限性が次の定理である。

定理 6 ([6]). G をデファイナブル群とするとき、任意の固有デファイナブル G 集合 X は有限個の軌道型しかもたない。

この定理で、X のデファイナブルの仮定をはずすと、たとえば無限個の連結成分をもつことを許すと、不成立となる。デファイナブルの仮定が本質的である。連続のカテゴリー・C^∞ 級のカテゴリーでは、一般にはこの定理を導くことができない。

G をデファイナブル群、X を固有デファイナブル G 集合、H を G のコンパクトデファイナブル群とする。$S \subset X$ が**デファイナブル H スライス**とは、GS が X の開集合であって、デファイナブル G 写像 $f: GS \to G/H$ が存在して、$f^{-1}(eH) = S$ となることである。このとき、GS を**デファイナブルチューブ**という。$\forall x \in X$ に対して、**x におけるデファイナブルスライス**とは、デファイナブル G_x スライスで x を含むものをいう。

定理 7 ([6]). G をデファイナブル群、X を固有デファイナブル G 集合とする。

(1) 任意の $x \in X$ に対して、 x におけるデファイナブルスライスが存在する。

(2) X は有限個のデファイナブルチューブで覆われる。

この定理の証明の鍵となるのは、デファイナブル集合の三角形分割定理である

$\mathbb{R}^n$ の中の**複体** K とは、$\mathbb{R}^n$ の中の単体の有限個の集合で、$\sigma_1, \sigma_2 \in K$ ならば $\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \emptyset$ またはある共通の辺単体 τ が存在して、$\overline{\sigma_1} \cap \overline{\sigma_2} = \overline{\tau}$ となることである。ただし、$\overline{\sigma_1}, \overline{\sigma_2}, \overline{\tau}$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の中での σ_1, σ_2, τ の閉包を表す。ここで τ は K に属することを要求していない。$A \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。$\mathbb{R}^n$ における A の**デファイナブル三角形分割**とは、$\mathbb{R}^n$ における複体 K とデファイナブル同相写像 $\phi: A \to |K|$ の組 (ϕ, K) のことである。この三角形分割が $B \subset A$ と**両立する**とは、B が $\phi^{-1}(K)$ の元の和集合となることである。

定理 8 (デファイナブル三角形分割定理、8.2.9 [1]). S を $\mathbb{R}^n$ のデファイナブル集合、$S_1, \dots, S_k$ を S のデファイナブル部分集合とする。このとき、S の $\mathbb{R}^n$ におけるデファイナブル三角形分割が存在して、$S_1, \dots, S_k$ と両立する。

定理 7 は軌道空間 X/G にデファイナブル三角形分割定理を適用して、証明される。この三角形分割の有限性から、定理 7 の (2) が得られる。

[5] により、デファイナブルファイバー束が導入されている。定理 7 の系として、X が 1 軌道型のとき、射影 $p: X \to X/G$ はデファイナブルファイバー束の構造をもつことが示される。

系 9. G をデファイナブル群、X を固有デファイナブル G 集合とし、X が *1* 軌道型 (G/H) をもつとき、$(X, p, X/G, G/H, N(H)/H)$ はデファイナブルファイバー束である。ただし、$p: X \to X/G$ は射影、$N(H) := \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$ とする。

[5] においては、系 9 の X がコンパクトを仮定した場合が証明されている。

G をデファイナブル群とする。G の**表現写像**とは、群準同型写像 $G \to GL_n(\mathbb{R})$ でデファイナブル写像となるものである。G の**表現**とは、G の表現写像の表現空間のことである。ある $GL_n(\mathbb{R})$ のデファイナブル部分群と**デファイナブル線形群**という。

定理 10 ([6]). G をデファイナブル線形群、X を固有デファイナブル G 集合とするとき、X は G のある表現にデファイナブル G 埋め込み可能である。

この定理は、まず、X から G 不動点 X^G を除いた集合が、G のある表現にデファイナブル G 埋め込み可能であることを示す。次に、$X - X^G$ が G の別の表現にデファイナブル G 埋め込み可能であることを帰納法を用いて示す。この帰納法を用いるところで、G がデファイナブルであることが本質的となる。この二つを用いて、X が G のある表現にデファイナブル G 埋め込み可能であることを証明する。

References

[1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
[2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
[3] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci., **54**, (2004), 1-15.
[4] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.
[5] T. Kawakami, *Homotopy property of definable fiber bundles*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **53**, (2003), 1–6.
[6] T. Kawakami, *Proper definable actions*, preprint.
[7] D. Montgomery and L. Zippin, *A theorem on Lie groups*, Bull. Amer. Math. Soc., **48**, (1942), 448–452.
[8] G.D. Mostow, *Equivariant embeddings in Euclidean spaces*, Ann. of Math., **65**, (1957), 432–446.
[9] R.S. Palais, *Imbedding of compact differential transformation groups in orthogonal representations*, J. Math. Mech., **6**, (1957), 673–678.
[10] R.S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. **73**, (1961), 295–323.

[11] A. Pillay, *On groups and fields definable in o-minimal structures*, J. Pure Appl. Algebra **53**, (1988), 239-255.

[12] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), no. 4, 751–777.