数理解析研究所講究録
1518 巻 2006 年 53-62

離散的穴あきトーラス群の列について
(A note on sequences of Kleinian punctured-torus groups)

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 糸 健太郎 (Kentaro Ito)
Graduate school of Mathematics, Nagoya University

ここでは離散的穴あきトーラス群の列の収束・発散に関する必要十分条件を与える．これより，擬フックス群空間の自己接触を引き起こす収束列は Anderson-Canary の手法により構成されるもので本質的に尽きていることが分かる．また応用として，ベアス・スライスの幾何極限が代数極限よりも真に大きくなる状況を観察する．

1 導入

S を 1 点穴あきトーラスとする．$\pi_1(S)$ の標準的な生成元 α, β を 1 組固定すると，タイヒミュラー空間 $T(S)$ と上半平面 $\mathbf{H}$ との間に自然な対応が定まる．このとき $T(S)$ のサーストンのコンパクト化 $\overline{T(S)}$ は $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \hat{\mathbb{R}}$ と同一視される．ここで，サーストン境界 $\partial T(S) = \mathbb{P}\mathcal{ML}(S)$ は $\hat{\mathbb{R}}$ に，S 上の単純閉曲線集合 $\mathcal{S}(S) \subset \mathbb{P}\mathcal{ML}(S)$ は $\hat{\mathbb{Q}}$ に対応する．

$\mathcal{R}(S)$ を表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の共役類 $[\rho]$ の集合とし，代数収束の位相を入れる．$\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{R}(S)$ を忠実な離散表現から成る部分集合とすると，$\mathcal{D}(S)$ は $\mathcal{R}(S)$ の非コンパクトな閉集合である．各 $[\rho] \in \mathcal{D}(S)$ に対して，商多様体 $N_\rho = \mathbb{H}^3/\rho(\pi_1(S))$ のエンド不変量 $\nu([\rho]) \in (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$ が定まる．ここで $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \partial\mathbf{H}\}$ である．このとき，1 点穴あきトーラスに関する ending lamination conjecture の解決に関連して次のことが知られている：

定理 1.1 (Minsky).
$$\nu^{-1} : (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta \to \mathcal{D}(S)$$
は連続全単射である．

以下では $\nu^{-1} = b$ とおく．上の定理より特に，$(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$ における収束列 $(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty)$ は収束列 $b(x_n, y_n) \to b(x_\infty, y_\infty)$ を与える．しかし $\nu : \mathcal{D}(S) \to (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$ は連続ではないことが知られている．実際，次の定理で見るように，$\mathcal{D}(S)$ の中の収束列 $[\rho_n] \to [\rho_\infty]$ で $\lim_{n\to\infty} \nu([\rho_n]) \in \Delta$ かつ $\nu([\rho_\infty]) \in (\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta$ を満たすものが存在する．

定理 1.2 (Anderson-Canary). S 上の単純閉曲線 $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ に関するデーン・ツイストを $\tau = \tau_c$ とする． 任意の $x, y \in \mathbf{H}$ に対して $(\tau^n x, \tau^{2n} y) \to (c, c) \in \Delta$ であるが $b(\tau^n x, \tau^{2n} y)$ は収束列である．さらに一般に，任意の $p \in \mathbb{Z}$ に対して $b(\tau^{pn} x, \tau^{(p+1)n} y)$ は収束列である．

一方でフックス群の一般論より，同上の c, τ と任意の $x \in \mathbf{H}$ に対して $b(\tau^n x, \tau^n x) \to \infty$ であることが分かる．発散に関してはさらに次が知られている．

定理 1.3 (Ohshika). $x \in \hat{\mathbb{R}} \setminus \hat{\mathbb{Q}}$ とし，$(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta \ni (x_n, y_n) \to (x, x) \in \Delta$ とする．このとき $b(x_n, y_n) \to \infty$ である．

以下では，$c \in \hat{\mathbb{Q}}$ とし，$(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta \ni (x_n, y_n) \to (c, c) \in \Delta$ とするとき，$b(x_n, y_n)$ がいつ収束していつ発散するかを調べる．

