数理解析研究所講究録
1517巻 2006年 135-141

同変コホモロジーとQuillen同値 (Equivariant cohomology and Quillen equivalences)

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

G をコンパクトで連結なLie群, $\mathfrak{g}$ をそのLie代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\Omega(M)$ を M の微分形式全体とするとき, Cartan複体とよばれる $((S\mathfrak{g}^{*}\otimes\Omega(M))_{\mathrm{inv}}, \mathrm{d}_{\mathfrak{g}})$ は同変コホモロジーを与える. Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] はCartan複体がより“小さい” $((S\mathfrak{g}^{*})_{\mathrm{inv}}\otimes\Omega(M)_{\mathrm{inv}}, \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}})$ と擬同型であると主張した. Maszczyk-Weber [5] がその証明にギャップを指摘したが, ほどなくしてAlekseev-Meinrenken [1] により正しい証明が与えられた. ただしGoresky-Kottwitz-MacPhersonの方法とAlekseev-Meinrenkenの方法は大きく異なる. 本稿ではLefèvreにより与えられたKoszul双対性の拡張を用いて, Goresky-Kottwitz-MacPhersonの方法に近い別証明を与える.

2 小Cartan複体

この節の詳細については原論文 [1], もしくは [6] を参照.

以下では $\mathfrak{g}$ を標数0の体 $\mathbb{F}$ 上のreductive Lie代数とする.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$-微分空間とは次数付きベクトル空間 $\mathcal{M}$ とその微分 $\mathrm{d}^{\mathcal{M}}$, そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi\in\mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ $0, -1$,
- $[\mathrm{d}^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,

- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}})$,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$. □

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき

$$\mathcal{M}_{\mathrm{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$$
$$\mathcal{M}_{\mathrm{hor}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$$
$$\mathcal{M}_{\mathrm{basic}} := \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \cap \mathcal{M}_{\mathrm{hor}}$$

とおく. □

$\mathfrak{g}$ の基底を $\{e_a\}$, その双対基底を $\{e^a\}$ とする. そして以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と書くことにする. また $S\mathfrak{g}^*$ の次数は

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定める.

定義 2.3. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a)$$

を Cartan 複体とよび, そのコホモロジーを $\mathcal{M}$ の同変コホモロジー (の Cartan モデル) とよぶ. □

$(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の間には非退化な pairing が存在するので, $(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の積はそれぞれ $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の余積を導く. このとき $x \in (\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ が primitive であるとは, Δ を $(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の余積とすると

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする. $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の場合も同様にして, $(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の primitive な元全体からなる次数付き部分空間をそれぞれ $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ とする. 実は $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ の間にも非退化な pairing が存在し, $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間となる. $\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底, $\{c^j\}$ をその双対基底とする.

また "Chevalley's transgression theorem" により c^j に対応する元を $p^j \in (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ と書くことにする.

そして $\iota : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$ を次数付き代数の準同型として

$$\iota : \wedge \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M})$$

と自然に拡張する.

定義 2.4. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき，

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}, \quad \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j)$$

を小 Cartan 複体とよぶ. □

$\wedge\mathfrak{g}$ の次数を

$$(\wedge\mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i\mathfrak{g}, \quad (\wedge\mathfrak{g})^i := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定めるとき，Alekseev-Meinrenken[1] は

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge\mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \tag{1}$$

をみたす次数 0 の元 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ が存在することを示し，これを用いて次を得た.

定理 2.5 ([1, Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数，$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする. 方程式 (1) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は微分 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としてのホモトピー同値写像である. □

これより $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は擬同型であることが従う.

3 Lefèvre による Koszul 双対性の拡張

この節の詳細については [4], [3] を参照.

A を augmented DG (Differential Graded) 代数，C を cocomplete augmented DG 余代数とする. そして $\tau : C \to A$ を twisting cochain，つまり次数 1 の線型写像で

$$\mathrm{d}^A \circ \tau + \tau \circ \mathrm{d}^C + \mu^A \circ (\tau \otimes \tau) \circ \Delta^C = 0, \quad \varepsilon^A \circ \tau \circ \varepsilon^C = 0$$

を満たすものとする. ここで d^A, d^C はそれぞれ A, C の微分，μ^A は A の積，Δ^C は C の余積，そして ε^A, ε^C はそれぞれ A, C の augmentation とする.

