数理解析研究所講究録
1518巻 2006年 160-163

4つの放物元に関するトレース恒等式について

島根大学総合理工学部 中西敏浩

A trace identity for four parabolic elements of $SL(2,\mathbb{C})$

Toshihiro Nakanishi, Shimane University

1. 動機 R. C. Penner は [5] において，穴あき曲面の装飾つき Teichmüller 空間に λ-lengths による座標系を導入し，その座標系の下で写像類の Teichmüller 空間上の作用が有理写像で表わされることを証明した．その証明において重要な役割を果たすのが「トレミー型の恒等式」である．

Penner が扱った Teichmüller 空間は，穴あき曲面群の忠実な Fuchs 群表現の空間であり，λ-length はその上の実解析的な関数である．Teichmüller 空間を曲面群の忠実な $SL(2,\mathbb{C})$-表現の空間 $\mathcal{R}$ の部分空間とみて，Penner の λ-length を $\mathcal{R}$ 上の複素解析的関数に拡張したい．もちろん写像類の作用がが有理写像として表現されることが望ましい．そのためには「トレミー型恒等式」を確立する必要がある．

2. トレース恒等式 トレース関数の間に成立する恒等式がいろいろ知られている。[1, 3.4] にいくつかの例があるが，そのほとんどは次の3つの関係式とトレースの共役不変性から導かれる:

$A,B,C \in SL(2,\mathbb{C})$ とするとき
(i) $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}A^{-1}$,
(ii) $\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}AB^{-1}=\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B$,
(iii) $\mathrm{tr}ABC+\mathrm{tr}ACB+\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B\mathrm{tr}C=\mathrm{tr}A\mathrm{tr}BC+\mathrm{tr}B\mathrm{tr}CA+\mathrm{tr}C\mathrm{tr}AB$.
(注：(iii) は (i),(ii) から従うが，非常に役に立つので記載した.)

補題 1 ([2], [4]) $A,B,C\in SL(2,\mathbb{C})$ および $D=(ABC)^{-1}$ とする．このとき $a=-\mathrm{tr}A$, $b=-\mathrm{tr}B$, $c=-\mathrm{tr}C$, $d=-\mathrm{tr}D$, $x=-\mathrm{tr}BC$, $y=-\mathrm{tr}CA$ and $z=-\mathrm{tr}AB$ は次式をみたす.

$$x^2+y^2+z^2-xyz+(ad+bc)x+(bd+ca)y+(cd+ab)z+a^2+b^2+c^2+d^2+abcd-4=0.$$

とくに $\mathrm{tr}D=-2$ ならば,

$$\lambda_1=-\mathrm{tr}A-\mathrm{tr}BC,\quad \lambda_2=-\mathrm{tr}B-\mathrm{tr}CA,\quad \lambda_3=-\mathrm{tr}C-\mathrm{tr}AB$$

とおくことにより上式を次のように書き直すことができる.

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-(\mathrm{tr}A)\lambda_2\lambda_3-(\mathrm{tr}B)\lambda_3\lambda_1-(\mathrm{tr}C)\lambda_1\lambda_2=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

次の式は我々の目指すトレース恒等式の特別な場合である.

補題 2 ([3, Proposition 1.1]) $A, B, C, D \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して $x = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}BCD$, $y = \mathrm{tr}B + \mathrm{tr}CDA$, $z = \mathrm{tr}C + \mathrm{tr}DAB$, $w = \mathrm{tr}D + \mathrm{tr}ABC$, $u = \mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}CD$, $v = \mathrm{tr}BC + \mathrm{tr}AD$ を定める. もし $\mathrm{tr}ABCD = -2$ ならば

$$xz + yw = uv.$$

3. 主結果 P_1, P_2 を $\mathrm{tr}P_1 = \mathrm{tr}P_2 = -2$ をみたす $SL(2, \mathbb{C})$ の放物的行列とする. もし P_1, P_2 が（リーマン球面への作用に関して）不動点を共有しないならば, 次のような $Q \in SL(2, \mathbb{C})$ が存在する.

$$P_1 P_2 = -Q^2, \qquad P_2 = Q^{-1} P_1 Q. \tag{1}$$

Q のかわりに $-Q$ に置き換えても上式が成立することに注意. Q は符号を除いて一意的である.

今 4 つの放物的行列 P_1, P_2, P_3, P_4 を $\mathrm{tr}P_1 = \mathrm{tr}P_2 = \mathrm{tr}P_3 = \mathrm{tr}P_4 = -2$ かつ, これらのどのペアも不動点を共有しないように選ぶ. さらに Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 を以下のような行列とする.

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= -Q_1^2, & P_2P_3 &= -Q_2^2, & P_3P_4 &= -Q_3^2, \\ P_4P_1 &= -Q_4^2, & P_3P_1 &= -Q_5^2, & P_4P_2 &= -Q_6^2 \end{aligned}$$

このとき $Q_1Q_2Q_3Q_4$ と $Q_1Q_2Q_5$ は P_1 と可換である. $Q_2Q_3Q_6$ は P_2 と可換である. したがって

$$\mathrm{tr}Q_1Q_2Q_3Q_4, \mathrm{tr}Q_1Q_2Q_3, \mathrm{tr}Q_2Q_3Q_6 \in \{-2, 2\}.$$

定理 1 もし $\mathrm{tr}Q_1Q_2Q_3Q_4 = \mathrm{tr}Q_1Q_2Q_5 = \mathrm{tr}Q_2Q_3Q_6 = -2$ ならば

$$\mathrm{tr}Q_1\mathrm{tr}Q_3 + \mathrm{tr}Q_2\mathrm{tr}Q_4 = \mathrm{tr}Q_5\mathrm{tr}Q_6.$$

定理の証明には基本的なトレース恒等式 (i),(ii),(iii) しか用いないが, 計算は随分面倒である.