2 準備

2.1 タイヒミュラー空間

S を 1 点穴あきトーラスとし，以下では $\pi_1(S)$ の標準的な生成元 α, β を 1 組固定する．タイヒミュラー空間 $T(S)$ はリーマン面 X と向きを保つ同相写像 $f : S \to X$ の組 (f, X) の同値類の集合である．いま $x \in \mathbf{H}$ に対して $(f, X) \in T(S)$ を次のように定める：X を $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}x$ から 1 点を除いたものとし，$f : S \to X$ を $f(\alpha)$, $f(\beta)$ がそれぞれ $[0, 1]$, $[0, x]$ の X における像となるものとする．この対応で $T(S)$ は $\mathbf{H}$ と同一視される．このとき，導入で述べた通り $\overline{T(S)}$, $\partial T(S) = \mathbb{P}\mathcal{ML}(S)$, $\mathcal{S}(S)$ はそれぞれ $\overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cup \hat{\mathbb{R}}$, $\partial \mathbf{H} = \hat{\mathbb{R}}$, $\hat{\mathbb{Q}}$ と同一視される．特に，ホモトピー類 $[\alpha], [\beta], [\alpha^{-1}\beta] \in \mathcal{S}(S)$ が $\infty, 0, 1 \in \hat{\mathbb{Q}}$ に対応する．

2.2 Mod(S) の作用

$\sigma \in \mathrm{Mod}(S)$ とする．$x = (f, X) \in T(S)$ への作用を

$$\sigma \cdot x = \sigma \cdot (f, X) = (f \circ \sigma^{-1}, X)$$

と定める．誤解が無ければ $\sigma \cdot x$ を σx と書く．表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ に対して

$$\sigma \cdot \rho = \rho \circ \sigma_*^{-1}$$

とし，さらに $\sigma \cdot [\rho] = [\sigma \cdot \rho]$ と定める．このとき $b(x, y) \in \mathcal{D}(S)$ に対して

$$\sigma \cdot b(x, y) = b(\sigma x, \sigma y)$$

が成り立つ．以下では $c \in \hat{\mathbb{Q}}$ に関する Dhen twist を $\tau_c \in \mathrm{Mod}(S)$ と表す．特に $[\alpha] = \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ に関する Dehn twist を $\tau \in \mathrm{Mod}(S)$ と表すと，その $T(S) = \mathbf{H}$ への作用は $\tau : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$, $z \mapsto z + 1$ となる．(すなわち，このように向きを入れる.) このとき，誘導される同型写像 $\tau_* : \pi_1(S) \to \pi_1(S)$ は生成元に関して

$$\tau_*(\alpha) = (\alpha), \quad \tau_*(\beta) = \alpha^{-1}\beta$$

を満たす．従って，任意の表現 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ に対して

$$(\tau \cdot \rho)(\alpha) = \rho(\alpha), \quad (\tau \cdot \rho)(\beta) = \rho(\alpha\beta)$$

が成り立つ．これより $(\tau \cdot \rho)(\beta^{-1}\alpha\beta) = \rho(\beta^{-1}\alpha\beta)$ も成り立つので，$\tau \cdot \rho \equiv \rho$ on $\langle \alpha, \beta^{-1}\alpha\beta \rangle$ であることにも注意する．

2.3 マスキット・スライス

$T_\zeta, J \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ $(\zeta \in \mathbb{C})$ を

$$T_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ と $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ の同一視のもとに $T_\zeta(z) = z + \zeta$, $J(z) = 1/z$ $(z \in \mathbb{C})$ である．ここで，$\mu \in \mathbb{C}$ に対して表現 $\rho_\mu : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ を

$$\rho_\mu(\alpha) = T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_\mu(\beta) = T_\mu J = \begin{pmatrix} i\mu & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．このとき $\rho_\mu(\alpha)(z) = z + 2$, $\rho_\mu(\beta)(z) = 1/z + \mu\,(z \in \mathbb{C})$ が成り立つ．ここで

$$\mathcal{M} = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \Im\mu > 0,\ \rho_\mu : \text{discrete, faithful}\}$$

をマスキット・スライスと呼ぶ．さらに $\mathcal{M}^* = \{\bar{\mu} \mid \mu \in \mathcal{M}\}$ をその複素共役とすると

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}^* = \{\mu \in \mathbb{C} \mid \rho_\mu : \text{discrete, faithful}\}$$

