数理解析研究所講究録
1518巻 2006年 154-159

On conformal mappings of invariant components of Kleinian groups

志賀　啓成 (Hiroshige SHIGA)
東京工業大学・大学院理工学研究科

1 Introduction

非初等的有限生成 Klein 群 G の不連続領域の連結成分を G の成分と呼ぶ．G の成分 Δ が $G(\Delta)=\Delta$ を満たすとき G の不変成分という．G が単連結不変成分 Δ を持っているとする．Riemann の写像定理により，単位円板 D から Δ の上への等角写像 φ が存在するが，このとき，G（または Δ）の幾何的性質が写像 φ の性質にどのように反映されるかを考える．

たとえば，Δ 以外に G が不変成分を持てば，G は擬フックス群になり，したがって Δ は擬円板になる．このとき，等角写像・擬等角写像論（あるいは幾何学的函数論）から

$$C^{-1}(1-|z|)^{\kappa}\leq|\varphi'(z)|\leq C(1-|z|)^{-\kappa} \tag{1}$$

なる評価式が $z\in D$ に対して成立することが知られている (cf. [5])．ここに $C>0$, $0\leq\kappa<1$ は定数である．この評価は，古典的な Koebe の歪曲定理 (cf. [5]) による単位円板上の一般の等角写像 f に関する評価：

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^{3}}\leq|f'(z)|\leq|f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^{3}} \tag{2}$$

と比較してみれば，その有用性が分かる．このことは，単連結領域 Δ が，その外部とともに Klein 群の不変成分であれば，このようなより良い評価が結論できるということを意味する．ここでは，このような考察をもっと一般の Klein 群に対しておこなう．ただし，証明はアウトラインのみを提示し，その詳細については別の機会に述べる．

2 擬フックス群

この節では，擬フックス群の特徴付けを考える。具体的に出発点となったのは McMullen([3]) の次の結果である.

Theorem 1 *G* を単連結不変成分 Δ を持つ非初等的有限生成 *Klein* 群とする．このとき以下は同値である.

1. *G* は擬フックス群である．すなわち，Δ は擬円板である.

2. Δ は *John* 領域である.

ここではあえて John 領域の定義には立ち入らないが，一般論として，擬円板 $\Rightarrow$John 領域であるが，逆は正しくない．McMullen のこの定理は，単連結領域 Δ が Klein 群 G で不変ならば，この二つの概念は等しいことを意味している.

John 領域と並んで，幾何学的函数論・等角写像論でよく扱われる概念として，Hölder 領域というものもある．これは一言でいえば，単位円板からの Riemann 写像が Hölder 連続となるような領域のことで，擬円板から見ると，John 領域の先にある概念である．すなわち，一般に，擬円板 $\Rightarrow$John 領域 $\Rightarrow$Hölder 領域であるが，逆は正しくない．我々の最初の結果は，この Hölder 領域に関して McMullen の結果を拡張するものである.

Theorem 2 *Theorem 1* と同じ仮定の下で以下は同値である.

1. *G* は擬フックス群である．すなわち，Δ は擬円板である.

2. Δ は *John* 領域である.

3. Δ は *Hölder* 領域である.

この定理の証明の要点は，(3)$\Rightarrow$(1) の部分であるが，この部分の証明の概略は次の通りである.

まず，Δ が Hölder 領域であるから，その境界の Hausdorff 次元は 2 より真に小になることに注意する．すると，Δ は G の不変成分であったから，その境界は G の極限集合になる．すなわち，G の極限集合の Hausdorff 次元は 2 より真に小である．よって G は擬フックス群かまたは regular *b*-group（定義は次節参照）になる．regular *b*-group とすると，Δ は cusp を持つ．ところが，Hölder 領域の別の特徴付けにより cusp を持たないことが分かるから，G は regular *b*-group ではない．よって擬フックス群になる.