L を DG A-加群とすると，$L \otimes C$ は $1 \otimes \Delta^C$ を余積とする C-余加群になる. また

$$T : X \otimes X' \to X' \otimes X, \quad x \otimes x' \mapsto (-1)^{|x||x'|} x' \otimes x$$

として

$$\mathrm{d}^L \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}^C + (\mu^L \otimes 1) \circ (T \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes \Delta^C)$$

は微分になる．こうしてできる DG C-余加群を $L\otimes_\tau C$ と書くことにする．

次に Mod A を DG A-加群のなす圏，Comc C を cocomplete DG C-余加群のなす圏として，$\phi: L\to L'$ を Mod A の射とするとき，$\phi\otimes 1: L\otimes_\tau C\to L'\otimes_\tau C$ は Comc C の射となる．

以上のようにしてできる関手を

$$?\otimes_\tau C:\mathsf{Mod}\,A\to\mathsf{Comc}\,C$$

と書く．

同様に M を cocomplete DG C-余加群とするとき，A-加群 $A\otimes M$ において

$$\mathrm{d}^A\otimes 1+1\otimes\mathrm{d}^M+(\mu^A\otimes 1)\circ(1\otimes\tau\otimes 1)\circ(1\otimes T)\circ(1\otimes\Delta^M)$$

は微分になり，こうしてできる DG A-加群を $A\otimes_\tau M$ と書き，関手を

$$A\otimes_\tau ?:\mathsf{Comc}\,C\to\mathsf{Mod}\,A$$

と表す．

このとき $(?\otimes_\tau C, A\otimes_\tau ?)$ は随伴関手の組となる ([4, Lemme 2.2.1.2])．

以下では $\tau: C\to A$ は acyclic，つまり任意の DG A-加群 M に対して，adjunction morphism $A\otimes_\tau(M\otimes_\tau C)\to M$ が擬同型であると仮定する．

Mod A において weak equivalence として擬同型，fibration として全射準同型とするとモデル圏になることが知られているが，Lefèvre は次を示した．

定理 3.1 ([4, **Théorèm 2.2.2.2**])**.** (a) Comc C において weak equivalence として射 f で $A\otimes_\tau f$ が擬同型になるもの，cofibration として単射準同型とするとモデル圏になる．

(b) $(?\otimes_\tau C, A\otimes_\tau ?)$ は Quillen 同値になる． □

これから Mod A, Comc C を weak equivalence のクラスで局所化した圏をそれぞれ $\mathsf{D}(A)$, $\mathsf{D}(C)$ と書くことにすると，

$$\mathsf{D}(A)\xrightarrow{\sim}\mathsf{D}(C)$$

が成り立つことがわかる．

ここで $A=(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$, $C=(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$，そして

$$\tau:(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\cong\wedge\mathcal{P}^*\to\mathcal{P}^*\to S\tilde{\mathcal{P}}^*\cong(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

とする．ただし $\wedge\mathcal{P}^*\to\mathcal{P}^*$ は自然な射影，$\tilde{\mathcal{P}}^*:=\mathcal{P}^*[-1]$，そして $\mathcal{P}^*\to S\tilde{\mathcal{P}}^*$ は transgression とする．

このとき上記定理より圏同値

$$\mathsf{D}((S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})\xrightarrow{\sim}\mathsf{D}((\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})\tag{2}$$

を得る．

次節ではこれを用いて $\tilde{C}_\mathfrak{g}(\mathcal{M})$ と $C_\mathfrak{g}(\mathcal{M})$ が擬同型であることを示す．

4 $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であることの証明

$\mathfrak{g}$-微分代数とは次数付き結合代数 $\mathcal{A}$ であり，$\mathfrak{g}$-微分空間の構造をもち，さらに $\mathrm{d}^{\mathcal{A}}$, $L^{\mathcal{A}}(\xi)$, $\iota(\xi)^{\mathcal{A}}$ が $\mathcal{A}$ の積に関して derivation になるものとする．重要な例として Weil 代数 $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ がある．

次に $\mathfrak{g}$-微分 $\mathcal{A}$-加群とは $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{N}$ であり，$\mathcal{A}$-加群の構造をもち，さらにその作用 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ が $\mathfrak{g}$-微分空間の準同型になるものとする．

定義 4.1. $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とするとき

$$\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d}^{\mathcal{N}} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^{\wedge}(c_j)$$

を Chevalley-Koszul 複体とよぶ． □

任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して horizontal projection

$$P_{\mathrm{hor}} := \prod_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a) y^a : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$$