$SL(2, \mathbb{R})$ の放物元 P_1, P_2 (ただし $\mathrm{tr}P_1 = \mathrm{tr}P_2 = -2$) が $(\infty, \infty : 1)$ 型フックス群 Γ を生成するとき, 2点穴あき円板 $\mathbb{H}/\Gamma$ ($\mathbb{H}$ は複素上半平面) の P_1, P_2 の不動点に

対応する puncure p_1, p_2 それぞれのまわりに長さ1のホロサークルを描く．p_1,p_2 を結ぶ単純測地線 c の2つのホロサークルに挟まれた部分弧の長さを $\ell(c)$ とおくと，$\lambda(c) = e^{\ell(c)/2}$ が Penner が定義した c の λ-length であり，(1) で定まる Q のトレースの絶対値と一致する．その意味で定理1はPennerの「トレミー恒等式」の一つの拡張になっている．

上の定理の応用として [5] の方法を真似て $\mathcal{R}$ に作用する写像類群 $\mathcal{MC}_{g,m}$ (G の外部自己同型群) の作用が有理写像で表わすことが考えられる．しかし複素化された λ-length は多価関数になるので $\mathcal{MC}_{g,m}$ の作用で不変な単連結領域に制限して扱うのが安全である。

写像類が有理写像として表わされることにより，$\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{6g-6+3m}$ への作用に関して，その不動点を見つける作業が代数方程式を解くことに帰着される．その写像類が既約かつ非周期的 (擬 Anosov 的) ならば，Thurston の定理により $\mathcal{R}$ 内に離散的な表現を与える不動点が存在し，それは，S^1 上の曲面束の構造をもつ3次元双曲多様体のファイバーである曲面の基本群の $SL(2,\mathbb{C})$-表現と一致する．

たとえば4点穴あき球面の表現空間

$$\mathcal{R} = \{(A,B,C) : A,B,C \in SL(2,\mathbb{C}), \mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B = \mathrm{tr}C = \mathrm{tr}ABC = -2\}$$

に座標系

$$\lambda_1 = -\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}BC,\ \lambda_2 = -\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}CA,\ \lambda_3 = -\mathrm{tr}C - \mathrm{tr}AB$$

を導入すると，$\mathcal{R}$ に次の変換として作用する2つの写像類 φ_1 と φ_2 が見つかる．

$$\begin{aligned}\varphi_1 &: (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mapsto (\lambda_1,\lambda_3,\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3),\\ \varphi_2 &: (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \mapsto (\lambda_3,\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned}$$

写像類 $\varphi = (\varphi_2^{-1}\varphi_1\varphi_2) \circ (\varphi_2^{-2}\varphi_1\varphi_2^2) \circ \varphi_1^5$ の1つの不動点に対応する表現

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -z & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3-z & 1 \\ -8+3z & -5+z \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -5+2z & -6+2z \\ -z & 3-2z \end{pmatrix}$$

(ただし $z = (5+\sqrt{7}i)/2$) は $SL(2,\mathbb{Z}[z])$ の部分群であり離散的である．A,B,C と

$$T = \begin{pmatrix} 1 & (z-3)/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

によって生成される群を Γ とおくと，Γ は次の群表現をもつ．

$$\Gamma = \langle A,D,T : DTD^{-1}T^{-1} = DATA^{-1}T^{-1}A^{-1}D^{-1}A^{-1}T^{-1}ATA = 1\rangle.$$

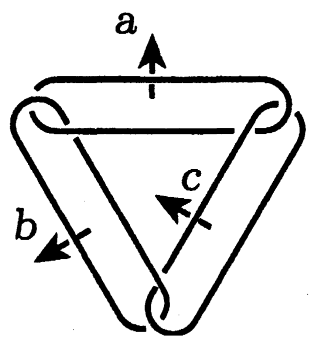
下の図にある3次元球面 S^3 内の絡み目 L の補空間の基本群の矢印 a,b,c に対応する Wirtinger 表現が

$$\langle a,b,c : bab^{-1} = c^{-1}ac,\ ca^{-1}cab^{-1}a^{-1}c^{-1}aba^{-1}c^{-1}a = 1\rangle.$$

となる. 対応

$$A \to a^{-1},\ T \to c,\ D \to ab^{-1}c^{-1}$$

によって Γ から $\pi_1(S^3 - L)$ への同型を得る.



参考文献

[1] Maclachlan, C. and A. W. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-manifolds*, Springer, GTM 219, Springer Verlag, 2003.

[2] Luo, Feng, Geodesic length functions and Teichmüller spaces, J. Differential Geom. **48** (1998), 275–317.

[3] Nakanishi, T. and M. Näätänen, complexification of lambda length as parameter for $SL(2, \mathbb{C})$ representation space of punctured surface groups, J. London. Math. Soc., **70** (2004), 383-404

[4] Nakanishi, T. and M. Näätänen, Areas of two-dimensional moduli spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **129**

[5] Penner, R. C., The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, Commun. Math. Phys. **113** (1987), 299-339.