数理解析研究所講究録
1517巻 2006年 92-106

C_n-多様体から表現球面への等変写像とBorsuk-Ulam型定理

京都府立医科大学大学院医学研究科　長崎生光 (Ikumitsu Nagasaki)
Graduate School of Medical Science, Kyoto Prefectural University of Medicine
京都産業大学理学部　牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

1　序論

m と n を、$m \geqq n$ なる関係を満たす、正の整数とする。このとき Borsuk-Ulam の定理とは、m 次元球面 S^n から $\mathbb{R}^n$ への任意の連続写像 $f: S^m \to \mathbb{R}^n$ に対して、ある $a \in S^m$ が存在して、$f(a) = f(-a)$ となることを、主張している。従って、一つの存在定理である。この定理を、変換群論の言葉で書き換えると次のようになる。こう書き換えることで非存在定理となることも興味深い。

Proposition 1.1 (Borsuk-Ulam Theorem). S^m と S^n に位数 2 の巡回群 C_2 が対心的に作用しているとする。連続な C_2 写像 $f: S^m \to S^n$ が存在すれば $m \leqq n$ である。

さて、G を群とし、X と Y を G-空間とする。この小論を通し、写像は連続であるとする。G-写像 $\varphi: X \to Y$ が存在すれば、$x \in X$ と $\varphi(x) \in Y$ のアイソトロピー部分群の間には常に $G_x \subset G_{\varphi(x)}$ なる関係が成り立つ。G-写像 $\varphi: X \to Y$ が G-等変写像（**G-isovariant map**）であるとは、任意の $x \in X$ に対して、$G_x = G_{\varphi(x)}$ が成り立つことを言う。これは、「X の同じ G-軌道上の二点 x_1, x_2 について、$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ が成り立つならば、$x_1 = x_2$ が成り立つ」という条件と同値である。2つの G-等変写像 $\varphi, \psi: X \to Y$ が G-ホモトピー同値であるとする。φ から ψ への G-ホモトピー $F: X \times [0,1] \to Y$ が G-等変写像であるとき、F を φ から ψ への G-等変ホモトピーという。X から Y への G-等変写像の G-等変ホモトピー類を $[X, Y]_G^{\mathrm{isov}}$ と書く。さて、同変写像のかわりに等変写像を用いるというセッティングのもと、Borsuk-Ulam 型の定理が成立する。それについては、A. G. Wasserman による次の結果がある。

Proposition 1.2 **([5] isovariant Borsuk-Ulam Theorem).** G を有限可解群とする。V, W を G-表現とする。G-等変写像 $f: V \to W$ が存在すれば、

$$\dim V - \dim V^G \leqq \dim W - \dim W^G \tag{1}$$

が成り立つ。

それに引き続く、等変写像と Borsuk-Ulam 型の不等式の間の関係についての研究としては参考文献の [2] がある。これを受けて、この小論の目的は、ある種の条件下で G-等変写像の存在と Borsuk-Ulam 型の不等式の成立が同値であることを証明し、G が n 次巡回群 C_n である場合について、C_n-等変写像 を C_n-等変ホモトピー型で分類することである。具体的には我々の最初の結果は次のものである。

Theorem A **.** G を有限群とする。M を自由 G-作用をもつ m 次元 $mod|G|$ ホモロジー球面とし、W を G のユニタリー表現とする。このとき、M から G-表現球面 SW への G-等変写像 $f: M \to SW$ が存在すれば、G の単位群ではない部分群 H に対して、

$$\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^H \tag{2}$$

が成り立つ。ただし、$SW^H = \emptyset$ のときは $\dim SW^H = -1$ とする。

G の SW への作用について、その特異集合を $SW^{>1} = \bigcup_{\{1\} \neq H \leq G} SW^H$ で定義する。このとき、次の Corollary が直ちに得られる。

Corollary B **.** G を有限群とする。M を自由 G-作用をもつ m 次元 $mod|G|$ ホモロジー球面とし、W を G のユニタリー表現とする。このとき、M から G-表現球面 SW への G-等変写像 $f: M \to SW$ が存在すれば、

$$\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^{>1} \tag{3}$$

が成り立つ。ただし、$SW^{>1} = \emptyset$ のときは $\dim SW^{>1} = -1$ とする。

我々の目指すところは、Corollary B の逆を示すことである。すなわち、Borsuk-Ulam 型の不等式 (3) が成り立つときに、G-等変写像が存在するかという問題を考えることである。我々は G が有限巡回群の場合に、次を得た。

