

順序極小構造上のデファイナブル G 集合の デファイナブル G CW 複体構造の存在と その応用

川上 智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

ここでは、実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \dots)$ おいて考察する。このような構造は、[6] により、非可算無限個存在することが知られている。実閉体上でも議論することができるが、ここでは、 \mathcal{M} に制限して考える。デファイナブルカテゴリーに関しては、[1], [2] などに性質がまとめられている。ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

本稿では、デファイナブル G 集合のデファイナブル G CW 複体構造の存在を示し、その応用として3つの定理を述べることを目的とする。詳しくは、[3] をご覧ください。

2. デファイナブル G 集合のデファイナブル G CW 複体構造の存在

$X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ をデファイナブル集合とする。連続写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル写像とは、 f のグラフがデファイナブル集合であることである。ここでは、デファイナブル写像は連続と仮定する。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 14P10, 57S10, 03C64.

Keywords and Phrases. デファイナブル G 集合, デファイナブル G CW 複体, 順序極小構造, デファイナブル群.

\mathbb{R}^n のデファイナブル部分集合 G がデファイナブル群とは、 G が群であって、群演算 $G \times G \rightarrow G$, $G \rightarrow G$ がデファイナブル写像となることである。

デファイナブル群 G から直交群 $O(n)$ への群準同型で、デファイナブル写像となるものをデファイナブル群準同型という。このデファイナブル群準同型から導かれた直交作用による G 不変デファイナブル部分集合をデファイナブル G 集合という。直交作用によらないデファイナブル G 集合も定義できるが、ここではそれらを扱わない。デファイナブル G 集合のデファイナブル G CW 複体構造の存在を証明するには、直交作用であることが必要である。

デファイナブル G 集合 X, Y 間のデファイナブル写像がデファイナブル G 写像とは、 G 写像となることである。デファイナブル G 写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル G 同相写像とは、デファイナブル G 写像 $h: Y \rightarrow X$ が存在して、 $f \circ h = id$ かつ $h \circ f = id$ となることである。

定義 2.1 (デファイナブル G CW 複体). 群 G をコンパクトデファイナブル群とする。

(1) デファイナブル G CW 複体とは、有限 G CW 複体 $(X, \{c_i | i \in I\})$ で次の条件を満たすものである。

(a) $|X|$ はデファイナブル G 集合である。

(b) 特性写像 $f_{c_i}: G/H_{c_i} \times \Delta \rightarrow c_i$ はデファイナブル G 写像で、 $f_{c_i}|_{G/H_{c_i} \times \text{int}(\Delta)}: G/H_{c_i} \times \text{int}(\Delta) \rightarrow c_i$ はデファイナブル G 同相写像である。ただし、 c_i は c_i の X における閉包を表し、 Δ は単体を表し、 $\text{int}(\Delta)$ はその内部を表す。

(2) X, Y をデファイナブル G CW 複体とする。 G 写像 $f: X \rightarrow Y$ がデファイナブル胞体 G 写像とは、 $f: |X| \rightarrow |Y|$ がデファイナブルで、各 n に対して、 X の n 切片を Y の n 切片の中に写すものである。

注意 2.2. (1) デファイナブル G CW 複体の任意の G CW 部分複体は、デファイナブル G CW 複体となる。

(2) デファイナブル群の任意のデファイナブル群は閉部分群となる ([5])。この逆は不成立である。

定理 2.3 ([3]). G をコンパクトデファイナブル群、 X をデファイナブル G 集合、 Y を X の閉デファイナブル G 部分集合とする。このとき、 G 表現 Ω の中のデファイナブル G CW 複体 Z 、 Z の G CW 部分複体 W とデファイナブル G 写像 $f: X \rightarrow Z$ が存在して、次の条件を満たす。

(1) $Z_1 := f(X)$ ($W_1 := f(Y)$) は、 Z (W) から開 G 胞体を除いて得られた空間となり、 $f: (X, Y) \rightarrow (Z_1, W_1)$ はデファイナブル G 同相写像である。