となる．$T(S)$ と $\mathrm{int}(\mathcal{M})$ は次のように同一視される：$\mu \in \mathrm{int}(\mathcal{M})$ に対して $G_\mu = \langle A, B_\mu \rangle$ は b-group で，ただ 1 つの不変領域 $\Omega_0(G_\mu)$ を持ち，$X = \Omega_0(G_\mu)/G_\mu$ は穴あきトーラスである．同相写像 $f : S \to X$ を $f_* = \rho_\mu$ となるように取り，μ に対して $(f, X) \in T(S)$ を対応させる．以下では上の対応

$$m : \mathbf{H} \to \mathrm{int}(\mathcal{M})$$

を 1 つ固定する．(この写像は平行移動 $\mu \mapsto \mu + 2k\,(k \in \mathbb{Z})$ による共役を除いて一意的に定まる.) また，この写像は自然に同相写像 $m : \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\} \to \mathcal{M}$ に拡張される．

2.4 ベアス・スライス

ある $y \in \overline{\mathbf{H}}$ に対して

$$b_y : \mathbf{H} \to \mathcal{D}(S), \quad x \mapsto b(x, y)$$

をベアス埋め込みという．その像

$$\mathcal{B}_y = \{b(x, y) \mid x \in \mathbf{H}\}$$

をベアス・スライスといい，その $\mathcal{R}(S)$ での閉包を $\overline{\mathcal{B}_y}$ と表す．同様に

$$\mathcal{B}^*_x = \{b(x, y) \mid y \in \mathbf{H}\}$$

や $\overline{\mathcal{B}^*_x}$ という記号も用いる．ここでベアス埋め込み $b_y : \mathbf{H} \to \mathcal{B}_y$ は，$y \in \mathbf{H}$ ならば $b_y : \overline{\mathbf{H}} \to \overline{\mathcal{B}_y}$ に，$y \in \partial\mathbf{H}$ ならば $b_y : \overline{\mathbf{H}} \setminus \{y\} \to \overline{\mathcal{B}_y}$ に自然に拡張される．

一方で $\infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ に関して，写像

$$\mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}^* \to \overline{\mathcal{B}_\infty} \sqcup \overline{\mathcal{B}^*_\infty}; \quad \xi \mapsto [\rho_\xi]$$

はマスキット・スライスからベアス・スライスへの全単射を与える．

2.5 巻きつけ写像

いま $c=\infty\in\hat{\mathbb{Q}}$, $x,y\in\overline{\mathbf{H}}\setminus\{\infty\}$ とし，$\mu=m(x)$, $\nu=m(y)$ とおく．ここで完備双曲多様体

$$\hat{M}(\mu,\nu)\cong S\times(-1,1)\setminus c\times\{0\}$$

を次のように構成する：まず $M_\mu=\mathbb{H}^3/G_\mu$ と $M_{\bar{\nu}}=\mathbb{H}^3/G_{\bar{\nu}}$ それぞれから，凸核の全測地的 $(0,3)$-型境界に沿ってエンドを切り取り，残った2つの多様体の切り口を等長的に貼り合わせる．このとき $c\times\{0\}$ の近傍は rank-2 カスプに対応し，その基本群は

$$\begin{aligned}\delta &= \boldsymbol{\rho}_\mu(\alpha)=\boldsymbol{\rho}_{\bar{\nu}}(\alpha)=T_2,\\ \hat{\delta} &= \boldsymbol{\rho}_\mu(\beta)\boldsymbol{\rho}_{\bar{\nu}}(\beta)^{-1}=T_\mu JJ^{-1}T_{\bar{\nu}}^{-1}=T_{\mu-\bar{\nu}}\end{aligned}$$

を生成元に持つ rank-2 parabolic group $\langle\delta,\hat{\delta}\rangle$ となる．ここで δ は $S\times(-1,1)\setminus c\times\{0\}$ の中で $c\times\{-1\}$ にホモトピックであり，必要ならば同相写像 $\hat{M}(\mu,\nu)\to S\times(-1,1)\setminus c\times\{0\}\subset S\times(-1,1)$ を適切に選び直すことで，$\hat{\delta}$ は $S\times(-1,1)$ の中で自明であるとしてよい．