Theorem C . C_n を位数 n の巡回群とする。M を向き付け可能な自由 C_n-作用をもつ m-次元弧状連結向き付け可能な C^∞ 閉多様体であるとする。W を C_n の忠実なユニタリー表現とする。不等式

$$\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^{>1} \tag{3}$$

がなりたてば、M から G-表現球面 SW への G-等変写像 $f : M \to SW$ が存在する。

最後に、上の定理で存在が保証された G-等変写像を G-等変ホモトピー型で分類することを紹介する。Theorem C の条件の下、(3) 式で不等号が真に成り立つときには、G-等変ホモトピー類はただ一つであることが示される。(3) 式で等号が成立しているときには、5 節の Corollary E で定義される写像 $\mathrm{mD}_{f_0} : [M, SW]^{\mathrm{isov}}_{C_n} \to \oplus_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$ により $[M, SW]^{\mathrm{isov}}_{C_n}$ は完全に分類される。ただし、f_0 は任意に固定された M から SW への C_n-等変写像であって、

$$\mathcal{A} = \{H \in \mathrm{Iso}(W) | \dim SW^H = \dim SW^{>1}\}$$

である。mD_{f_0} の定義には、C_n-写像の多重写像度（multidegree）に関する Hopf 型定理が使われる。これが、Theorem D である。なお多重写像度は S^1 作用の場合の等変写像の分類に際して、参考文献 [2] でに最初に導入されたものである。

この小論は次のように構成されている。2 節で定理 A を証明する。3 節で同変障害理論に関して、必要なところを文献 [4] より引用し、まとめる。4 節で定理 C を証明し、5 節では多重写像度を導入し、我々の条件の元での C_n-等変写像の分類定理（Corollary E）を述べる。6 節では我々の定理を用いた例を述べる。

2 Theorem A の証明

この節では Theorem A の証明を行う。この節を通して、M は Theorem A の条件を満たすものとし、W を G のユニタリー表現空間とする。

Lemma 2.1. M を自由な G 作用をもつ m 次元 C^∞ 多様体とし、W を G のユニタリー表現空間とする。p を $|G|$ の一つの素因数とする。M から W の球面 SW への G-等変写像 $f : M \to SW$ が存在すれば、M から $S(W^{C_p})^\perp$ への C_p 写像 f_p が存在する。

Proof. $f : M \to SW$ は G-等変写像であるから、C_p-等変写像と考えることができる。したがって、M の C_p-軌道を f で SW にうつしても、その軌道は小さくならない。C_p は M に自由に作用するので、f が C_p-等変写像であることより、$f(M)$ に登場する C_p-軌道型は p 点軌道

のものに限られる。SW において、C_p-軌道が p 点軌道でないところは、SW^{C_p} に限られる。従って、$f(M) \subset SW \setminus SW^{C_p}$ が成り立つ。

C_p の $S(W^{C_p})^\perp$ への作用は自由であって、$SW \setminus SW^{C_p}$ から $S(W^{C_p})^\perp$ への G-ホモトピー同値写像が存在する。実際、

$$SW \setminus SW^{C_p} \simeq_{C_p} W \setminus W^{C_p} = ((W^{C_p})^\perp \setminus \{0\}) \times W^{C_p} \simeq_{C_p} (W^{C_p})^\perp \setminus \{0\} \simeq_{C_p} S(W^{C_p})^\perp$$

である。f とこれを合成することで、C_p-写像 $f_p : M \to S(W^{C_p})^\perp$ が得られる。 □

$H_*(M; \mathbb{Z}/|G|) \cong H_*(S^m; \mathbb{Z}/|G|)$ がなりたつことから $|G|$ を割り切る素数 p に対して、$H_*(M; \mathbb{Z}/p) \cong H_*(S^m; \mathbb{Z}/p)$ が成り立つ。よって、Lemma 2.1 より C_p-写像 $f_p : M \to SW^{C_p}$ に対して C_p-Borsuk-Ulam の定理 ([1] 参照) が成り立ち、

$$\dim M \leqq \dim S(W^{C_p})^\perp = \dim SW - \dim SW^{C_p} - 1 \tag{4}$$

となる。単位群と異なる G の一般の部分群 H については、素数位数の巡回部分群 C_p をもつので、

$$\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^{C_p} \leqq \dim SW - \dim SW^H \tag{5}$$

が成り立つ。

Corollary B は $\dim SW^{>1} = \max_{\{1\} \neq H \leq G} \dim SW^H$ であることから、定理より直ちに従う。

3 同変障害理論の復習

Theorem C と Theorem D の証明には同変障害理論を用いる。読者の便宜のため、この小論の設定のもとで使う道具を簡単にここにまとめておく。記号や命題は文献 [4] のものを元にしている (引用である)。