(2) 射影 $\pi: Z \rightarrow Z/G$ はデファイナブル胞体写像である。

(3) 任意の開 G 胞体に対して、 $\pi|\bar{c}: \bar{c} \rightarrow \pi(\bar{c})$ はデファイナブル切断 $s: \pi(\bar{c}) \rightarrow \bar{c}$ をもつ。ただし、 \bar{c} は Z における c の閉包を表すとする。

さらに、 X がコンパクトならば、 $Z = f(X)$, $W = f(Y)$ ととれる。

3. 定理 2.3 の 3 つの応用例

X, Y をデファイナブル G 集合とし、 $f, h: X \rightarrow Y$ をデファイナブル G 写像とする。 f と h がデファイナブル G ホモトピックとは、デファイナブル G 写像 $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ が存在して、各 $x \in X$ に対して、 $H(x, 0) = f(x)$ かつ $H(x, 1) = h(x)$ が成り立つことである。ただし、 $[0, 1]$ 上の G 作用は自明とする。

$[X, Y]_{def}^G$ ($[X, Y]_{top}^G$) でデファイナブル G 写像 (連続 G 写像) のデファイナブル G ホモトピー類 (G ホモトピー類) 全体の集合を表すとする。デファイナブル G 写像 (連続 G 写像) $f: X \rightarrow Y$ に対して、 $[f]_{def}^G$ ($[f]_{top}^G$) で f のデファイナブル G ホモトピー類 (G ホモトピー類) を表すとする。このとき、標準的な写像 $\mu: [X, Y]_{def}^G \rightarrow [X, Y]_{top}^G$, $\mu([f]_{def}^G) = [f]_{top}^G$ を得る。

定理 3.1 ([3]). G をコンパクトデファイナブル群、 X, Y をデファイナブル G 集合とする。このとき、 $\mu: [X, Y]_{def}^G \rightarrow [X, Y]_{top}^G$ は全単射である。

系 3.2. G をコンパクトデファイナブル群、 X, Y をデファイナブル G 集合とすると、任意の連続 G 写像 $f: X \rightarrow Y$ は、デファイナブル G 写像と G ホモトピックである。

この系は、 f がデファイナブル G 写像で近似できるとはいっていない。例えば、 $G = 1$ のとき、 $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ とすると、 f はデファイナブル写像で近似できない。 $\forall \epsilon > 0 \exists h: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$: デファイナブル写像 $|f(x) - h(x)| < \epsilon$ とできない。もしできたとすると、 h は無限回振動しなければならない。このような関数はデファイナブルでない。

次の応用例を述べる前に、デファイナブル G ベクトル束を定義しよう ([3])。

定義 3.3. $\eta = (E, p, X)$ をデファイナブル集合 X 上の k 次元ベクトル束とする。

(1) 有限個の局所自明化写像の族 $(U_i, \phi_i: U_i \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U_i))_i$ がデファイナブルアトラスとは、 $(U_i)_i$ が X の開被覆で、各 U_i がデファイナブルで、任意の (i, j) に対して、

$\phi_j \circ \phi_i^{-1} | (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^k$ がデファイナブルであることである。 η とデファイナブルアトラスの組をデファイナブルベクトル束という。

(2) $(\eta, (U_i, \phi_i)_i), (\eta', (U'_j, \phi'_j)_j)$ をそれぞれ X 上の k 次元、 l 次元デファイナブルベクトル束とする。ベクトル束写像 $\psi : \eta \rightarrow \eta'$ がデファイナブルベクトル束写像とは、任意の (i, j) に対して、 $(\phi'_j)^{-1} \circ \psi \circ \phi_i | (U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}^k : (U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}^k \rightarrow (U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}^l$ がデファイナブルであることである。デファイナブルベクトル束写像 $h : \eta \rightarrow \eta'$ がデファイナブルベクトル束同型写像とは、デファイナブルベクトル束写像 $h' : \eta' \rightarrow \eta$ が存在して、 $h \circ h' = id$ かつ $h' \circ h = id$ となることである。