が定義できる．これは $S\mathfrak{g}^*$ の作用，$L^{\mathcal{N}}(\xi)$ とは可換であることを注意しておく．

Alekseev-Meinrenken [1] は次を示した．

定理 4.2 ([1, Theorem 5.5])**.** $\mathfrak{g}$ を reductive Lie 代数，$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群，そして $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ を方程式 (1) の任意の解とするとき，次が成り立つ．
(a)

$$\Psi : \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota^{W}(f)}\eta \cdot z)$$

は微分 $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の準同型である．
(b)

$$\Upsilon : \mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, \quad z \mapsto (P_{\mathrm{hor}} \otimes 1) \circ e^{-\alpha}(e^{-\iota^{\mathcal{N}}(f)} z \otimes 1)$$

は微分 $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の準同型である．ここで $\alpha = \sum_j \iota^{\mathcal{N}}(c_j) \otimes c^j \in \mathrm{End}(\mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}})$ とする．
(c) $\Upsilon \circ \Psi$ は恒等写像であり，$\Psi \circ \Upsilon$ は恒等写像とホモトピックである． □

$\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の余積 Δ を用いて $1 \otimes \Delta$ により微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の構造をもつ．

一方 $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ は余積を

$$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{1\otimes\Delta} \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\Psi\otimes 1} \mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

とすれば微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群になる．

このとき Ψ, Υ は微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の擬同型になることがわかるが，さらに weak equivalence になることが以下のようにわかる．

まず $C^j := \bigoplus_{i\leq j}(\wedge^i\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$ とすると，$(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$ は $C^0 = \mathbb{F}$ を満たす exhaustive filtration

$$\mathbb{F} = C^0 \subset C^1 \subset \cdots \subset C^{\dim\mathfrak{g}} = (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$$

をもつ．

次に $\mathcal{N}_{\rm basic}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$ において $\wedge^j\mathcal{P}$ の全ての元の contraction が 0 である元からなる部分空間を F^j とすると，$F^0 = 0$ を満たす exhaustive filtration

$$0 = F^0 \subset F^1 \subset \cdots \subset F^{\dim\mathcal{P}+1} = \mathcal{N}_{\rm basic}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$$

をもつことがわかる．

同様にして $\mathcal{N}_{\rm inv}$ も $(F')^0 = 0$ を満たす exhaustive filtration $\{(F')^j\}$ をもつ．このとき定理 4.2 の Ψ, Υ は filtration を保つ擬同型であることがわかる．

補題 4.3 ([4, Lemme 2.2.2.5])**.** cocomplete augmented DG 余代数 C が $C^0 = \mathbb{F}$ である exhaustive filtration $\{C^i\}$ をもつとする．2つの cocomplete DG C-余加群 M, M' がそれぞれ $F^0 = 0$ である exhaustive filtration $\{F^i\}$ をもつならば，M と M' の間の filtration を保つ擬同型は weak equivalence になる． □

この補題より Ψ は weak equivalence になることがわかる．よって，Mod $(S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$ において擬同型

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes\Psi : (S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes\mathcal{N}_{\rm basic}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv} \to (S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes\mathcal{N}_{\rm inv}$$

を得る．ここでは簡単のため $\otimes_\tau$ を $\otimes$ と表した．

M, M' が擬同型であるとき $M \sim M'$ と書くことにすると，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &= (S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes\mathcal{M}_{\rm inv}\\
&\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes(W\mathfrak{g}\otimes\mathcal{M})_{\rm inv}\\
&\sim (S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes(W\mathfrak{g}\otimes\mathcal{M})_{\rm basic}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\\
&\cong (S\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\otimes(S\mathfrak{g}^*\otimes\mathcal{M})_{\rm inv}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}\\
&\sim (S\mathfrak{g}^*\otimes\mathcal{M})_{\rm inv}\\
&= C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．ここで最初の $\sim$ は $W\mathfrak{g}$ が acyclic であること，最後の $\sim$ は (2) から従う．

注意 4.4. 以上で示したことは $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であることのみであり，Alekseev-Meinrenken はより強い主張，ホモトピックであることを示している．上記の方法でより強い主張を示すことが今後の重要な課題である． □

参考文献

[1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.

[2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.

[3] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.

[4] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ catégories*, math.CT/0310337.

[5] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.

[6] 山崎啓太，同変コホモロジーの小 Cartan モデルについて，京都大学数理解析研究所講究録 1449 変換群論の新たな展開 (2005), 151-158.