いま $p,q\in\mathbb{Z}$ に対して「巻きつけ写像」（これは up to homotopy で一意に定まる）

$$w_{p,q}:S\to\hat{M}(\mu,\nu)$$

を次のように定める：まず $p=0$ に対しては，$w_{0,q}:S\to S\times\{-1/2\}\subset\hat{M}(\mu,\nu)$ を embedding で $(w_{0,q})_*=\tau^q\cdot\boldsymbol{\rho}_\mu$ を満たすものとする．次に一般の $p\in\mathbb{Z}$ に対して，$w_{p,q}:S\to\hat{M}(\mu,\nu)$ を immersion で，rank-2 cusp $c\times\{0\}$ に p 回巻きついていて，$S\times(-1,1)$ においては $w_{0,q}$ とホモトピックなものとする．ここで $w_{p,q}$ が誘導する表現 $(w_{p,q})_*:\pi_1(S)\to\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ は α を parabolic に写すので，(必要ならば $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の元で共役を取ることで) $(w_{p,q})_*=\boldsymbol{\rho}_\xi$, $\xi\in\mathcal{M}\sqcup\mathcal{M}^*$ の形に書ける．このとき

$$\begin{aligned}(w_{p,q})_*(\alpha) &= (w_{0,q})_*(\alpha)=(\tau^q\cdot\boldsymbol{\rho}_\mu)(\alpha)=\boldsymbol{\rho}(\alpha)=\delta=T_2,\\ (w_{p,q})_*(\beta) &= \hat{\delta}^p((\tau^q\cdot\boldsymbol{\rho}_\mu)(\beta))=\hat{\delta}^p\boldsymbol{\rho}_\mu(\alpha^q\beta)=\hat{\delta}^p\delta^q\boldsymbol{\rho}_\mu(\beta)=(T_{\mu-\bar{\nu}})^p(T_2)^qT_\mu J\end{aligned}$$

なので

$$(w_{p,q})_*=\boldsymbol{\rho}_\xi,\quad \xi=(p+1)\mu-p\bar{\nu}+2q\in\mathcal{M}\sqcup\mathcal{M}^*$$

が成り立つ．この $(w_{p,q})_*$ の共役類を $\boldsymbol{b}_{p,q}(\mu,\nu)$ と書くこともある．すなわち

$$\boldsymbol{b}_{p,q}(\mu,\nu)=[\boldsymbol{\rho}_\xi],\quad \xi=(p+1)\mu-p\bar{\nu}+2q\in\mathcal{M}\sqcup\mathcal{M}^*$$

である．一般に $(p+1)\mu-p\bar{\nu}+2q=(p+1)(\mu+2q)-p(\bar{\nu}+2q)$ と変形出来るので，

$$\boldsymbol{b}_{p,q}(\mu,\nu)=\boldsymbol{b}_{p,0}(\tau^q\mu,\tau^q\nu)=\tau^q\cdot\boldsymbol{b}_{p,0}(\mu,\nu)$$

が成り立つ．後で説明するように，Anderson-Canary の例では $b(\tau^{pn}x,\tau^{(p+1)n}y)\to\boldsymbol{b}_{p,0}(\mu,\nu)$ が成り立つ．

3 主結果

離散的穴あきトーラス群の収束・発散に関する必要十分条件は定理3.4と定理3.5で与えられる．定理3.5の証明の中で技術的に難しい部分は定理3.2で扱う．

補題 3.1. いま $x_n \to x_\infty$, $y_n \to y_\infty$ を $\overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ における収束列とし，$\mu = m(x_\infty)$, $\nu = m(y_\infty)$ とおく．また $m_n \to \infty$ を発散する整数列とする．このとき

$$b(x_n, \tau^{m_n} y_n) \to b(x_\infty, \infty) = [\boldsymbol{\rho}_\mu]$$

であるので，その収束する代表元列を $\eta_n \to \boldsymbol{\rho}_\mu$ とする．ここで $\bar{\eta}_n = \tau^{-m_n} \cdot \eta_n$ とおくと

$$[\bar{\eta}_n] = b(\tau^{-m_n} x_n, y_n) \to b(\infty, y_\infty) = [\boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}]$$

であるが，このとき次が成り立つ：

(1) $\bar{\eta}_n \to \boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha)^{m_n} = \boldsymbol{\rho}_\mu(\beta)\boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}(\beta)^{-1} = T_{\mu-\overline{\nu}}$.