3 Regular b-groups

この節では，regular b-group の（単連結）不変成分上の Riemann 写像について考える．定義を述べる．

Definition 1 非初等的有限生成 *Klein* 群 G で，ただ一つの単連結不変成分を持ち，幾何学的有限なものを regular b-group という．

例えば，タイヒミュラー空間の境界群で，ある単純閉曲線の Dehn twist を，フックス群に対して無限回おこなって得られるものは regular b-group である．

G が regular b-group であるとき，G は不変成分 Δ 以外に成分を持つから，Δ は有界領域としてよい．このとき Δ の Riemann 写像の境界挙動について次のことが証明できる．

Theorem 3 *G を regular b-group，Δ をその不変成分で有界と仮定する．$\varphi : D \to \Delta$ を単位円板 D から Δ への Riemann 写像とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)(\log(1-|z|))^2} \qquad (z \in D \setminus \{0\}) \tag{3}$$

が成立する．

この定理で得られる評価 (3) は擬円板の場合の評価 (1) と一般の等角写像の評価 (2) の中間に位置していることに注意する．

この定理で得られた評価から次の系を得る．

Corollary 1 *上の定理の仮定の下で，Riemann 写像 φ は単位円周 ∂D まで連続的に拡張される．特に regular b-group の極限集合は局所連結である．また，この連続拡張された ∂D 上の関数も φ と書くことにすれば，ある定数 $C > 0$ がとれて，*

$$|\varphi(e^{i\theta_1}) - \varphi(e^{i\theta_2})| \leq \left| \frac{C}{\log(\theta_1 - \theta_2)} \right| \tag{4}$$

が成立する．

Remark 1 *1. regular b-group の極限集合の局所連結性は既に Abikoff([1]) によって証明されているが，ここでの結果とは違った方法である．さらに (4) などから，ここでの結果は Abikoff のそれよりも精密なものになっている．*

2. 宮地は有限幾何を持つ Klein 群の Canon-Thurston 写像に対して (4) と類似の不等式を導いている．

Corollary 1 は (3) を用いて $\varphi'(z)$ を "∂D に向かって積分" すれば得られるので，Theorem 3 のみその証明の概略を述べる．

簡単のため，Δ/G はコンパクトであると仮定する．また，一般性を失うことなく $0 \in \Delta$ と仮定してよい．まず，ある定数 $A > 0$ が存在して，任意の $g \in G$ に対して

$$\delta(g(0))^{-1} \geq Ad_\Delta(0, g(0))^2 \tag{5}$$

が成り立つことを証明する．ここに $\delta(z)$ $(z \in \Delta)$ は z と $\partial\Delta$ とのユークリッド距離，$d_\Delta(\cdot,\cdot)$ は Δ 内の双曲距離である．

(5) の証明のために，G の極限集合 $\Lambda(G)$ の 3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ での凸包 $\mathcal{C}H(G)$ を考える．ここで $\mathbb{H}^3$ として単位球 $\mathbb{B}^3$ モデルをとり，$\partial\mathcal{C}H(G) \ni \mathbf{0}$ と仮定しておく．Δ から $\partial\mathcal{C}H(G)$ への nearest point map を考えることにより，

$$1 - ||g(\mathbf{0})|| \sim \delta(g(0))$$

であることが分かる．ここに $||\cdot||$ は $\mathbb{B}^3$ でのユークリッドの長さであり，"$\sim$" は両辺が互いに正の定数倍で押さえられることを意味する．ここで幾何学的有限な Klein 群 G に関する Floyd の不等式 ([2])

$$d_{\mathbb{B}^3}(\mathbf{0}, g(\mathbf{0})) \geq 2\log|g| - c, \qquad (g \in G) \tag{6}$$

に注意する．ただし $c > 0$ は g に無関係な定数で，$|g|$ は G のある生成系に関する minimal word length を表すものとする．この二つの不等式と G の Fuchisian equivalent $\varphi^{-1}G\varphi$ を考えれば求める不等式 (5) を得る．