G を有限群とする。まず、同変コホモロジー群を導入することから始める。(X, A) を相対 G-CW 複体で $X \setminus A$ 上に G が自由に作用しているものとする。すなわち、各 $n \geqq 0$ に対して、X_n は X_{n-1} に軌道型 $G(= G/\{e\})$ の n-胞体（これらは自由 n-胞体 ともいわれる）を接着することで得られ、$X_0 \supset A$ であり、$n < 0$ に対しては $X_n = A$ となっている。$C_*(X, A)$ を次のチェイン複体とする。

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X_{n+1}, X_n) \xrightarrow{d} H_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow \cdots$$

ただし、ホモロジー群は整数係数特異ホモロジー群で、上の d は三対 (X_{n+1}, X_n, X_{n-1}) のホモロジー完全系列の中の境界準同型写像である。

X 上の G-作用で X_n は不変であって、これは $H_n(X_n, X_{n-1})$ 上の G-作用を誘導する。従って $H_n(X_n, X_{n-1})$ は左 $\mathbb{Z}G$-加群になり、$C_*(X, A)$ はこのような加群の集まりで構成されるチェイン複体となる。π を $\mathbb{Z}G$-加群とする。このとき、

$$C_G^*(X, A; \pi) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, A); \pi)$$

は同変チェイン複体である。そのコホモロジー群を $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi)$ と表す。$\mathbb{Z}G$-加群 π を $X/G\backslash A/G$ 上の局所係数系 $\{\pi\}$ として捉えることで、同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi) \cong H^*(X/G, A/G, \{\pi\})$$

が成立する。Y を弧状連結で n-単純な G-空間とする。すなわち、$\pi_1(Y, y)$ が $\pi_n(Y, y)$ に自明に作用する空間である。ただし、$n \geqq 1$ とする。Y についての上記の仮定より基点つきのホモトピー類を自由ホモトピー類に写す自然な写像 $\pi_n(Y, y) \to [S^n, Y] = \pi_n(Y)$ は全単射である。従って、Y 上の G-作用は $\pi_n(Y)$ 上の G-作用を矛盾なく定義し、その結果、$\pi_n(Y)$ は $\mathbb{Z}G$-加群となる。Y を n-単純な G-空間と仮定したことより、同型

$$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_n(Y)) \cong H^*(X/G, A/G, \pi_n(Y))$$

が成り立つ。

同変障害理論により、次の事柄が成り立つ。

Proposition 3.1 ([4]). G を有限群とする。(X, A) を相対 G-CW 複体で $X \setminus A$ 上に G が自由に作用しているもの、Y を n-単純な G-空間とする。このとき、次が成り立つ。

1. $\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_{*-1}(Y)) = 0$ であれば、任意の G-写像 $f : A \to Y$ は G-写像 $F : X \to Y$ に拡張する。
2. G-写像 $f : A \to Y$ が二つの G-写像 $F, F' : X \to Y$ に拡張し、$\mathfrak{H}_G^*(X, A; \pi_*(Y)) = 0$ であるとする。このとき、F と F' は G-ホモトピー同値である。

4 Theorem C の証明

M を向きを保つ自由 C_n -作用をもち弧状連結で向き付け可能な m 次元多様体とする。また、W を忠実な複素 C_n 表現空間とする。まず、

$$\mathcal{A} = \{H \in \mathrm{Iso}(W) |\, \dim SW^H = \dim SW^{>1}\}$$

に関する補題を用意する。

Lemma 4.1. $\mathcal{A}$ に属する G の異なる二つの部分群 H と H' に対して、次が成り立つ。

1. $<H, H'>$ を H と H' で生成される部分群とすると、$<H, H'> \notin \mathcal{A}$ が成り立つ。

2. $W^H \neq W^{H'}$

Proof. まず、$H_1, H_2 \in \mathcal{A}$ に対して、$H_1 \subset H_2$ が成り立てば、$H_1 = H_2$ が成り立つことを証明する。$H_1 \subsetneqq H_2$ とし、$G_x = H_1$ となる $x \in SW$ をとる。すると、$x \notin SW^{H_2}$ であるから、$SW^{H_2} \subsetneqq SW^{H_1}$ となる。ここで、それぞれの固定点集合は球面であることから、であるから、$\dim SW^{H_2} < \dim SW^{H_1}$ となる。そうすると $\mathcal{A}$ の定義より、$H_2 \notin \mathcal{A}$ となる。これは仮定に反する。よって $H_1 = H_2$ である。(1) を示す。$<H, H'> \in \mathcal{A}$ とおくと、先に示したことより、$<H, H'> = H = H'$ が成立する。これは矛盾である。したがって、$<H, H'> \notin \mathcal{A}$ が成立する。続いて (2) を示す。まず、$W^H \cap W^{H'} = W^{<H,H'>}$ が成り立つ事に注意する。この式で $<H, H'> \notin \mathcal{A}$ であるから、$\mathcal{A}$ の定義より $\dim SW^{<H,H'>} < \dim SW^{>1} = \dim SW^H$ となる。共通部分を考えることで次元が下がってしまったので、$W^H \neq W^{H'}$ である。 □

$SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ とする。不動点集合を抜いたので、C_n の SW_{free} への作用は自由である。このとき、$\mathfrak{H}^*_G(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}}))$ に C_n-写像 $f : M \to SW_{\text{free}}$ が存在するかどうかの障害がある。

Lemma 4.2. 上で定義した SW_{free} は空集合ではない。

Proof. $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ で仮定の不等式は $\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^{>1}$ であった。特に、$\dim SW - \dim SW^{>1} \geqq 1$ である。これより、$SW_{\text{free}} \neq \emptyset$ である。 □

Lemma 4.3. SW_{free} は弧状連結である。

$SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ であって、次の Proposition 4.4 でみるように、$\dim SW - \dim SW^{>1} \geqq 2$ であるから (つまり取り除く空間の余次元が 2 以上あるから)、SW_{free} は弧状連結である。 □

ここで、$k = \dim SW - \dim SW^{>1}$ とおく。

Proposition 4.4. 上で定義した SW_{free} は $(k-2)$-連結である。

Proof. Lemma 4.2 より、SW_{free} は空ではない。そして、各 SW^H は球面であることとユニタリー表現であることより、全体と一致しない以上 $k \geqq 2$ となる。$d \leqq k-2$ であるような d に対して、$\pi_d(SW_{\text{free}}) = 0$ を証明する。$\varphi : S^d \to SW_{\text{free}}$ を考えると、

$$(d+1) + \dim SW^{>1} < \dim SW$$

であれば、φ は null homotopic である。したがって、$d \leqq k-2$ のとき、$\pi_d(SW_{\text{free}})=0$ である。 □

Proposition 4.5. SW_{free} は $(k-1)$-単純である。

Proof. $k>2$ の時は、Proposition 4.4 より、SW_{free} は単連結になる。従って、SW_{free} は $(k-1)$-単純である。また、$k=2$ のときは、Lemma 4.6 に見るように $\pi_1(SW_{\text{free}})$ は可換である。従って、SW_{free} は 1 単純になっている。

□

Lemma 4.6. $k=2$ のとき、$\pi_1(SW_{\text{free}})$ は可換である。

Proof.

$$SW_{\mathcal{A}\text{-free}} = SW \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} SW^H = \bigcap_{H\in\mathcal{A}} (SW\setminus SW^H)$$

とおく。$1\neq K\in \mathrm{Iso}(SW)\setminus\mathcal{A}$ なる G の部分群 K に対しては、$\mathcal{A}$ の定義より、$\dim SW - \dim SW^K \geqq 4$ である。SW_{free} を複体と見たとき、その次元は SW の次元に等しい。なぜなら、SW から SW の次元より低い次元の球面をのぞいていることになるからである。SW_{free} から $SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ を構成するには、その次元より 4 以上低い次元の球面を貼り付けることになる。従って、一般の位置の議論により、包含写像 $SW_{\text{free}}\subset SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は基本群の間の同型対応 $\pi_1(SW_{\text{free}})\cong\pi_1(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ を誘導する。しかも、$SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は $W_{\mathcal{A}\text{-free}} = W\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}} W^H$ の強収縮変形である。従って、$\pi_1(W_{\mathcal{A}\text{-free}})$ がアーベル群であることを示せばよい。$H\in\mathcal{A}$ で $k=2$ であることより、$\dim(W^H)^\perp=2$ であり、従ってこれは既約表現である。しかも、Lemma 4.1 より $H\neq H'$ のとき、$(W^H)^\perp\neq(W^{H'})^\perp$ であるから、W は、ある部分表現 W' が存在して、

$$W = \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} (W^H)^\perp \oplus W'$$

と分解される。従って、

$$W_{\mathcal{A}\text{-free}} \approx \prod_{H\in\mathcal{A}} ((W^H)^\perp\setminus\{0\})\times W'$$