定義 3.4. G をデファイナブル群とする。デファイナブルベクトル束 $\eta = (E, p, X)$ がデファイナブル G ベクトル束とは、次の3つの条件を満たすことである。

- (a) E がデファイナブル G 空間であり、 X がデファイナブル G 集合である。
- (b) 射影 $p : E \rightarrow X$ がデファイナブル G 写像である。
- (c) 各 $x \in X, g \in G$ に対して、 $p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(gx), y \mapsto gy$ が線形同型写像である。

定義 3.5 (普遍 G ベクトル束). G をコンパクトデファイナブル群、 Ω を n 次元 G 表現、 $B : G \rightarrow O(n)$ を Ω の表現写像とする。このとき、行列空間 $M(\Omega)$ は、 $(g, A) \mapsto B(g)AB(g)^{-1}$ により、 G 表現となる。各自然数 k に対して、

$$G(\Omega, k) = \{A \in M(\Omega) | A^2 = A, A = A', \text{Tr}A = k\},$$

$$E(\Omega, k) = \{(A, v) \in G(\Omega, k) \times \Omega | Av = v\},$$

$$u : E(\Omega, k) \rightarrow G(\Omega, k), u((A, v)) = A,$$

$$\gamma(\Omega, k) = (E(\Omega, k), u, G(\Omega, k))$$

と定義する。ただし、 A' は A の転置行列を表すとする。 $\gamma(\Omega, k)$ を普遍 G ベクトル束という。

定義 3.6. G をコンパクトデファイナブル群とする。デファイナブル G ベクトル束 η が強デファイナブルとは、 G 表現 Ω とデファイナブル G 写像 $f : X \rightarrow G(\Omega, k)$ が存在して、 η と $f^*(\gamma(\Omega, k))$ がデファイナブル G ベクトル束同型となることである。

X をデファイナブル G 集合とする。 $\text{Vect}_{def}^G(X)$ ($\text{Vect}_{top}^G(X)$) でデファイナブル G ベクトル束 (G ベクトル束) のデファイナブル G ベクトル束同型類全体 (G ベクトル束同型類全体) を表すとする。 $[\eta]_{def}^G$ ($[\eta]_{top}^G$) で η のデファイナブル G ベクトル束同型類 (G ベクトル束同型類) を表すとする。

定理 3.7 ([3]). G を有限群、 X をデファイナブル G 集合とする。

- (1) X 上の任意のデファイナブル G ベクトル束は、強デファイナブルである。
- (2) $\kappa : \text{Vect}_{def}^G(X) \rightarrow \text{Vect}_{top}^G(X)$, $\kappa([\eta]_{def}^G) = [\eta]_{top}^G$ は全単射である。

次に定理 3.1 と定理 3.7 のデファイナブル C^r 版を考える。 $1 \leq r \leq \omega$ のとき、デファイナブル $C^r G$ 多様体、デファイナブル $C^r G$ ベクトル束を考えることができる ([4])。

G をコンパクトデファイナブル C^r 群、 X, Y がデファイナブル $C^r G$ 多様体のとき、上記と同様に、 $\mu' : [X, Y]_{def}^{C^r} \rightarrow [X, Y]_{top}^G$ 、 $\kappa' : \text{Vect}_{def}^{C^r}(X) \rightarrow \text{Vect}_{top}^G(X)$ を定義することができる。

定理 3.8 ([3]). G を有限群、 X, Y をアフィンデファイナブル $C^r G$ 多様体とする。

- (1) $\mu' : [X, Y]_{def}^{C^r} \rightarrow [X, Y]_{top}^G$ は全単射である。
- (2) $\kappa' : \text{Vect}_{def}^{C^r}(X) \rightarrow \text{Vect}_{top}^G(X)$ は全単射である。

REFERENCES

- [1] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).
- [2] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.
- [3] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, to appear.
- [4] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123**, (2002), 323-349.
- [5] A. Pillay, *On groups and fields definable in o-minimal structures*, J. Pure Appl. Algebra **53**, (1988), 239-255.
- [6] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16**, (2003), no. 4, 751-777.