次に Δ/G はコンパクトであったから，その基本領域として Δ 内でコンパクトなものが取れる．よって (5) における $g(0)$ は Δ 内の任意の点 z に置き換えられることが分かる．すなわち，任意の $\zeta \in \Delta$ に対して

$$\delta(\zeta)^{-1} \geq Ad_\Delta(0, \zeta)^2 \tag{7}$$

が成り立つ．ただし定数 A は (5) のものとは異なっているかも知れない．

最後に Koebe の歪曲定理から

$$\frac{|\varphi'(z)|}{\delta(\varphi(z))} \sim (1 - |z|)^{-1} \qquad (z \in D)$$

が成り立つことに注意して，(7) と組み合わせれば定理の主張を得る．

4 有限幾何を持つ群

Definition 2 *Klein* 群 G が有限幾何 *(bounded geometry)* を持つとは，3 次元双曲多様体 $\mathbb{H}^3/G$ の単射半径の下限が正であるときをいう．

この節では有限幾何を持つKlein群に対して前節までと同じ問題を考える．この場合，Theorem 3と類似の，しかし弱い形の結果を証明することが出来る．

Theorem 4 *Gを有限幾何を持ち，単連結不変成分Δを持つKlein群とする．このとき単位円板DからΔへの Riemann 写像φに対して，ある定数$C, \alpha > 0$が存在して*

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{C}{(1-|z|)|\log(1-|z|)|^{\alpha}} \qquad (z \in D \setminus \{0\}) \tag{8}$$

が成立する．

Remark 2 *Corollary 1ではTheorem 3の(3)から極限集合の局所連結性を得たが，Theorem 4の評価では–有限幾何を持つ群の極限集合の局所連結性が知られているにもかかわらず–局所連結性を示すには不十分である．評価(8)から局所連結性を示すためには$\alpha > 1$が必要である．*

証明の方針はTheorem 3と同様であるが，ここでは，Theorem 3の証明で幾何学的有限な群に対して有効であったFloydの不等式(6)の代わりのものを見つけることになる．そのために有限幾何を持つ群に対してMinsky([4])が構成したmodel manifoldを用いる．

有限幾何のKlein群Gのmodel manifold Mは，$N = \mathbb{H}^3/G$と擬等長で，$(\Delta/G)\times\mathbb{R}$と同相なRiemann多様体として構成される．このmodel manifold MはNのending laminationから決まるもので，Nのending laminationによる“退化”を表現するものといえる．Minskyはこのmodel manifoldを用いて，ending lamination conjectureを有限幾何を持つ群に対して肯定的に解決した．

Theorem 4の証明において必要なのは，model manifold Mでのending laminationのleavesにおける退化の様子の観察である．これはMinskyの論文で記述されているが，簡単に言えば，ending laminationに対応する各leafに沿って“horocyclicに”退化している．このことから，Mの不変被覆上のGの作用に関してFloydの不等式(6)と同様の評価が成立することがわかる．したがって$\mathbb{H}^3$上のGの作用に関しても，擬等長性から，同様の評価が成り立つ．ただし，擬等長性の制限から，係数は2から，ある正数αに変わらざるを得ない．すなわち，

$$d_{\mathbb{B}^3}(\mathbf{0}, g(\mathbf{0})) \geq \alpha \log|g| - c, \qquad (g \in G) \tag{9}$$

なる評価式を得る．あとはこの評価式を用いて，Theorem 3の証明と同じ手順を踏めばよい．

References

[1] W. Abikoff, On Boundaries of Teichmüller spaces and kleinian groups III, Acta Math. **134** (1975), 212–237.

[2] Floyd, W.J., Group completions and limit sets of Kleinian groups. Invent. Math.**57** (1980), 205–218.

[3] C. T. McMullen, Kleinian groups and John domains, Topology **37** (1998), 485–496.

[4] Y. Minsky, On rigidity, limit set, and end invariants of hyperboliic 3-manifolds, J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 539–588.

[5] C. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer-Verlag Berlin 1992.