となることが分かる。従って、

$$\pi_1(W_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} \mathbb{Z}$$

が成り立つ。

Lemma 4.7. 巡回群 C_n は $\pi_{k-1}(SW_{\text{free}})$ に自明に作用する。

Proof. $\pi_{k-1}(SW_{\text{free}})$ 上の C_n-作用は S^1 作用に拡張され、S^1 の連結性より $g \in C_n$ の誘導する写像が $e \in C_n$ の誘導する写像とホモトピックになる。よって $\pi_{k-1}(SW_{\text{free}})$ 上の C_n-作用は自明である。 □

Proposition 4.5 と Lemma 4.7 とにより、コホモロジーに関して

$$\mathfrak{H}^*_G(M, \pi_{*-1}(SW_{\text{free}})) \cong H^*(M/C_n; \pi_{*-1}(SW_{\text{free}}))$$

が示された。Proposition 4.4 より、$q-1 \leqq k-2$ すなわち、$q \leqq k-1$ の場合に、$H^q(M/C_n; \pi_{q-1}(SW_{\text{free}})) \quad = 0$ が示された。$q \geqq k$ のときは、仮定の不等式を使う。それによると、$\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^{>1} = k$ であるので、

$$\dim M/C_n = \dim M = k-1 < q$$

が成り立つ。よって、$q \geqq k$ なる q に対しても、$H^q(M/C_n; \pi_{q-1}(SW_{\text{free}})) = 0$ が示された。以上より、$H^*(M/C_n; \pi_{*-1}(SW_{\text{free}})) = 0$ が示された。よって、を自由な C_n 作用をもつ m 次元多様体 M から、自由な C_n-作用をもつ $SW_{\text{free}} = SW \setminus SW^{>1}$ への C_n-写像の存在が証明された。この写像での M の像は SW_{free} に含まれるので、これは M から SW への C_n-等変写像が存在することを意味する。

5 等変ホモトピー類の決定

C_n-等変ホモトピー型による分類 $[M, SW]^{isov}_{C_n}$ を計算する代わりに、$[M, SW_{\text{free}}]_{C_n}$ による分類を考えることをまず考える。分類には $H^*(M/C_n; \pi_*(SW_{\text{free}}))$ に障害が現れる。M の次元によって分けて考える。すなわち、$\dim M < k-1$ のときと $\dim M = k$ の時とにである。$q \leqq k-2$ のときは、M の次元に関わらず、Proposition 4.4 より $\pi_q(SW_{\text{free}}) = 0$ である。$\dim M < k-1$ のとき $q \geqq k-1$ なる q に対しては、コホモロジーの次元が M/C_n の次元を超えてしまうので、$H^q(M/C_n; \pi_q(SW_{\text{free}})) = 0$ が示される。$\dim M = k-1$ のときは $q > k-1$ なる q に対しては、コホモロジーの次元が M/C_n の次元を超えてしまうので、$H^q(M/C_n; \pi_q(SW_{\text{free}})) = 0$ となる。表にまとめると、次のようになる。

この時点で次のことが示された。

Proposition 5.1. $\dim M < k-1$ であれば、M から SW へのすべての 等変写像は等変ホモトピックである。 □

表 1: $H^q(M/C_n;\pi_q(SW_{\mathrm{free}}))$ の計算

$q \setminus \dim M$	$\dim M < k-1$	$\dim M = k-1$
$q > k-1$	0 (次元より高いコホモロジー)	0 (次元より高いコホモロジー)
$q = k-1$	0 (次元より高いコホモロジー)	研究対象
$q = k-2$	0 (係数群が消える)	0 (係数群が消える)
$q < k-2$	0 (係数群が消える)	0 (係数群が消える)

したがって、のこるは $\dim M = k-1$ のときの $[M,SW]^{isov}_{C_n}$ の決定である。

$k = \dim SW - \dim SW^{>1}$ で球面の次元は奇数次元であることより、k は 2 以上の偶数である。従って、M は奇数次元となって、M 上の C_n の作用は向きを保つ。とくに、M/C_n は向き付け可能である。まず $k \geqq 4$ の時を考える。このときは、係数群は可換である。

Lemma 5.2. W を忠実なユニタリー C_n-表現とする。このとき、

1. 包含写像, $i : SW_{\mathrm{free}} \to SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ から誘導される準同型写像 $i_* : \pi_{k-1}(SW_{\mathrm{free}}) \to \pi_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ は同型写像である。

2. *Hurewicz* 準同型

$$h : \pi_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \to H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}), \quad h' : \pi_{k-1}(SW_{\mathrm{free}}) \to H_{k-1}(SW_{\mathrm{free}})$$