Proof. (1) $H = \langle \alpha, \beta^{-1}\alpha\beta \rangle \subset \pi_1(S)$ とおくと，定義より $\eta_n|_H \equiv \bar{\eta}_n|_H$ である．また $\boldsymbol{\rho}_\mu|_H \equiv \boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}|_H$ であることもチェック出来る．ここで $\eta_n \to \boldsymbol{\rho}_\mu$ であったので $\bar{\eta}_n|_H \to \boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}|_H$ を得る．一方で $[\bar{\eta}_n] \to [\boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}]$ であったので $\bar{\eta}_n \to \boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}$ が成り立つ．(実際，$\phi_n \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, $\phi_n \cdot \eta_n \cdot \phi_n^{-1} \to \boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}$ とすると，H が rank-2 自由群であるので $\phi_n \to id$ が分かる.)

(2) $\bar{\eta}_n = \tau^{-m_n} \cdot \eta_n$ より

$$\bar{\eta}_n(\beta) = (\tau^{-m_n} \cdot \eta_n)(\beta) = \eta_n(\alpha^{-m_n}\beta) = \eta_n(\alpha)^{-m_n}\eta_n(\beta)$$

であり，これより $\eta_n(\alpha)^{m_n} = \eta_n(\beta)\bar{\eta}_n(\beta)^{-1}$ が成り立つ．従って

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha)^{m_n} = \boldsymbol{\rho}_\mu(\beta)\boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}(\beta)^{-1} = T_{\mu-\overline{\nu}}$$

を得る． □

定理 3.2. 補題3.1と同じ記号のもとで，$\langle \eta_n(\alpha) \rangle$ は rank-2 parabolic group $\langle \delta, \hat{\delta} \rangle$ に幾何収束する．すなわち

(1) 任意の $\gamma \in \langle \delta, \hat{\delta} \rangle$ に対してある整数列 k_n が存在して $\eta_n(\alpha^{k_n}) \to \gamma$,

(2) ある部分列 $\{n_j\}_{j\in\mathbf{N}} \subset \{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ と整数列 l_j に関して $\eta_{n_j}(\alpha^{l_j}) \to \gamma'$ ならば $\gamma' \in \langle \delta, \hat{\delta} \rangle$

が成り立つ．ここで

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha) = \boldsymbol{\rho}_\mu(\alpha) = T_2,$$
$$\hat{\delta} = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha)^{m_n} = \boldsymbol{\rho}_\mu(\beta)\boldsymbol{\rho}_{\overline{\nu}}(\beta)^{-1} = T_{\mu-\overline{\nu}}.$$

である．

Proof. 証明において $\Gamma_n = \eta_n(\pi_1(S))$ があるクライン群 Γ_G に幾何収束しているとして議論を進めたいので，部分列を取る議論に関して次の注意をする：証明は $\{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の任意の部分列に対して，その中のさらなる部分列が存在して定理の主張を満たすことを示せばよい．実際，このとき元の列 $\{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ に関して定理の主張が成り立つ．なぜならば，もし成り立たないとするとある部分列が存在して，その中のある部分列 n_j に関して $\eta_{n_j}(\alpha^{l_j}) \to \gamma' \notin \langle\delta, \hat{\delta}\rangle$ となる．しかしこの部分列 n_j の中のある部分列に関しては $\langle\eta_{n_j}(\alpha)\rangle$ の集積点集合は $\langle\delta, \hat{\delta}\rangle$ に一致するので矛盾である．

$\{n\}_{n\in\mathbf{N}}$ の任意の部分列に対して，必要ならばさらに部分列を取ることで，$\Gamma_n = \eta_n(\pi_1(S))$ があるクライン群 Γ_G に幾何収束していると仮定してよい．このとき幾何収束 $\langle\eta_n(\alpha)\rangle \to \langle\delta, \hat{\delta}\rangle$ を示す．$\langle\eta_n(\alpha)\rangle$ の幾何極限を $H_G \subset \Gamma_G$ と書くと $\langle\delta, \hat{\delta}\rangle \subset H_G$ は明らかなので，H_G も rank-2 parabolic group で $[H_G : \langle\delta, \hat{\delta}\rangle] < \infty$ となる．従って $[H_G : \langle\delta, \hat{\delta}\rangle] = 1$ を示せば良い．以下はスケッチのみを記す．