は同型写像である。

Proof. (1): まず i_* が単射であることを証明する。$SW_{\mathrm{free}} = SW \setminus SW^{>1}$、$SW_{\mathcal{A}\text{-free}} = SW \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} SW^H$ であって、$SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\mathrm{free}} = \bigcup_{H\in \mathrm{Iso}(W)\setminus\mathcal{A}} SW^H$ となるので、$\dim SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\mathrm{free}} < \dim SW^{>1}$ が成り立つ。とくに、複素表現で考えているので、

$$\dim(SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\mathrm{free}}) \leqq \dim SW^{>1} - 2 = \dim SW - k - 2$$

となる。$F : S^{k-1} \times I \to SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ で F_0 と F_1 はその像がすでに SW_{free} にあるものを考える。このとき、

$$\begin{aligned}
&\dim SW_{\mathcal{A}\text{-free}} - \dim(S^{k-1} \times I) - \dim(SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\mathrm{free}}) \\
&= \dim SW - k - \dim(SW_{\mathcal{A}\text{-free}} \setminus SW_{\mathrm{free}}) \\
&\geqq \dim SW - k - \dim SW + k + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

となるので、一般の位置の議論により、F を F_0 と F_1 を両端点とする SW_{free} への写像に変形できる。よって、i_* は単射である。i_* が全射であることは、任意の $F : S^{k-1} \to SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ を SW_{free} への写像に変形できることが示せばよい。しかしこれは上記の単射を示すときと同じ方法で示される。

(2): Lemma 4.3, Proposition 4.4 と同様の議論により、$SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は弧状連結、$(k-2)$-connected である。実際、$SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ の構成に際して、SW から取り除く部分に関して、

$$\dim SW - \dim \bigcup_{H\in\mathcal{A}} SW^H = \dim SW - \dim SW^{>1} \geqq 2$$

であるから、弧状連結である。$(k-2)$-連結性についても同様で、$\dim SW^{>1}$ とかかれているところをこれと次元の等しい $\dim \bigcup_{H\in\mathcal{A}} SW^H$ で読み直せばいい。よって Hurewicz の定理より、$\pi_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ が成り立つ。h' が同型写像であることは、Lemma 4.3 と Proposition 4.4 および Hurewicz の定理よりわかる。 □

Lemma 5.3. W を忠実なユニタリー C_n-表現とする。このとき、次の同型が成り立つ。

$$\Phi : H_{k-1}(SW_{\mathrm{free}}) \to \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} H_{k-1}(S(W^H)^\perp) \cong \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} \mathbb{Z}.$$

その定義は、次の同型対応の合成による。

$$\begin{aligned} H_{k-1}(SW_{\mathrm{free}}) \quad &\xrightarrow{i_*} H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \quad \xrightarrow{j_*} \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} H_{k-1}(SW \setminus SW^H) \\ &\xleftarrow{\oplus i_{H*}} \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} H_{k-1}(S(W^H)^\perp) \cong \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ただし、i と j と i_H は包含写像である。

Proof. i_* が同型写像であることは、Lemma 5.2 より示される。続いて、$H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ を計算する。

$$\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \ldots, H_r\}$$

とおく。Mayer-Vietoris の完全系列を使うために次のように書き換える。

$$SW_{\mathcal{A}\text{-free}} = \bigcap_{i=1}^{r}(SW \setminus SW^{H_i}) = \left(\bigcap_{i=1}^{r-1}(SW \setminus SW^{H_i})\right) \cap (SW \setminus SW^{H_r})$$

そうして、

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigcap_{i=1}^{r-1}(SW \setminus SW^{H_i})\right) \cup (SW \setminus SW^{H_r}) \\
=&\bigcap_{i=1}^{r-1}((SW \setminus SW^{H_i}) \cup (SW \setminus SW^{H_r})) \\
=&\bigcap_{i=1}^{r-1}(SW \setminus (SW^{H_i} \cap SW^{H_r})) \\
=&\bigcap_{i=1}^{r-1}(SW \setminus SW^{<H_i,H_r>}) \\
=&SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{<H_i,H_r>}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$< H_i, H_r >$ は H_i と H_r で生成される G の部分群である。Mayer-Vietoris の完全系列より、

$$
\begin{aligned}
&\to H_k(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{<H_i,H_r>}) \to H_{k-1}(SW_{A\text{-free}}) \to \\
&\quad H_{k-1}(\bigcap_{i=1}^{r-1}(SW \setminus SW^{H_i})) \oplus H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_r}) \to H_{k-1}(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{<H_i,H_r>}) \to
\end{aligned}
$$

となる。このとき、それぞれの i に対して、$< H_i, H_r > \notin A$ であることと複素表現を考えていることより、$\dim SW^{<H_i,H_r>} \leqq \dim SW^{>1} - 2$ となり、その結果、

$$
\begin{aligned}
\dim SW - \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{<H_i,H_r>} &\geqq \dim SW - (\dim SW^{>1} - 2) \\
&= k + 2
\end{aligned}
$$

となる。球面から余次元が $k+2$ 以上ある球面の和集合を取り除いているので、

$$
\begin{aligned}
H_k(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{<H_i,H_r>}) = 0 \\
H_{k-1}(SW \setminus \bigcup_{i=1}^{r-1} SW^{<H_i,H_r>}) = 0
\end{aligned}
$$

を得る。その結果、

$$
H_{k-1}(SW_{A\text{-free}}) \cong H_{k-1}(\bigcap_{i=1}^{r-1}(SW \setminus SW^{H_i})) \oplus H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_r})
$$

を得る。これまでの流れを帰納的に繰り返すことで、

$$H_{k-1}(SW_{\mathcal{A}\text{-free}}) \xrightarrow[\cong]{j_*} \bigoplus_{i=1}^{r} H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_i})$$

を得る。

$$\bigoplus_{i=1}^{r} H_{k-1}(SW \setminus SW^{H_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H_{k-1}(S(W^{H_i})^{\perp}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} H_{k-1}(S^{k-1}) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}$$

となる。 □

続いて、$k=2$ の場合を考える。このときは、Lemma4.6 により、$\pi_1(SW_{\text{free}})$ は可換であるので、$H^1(M/C_n; \pi_1(SW_{\text{free}}))$ が意味を持つ。さらに Lemma4.6 の証明中にあるように包含写像 $SW_{\text{free}} \subset SW_{\mathcal{A}\text{-free}}$ は基本群の間の同型対応 $\pi_1(SW_{\text{free}}) \cong \pi_1(SW_{\mathcal{A}\text{-free}})$ を引き起こし、$k \geqq 4$ の場合と同様の対応により $\pi_1(W_{\mathcal{A}\text{-free}}) \cong \oplus_{H\in\mathcal{A}}\mathbb{Z}$ が成立しているので、Φ による同型対応が成立する。

ここから、多重写像度 (multi degree) を次のように定義する。

Definition 5.4. M を向きを保つ自由 C_n-作用をもつ向き付け可能な $(k-1)$-次元弧状連結閉 C^∞ 多様体であるとする。W を C_n の忠実なユニタリー表現空間、$f: M \to SW_{\text{free}}$ を C_n-写像とする。このとき、f の多重写像度 (**multidegree**) mDeg f を

$$\mathrm{mDeg}\, f = \Phi(f_*[M])) \in \bigoplus_{H\in\mathcal{A}} \mathbb{Z}$$

で定義する。

多重写像度に関しては、次の Hopf-型定理が成立することが示される。なお、証明に関しては、[3] を参照されたい。

Theorem D (Hopf-型定理). *M および W を Definition 5.4 の条件を満たすものとする。このとき mDeg $: [M, SW_{\text{free}}]_{C_n} \to \oplus_{H\in\mathcal{A}}\mathbb{Z}$ に関して次が成り立つ。*

1. mDeg は単射である。

2. $f, g: M \to SW_{\text{free}}$ を C_n-写像 とすると、$\mathrm{mDeg}\, f - \mathrm{mDeg}\, g \in \oplus_{H\in\mathcal{A}} n\mathbb{Z}$ が成り立つ。

3. C_n-写像 $f_0: M \to SW_{\text{free}}$ を一つ取り固定する。このとき、任意の $d \in \oplus_{H\in\mathcal{A}} n\mathbb{Z}$ に対して、ある C_n-写像 f が存在して、$\mathrm{mDeg}\, f - \mathrm{mDeg}\, g = d$ となる。

M 上の C_n 作用は free であるから、C_n-等変写像の分類は $f: M \to SW$ は、$f(M) \subset SW_{\text{free}}$ をみたす C_n-同変写像の分類を考えることに等しい。したがって、Theorem D の系として、次の分類定理が成立する。

Corollary E . C_n-等変写像 $f_0 : M \to SW$ を任意に一つとり固定する。このとき、

$$\mathrm{mD}_{f_0} : [M, SW]^{\text{isov}}_{C_n} \to \bigoplus_{H \in \mathcal{A}} n\mathbb{Z}$$

を

$$\mathrm{mD}_{f_0}([f]) = (\mathrm{mDeg}\ f - \mathrm{mDeg}\ f_0)/n$$

で定めれば、mD_{f_0} は全単射である。

6 例

p, q を素数、$n = pq$ とする。$G = C_n =< g >$ とし、$m \in \mathbb{Z}$ に対して、T_m を

$$\rho_m : C_n \to SU(1) \quad \text{defined by} \quad \rho_m(g)(z) = \zeta^m z$$