$\mu_n = m(x_n)$, $\nu_n = m(y_n)$, $\mu = m(x_\infty)$, $\nu = m(y_\infty)$ とおく．$\hat{M}(\mu_n, \nu_n)$ は $\hat{M}(\mu, \nu)$ に代数収束するので，$\hat{M}(\mu, \nu)$ の compact core $\mathcal{K}$ からの局所同相 $\phi_n : \mathcal{K} \to \hat{M}(\mu_n, \nu_n)$ がこの代数収束を誘導する．今の場合，$\mathcal{K}$ をうまく取れば $n \gg 0$ で ϕ_n は単射とすることが出来て，その bi-Lipschitz 定数 $K(\phi_n)$ は 1 に収束する．さらに Brock-Bromberg による Drilling Theorem を用いると $\hat{M}(\mu_n, \nu_n)$ の compact core $\mathcal{K}_n = \phi_n(\mathcal{K})$ からの bi-Lipschits 写像 $h_n : \mathcal{K}_n \to M_n := M(x_n, \tau^{m_n} y_n)$ で $K(h_n) \to 1$ となるものが存在する．従って，$h_n \circ \phi_n : \mathcal{K} \to M_n$ は代数収束 $M_n \to \hat{M}(\mu, \nu)$ を導く．一方で M_n は M_G に幾何収束するので，局所等長的な被覆写像 $\pi : \hat{M}(\mu, \nu) \to M_G$ が存在する．以下では $\pi|_{\mathcal{K}}$ が単射となることを示す．実際，幾何収束より M_G の任意のコンパクト集合 $\mathcal{K}_G$ に関して，枠付きの bi-Lipschitz 写像 $\psi_n : (\mathcal{K}_G, \omega_G) \to (M_n, \omega_n)$ で $K(\psi_n) \to 1$ となるものが存在する．いま $h_n(\mathcal{K}_n)$ の直径は有界なので，$\psi_n(\mathcal{K}_G) \supset h_n(\mathcal{K}_n)\ (n \gg 0)$ としてよく，このとき埋め込み写像 $\psi_n^{-1} \circ h_n \circ \phi_n : \mathcal{K} \to M_G$ を得る．ここで $n \to \infty$ とすれば等距離埋め込みを得ることが分かる．さて，$\langle\delta, \hat{\delta}\rangle$ は $\hat{M}(\mu, \nu)$ の rank-2 cusp の基本群であったので，$\pi|_{\mathcal{K}}$ が単射であることより $[H_G : \langle\delta, \hat{\delta}\rangle] = 1$ を得る．

□

定義 3.3. $\overline{\mathbf{H}} \setminus \{c\} \ni x_n \to c \in \hat{\mathbf{Q}}$ とする．

- 収束 $x_n \to c$ が **horocyclic** であるとは，c で接する任意の horoball $B \subset \overline{\mathbf{H}}$ に対して，$x_n \in B\,(n \gg 0)$ となるときをいう．
- 収束 $x_n \to c$ が **tangential** であるとは，c で接するある horoball $B \subset \overline{\mathbf{H}}$ に対して，$x_n \notin B\,(n \gg 0)$ となるときをいう．

特に $\overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\} \ni x_n \to \infty \in \partial\mathbf{H}$ のとき，この収束が horocyclic となるのは $\Im x_n \to \infty$ のときで，tangential となるのは $\Im x_n$ が有界で $|\Re x_n| \to \infty$ のときである．また $c \in \hat{\mathbf{Q}}$ に対して $x_n \to c$ が horocyclic であることと $l_{x_n}(c) \to 0$ となることは同値である．

定理 3.4. $c \in \hat{\mathbf{Q}}$ とし，$(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta \ni (x_n, y_n) \to (c, c) \in \Delta$ とする．このとき，$b(c_n, y_n)$ が収束列であるならば $x_n \to c$, $y_n \to c$ は共に tangential である．

すなわち，(同じ設定のもとで) $x_n \to c$, $y_n \to c$ のいずれかが horocyclic ならば $b(x_n, y_n) \to \infty$ となる．このことを次の２つの場合に分けて証明する：

case I $x_n \to c$, $y_n \to c$ 共に horocyclic.

case II $x_n \to c$ が tangential, $y_n \to c$ が horocyclic.