で与えられる既約表現空間とする。ただし、$\zeta = \exp(2\pi i/n)$ である。

$$M = ST_1, \quad SW = S(T_p \oplus T_q)$$

なる場合を考える。

まず、$C_p =< g^q >$ に対して、SW^{C_p} を考える。$(z_1, z_2) \in S(T_p \oplus T_q)$ に対して、

$$g^q(z_1, z_2) = ((g^q)^p z_1, (g^q)^q z_2) = (z_1, g^{q^2} z_2)$$

となるから、これが (z_1, z_2) に等しいためには、$z_2 = 0$ でなければならない。したがって、$SW^{C_p} = S(T_p)$ である。同様に、$SW^{C_q} = S(T_q)$ がえられる。言うまでもなく、$SW^G = \emptyset$ である。よって、特異集合については、$SW^{>1} = S(T_p) \coprod S(T_q)$ が成り立つ。ちなみにこれは S^3 の中の Hopf-リンクである。したがって、$\dim SW^{>1} = 1$ であって、

$$k = \dim SW - \dim SW^{>1} = 2$$

となる。このとき、$\dim M = 1$ であって、

$$\dim M + 1 = \dim SW - \dim SW^{>1} = 2$$

が成り立っている。よって、M から $S(T_p \oplus T_q)$ への等変写像が存在する。

さて、SW に関して、$S(T_p)$ 上の点については、そのアイソトロピー群は C_p であり、$S(T_q)$ 上の点については、そのアイソトロピー群は C_q である。これら以外の点に関しては、そのアイソトロピー群は $\{1\}$ である。したがって、

$$\mathrm{Iso}(SW) = \{C_p, C_q, C_{pq}\}$$

である。このとき、$SW^{C_{pq}} = SW$ であるから、$\mathcal{A} = \{C_p, C_q\}$ が成り立つ。

続いて、$f_{\alpha,\beta} : ST_1 \to S(T_p \oplus T_q)$ を

$$f_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{(1+\alpha q)p}, z^{(1+\beta p)q})$$

とおく。まず、これは G-写像である。実際、$g^t \in G$ に対して、

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,\beta}(g^t z) &= \frac{1}{\sqrt{2}}((\zeta^t z)^{(1+\alpha q)p}, (\zeta^t z)^{(1+\beta p)q}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta^{tp} z^{(1+\alpha q)p}, \zeta^{tq} z^{(1+\beta p)q}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(g^t z^{(1+\alpha q)p}, g^t z^{(1+\beta p)q}) \\
&= g^t \frac{1}{\sqrt{2}}(z^{(1+\alpha q)p}, z^{(1+\beta p)q}) \\
&= g^t f_{\alpha,\beta}(z)
\end{aligned}$$

となっている。また $g^t \cdot f_{\alpha,\beta}(z) = f_{\alpha,\beta}(z)$ とおくと、$t \equiv 0 \pmod q$ および $t \equiv 0 \pmod p$、すなわち $t \equiv 0 \pmod n$ が導かれ、これより $f_{\alpha,\beta}$ が等変写像になっていることがわかる。

多重写像度は T_p および T_q の直交補空間への対応を考えることで得られるので、

$$\mathrm{mDeg}\ f_{\alpha,\beta} = (\deg(z \mapsto z^{(1+\beta p)q}), \deg(z \mapsto z^{(1+\alpha q)p}) = ((1+\ell p)q, (1+kq)p)$$

である。さらに、等変写像 $f_{0,0}$ を基準にとると、

$$\mathrm{mD}_{f_{0,0}}(f_{\alpha,\beta}) = (\mathrm{mDeg}\ f_{\alpha,\beta} - \mathrm{mDeg}\ f_{0,0})/n = (\beta, \alpha)$$

となる。とくに

$$\mathrm{mD}_{f_{0,0}} : [ST_1, S(T_p \oplus T_q)]^{\mathrm{isov}}_{C_n} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

が全単射となっている。

なお、5章で行った方法と同様のことを行うことで、ST_1 から $S(T_p \oplus T_q)$ への C_n-写像のホモトピー類 $[ST_1, S(T_p \oplus T_q)]_{C_n}$ は、一点集合であることがわかることを最後に付け加えておく。

参考文献

[1] T. Kobayashi, *The Borsuk-Ulam theorem for a $\mathbb{Z}_q$-map from a $\mathbb{Z}_q$-space to S^{2n+1}*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 714–716.

[2] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743–757.

[3] I. Nagasaki, and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free C_n-manifoflds to representation sheres*, in preparation.

[4] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987

[5] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991),155–161