Proof. (**case I**) ϵ_0 を3次元マルグリス定数とし，$\epsilon \ll \epsilon_0$ を1つ取る．十分大きな n に対して $l_{x_n}(c) < \epsilon$, $l_{y_n}(c) < \epsilon$ が成り立つ．このような n を固定し，$M = M(x_n, y_n)$ とおく．c を M の中の測地線で実現したものを c^* とし，凸核 $\mathcal{C}(M)$ の境界 $\partial^{\pm}\mathcal{C}(M)$ 上の単純閉測地線で，c^* と M 内でホモトピックなものを $c^{\pm}$ とする．このとき，普遍定数 $K > 0$ が存在して，$c^{\pm}$ の長さは $K\epsilon$ 以下となる．(必要ならば $c^{\pm}$ を $\mathcal{C}(M)$ の中で若干ホモトピーで動かすことにより,) $c^{\pm}$ は有限個の測地線弧から成るとしてよい．A を $\mathcal{C}(M)$ 内の円環で，$\partial A = c^+ \sqcup c^-$ であり，有限個の測地三角形から成り，その3角形の各辺は $c^{\pm}$ の部分弧か c^+ と c^- の折れ点を結んだ測地線であるものとする．ここで $\epsilon' = 4K\epsilon$ とおくと，その構成法から A はマルグリスチューブ $\mathbf{T}_{\epsilon'}(c^*)$ に含まれることが分かる．いま，c と本質的に交わる S 上の単純閉曲線 $d \in \mathcal{S}(S)$ を取り，その M における測地線での実現を $d^* \subset \mathcal{C}(M)$ とする．このとき d^* は A と，すなわち $\mathbf{T}_{\epsilon'}(c^*)$ と交わる．ここで $n \to \infty$, $\epsilon \to 0$ とすると，$\epsilon' = 4K\epsilon \to 0$ であり，$\partial\mathbf{T}_{\epsilon'}(c^*)$ と $\partial\mathbf{T}_{\epsilon_0}(c^*)$ の距離は ∞ に発散する．いま d^* 全体が $\mathbf{T}_{\epsilon_0}(c^*)$ に含まれることは無いので，d^* の長さは ∞ に発散する．このことから $b(x_n, y_n) \to \infty$ in $\mathcal{D}(S)$ が分かる． □

case II を考える前に1つ注意をしておく．$c = \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ とし，収束 $\overline{\mathbb{H}} \setminus \{\infty\} \ni x_n \to \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ が tangetial であるとする．このとき $\tau = \tau_c$ の $\overline{\mathbb{H}}$ への作用の基本領域は $\{z \in \overline{\mathbb{H}} \,|\, 0 \leq \Re z < 1\}$ なので，必要なら部分列を取れば，ある整数の列 k_n が存在して $\tau^{k_n} x_n \to x'_\infty \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{\infty\}$ とすることが出来る．さらにこのような列 k_n の取り方は定数を除いて一意的である．すなわち，k'_n を同様な列とするとき $k_n - k'_n \equiv \text{const.}\ (n \gg 0)$ が成り立つ．

Proof. (**case II**) $c = \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ として一般性を失わない．整数列 $k_n \to \infty$ を $x'_n = \tau^{k_n} x_n \to x'_\infty \in \overline{\mathbb{H}} \setminus \{\infty\}$ となるように取る．$[\rho_n] = b(x_n, y_n)$ とし，$\eta_n = \tau^{k_n} \cdot \rho_n$ とおく．すると

$$\begin{aligned}
[\eta_n] = [\tau^{k_n} \cdot \rho_n] &= \tau^{k_n} \cdot b(x_n, y_n) \\
&= b(\tau^{k_n} x_n, \tau^{k_n} y_n) \\
&\to b(x'_\infty, \infty) = [\rho_\mu]
\end{aligned}$$

となる．ここで $\mu = m(x'_\infty)$ とおいた．さらに $\tau^{k_n} y_n \to c$ は horocyclic であることに注意する．いま代表元に関して $\eta_n \to \rho_\mu$ と仮定する．ここで $H = \langle \alpha, \beta^{-1}\alpha\beta \rangle$ とおくとき，$\rho_n|_H \equiv \eta_n|_H$ より $\rho_n|_H \to \rho_\mu|_H$ であるので，$[\rho_n] = b(x_n, y_n)$ が収束するためには ρ_n が収束することが必要である．(なぜならば，ある $\phi_n \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ に対して $\phi_n \cdot \rho_n \cdot \phi_n^{-1}$ が収束するならば，$\phi_n^{-1} \cdot (\rho_n|_H) \cdot \phi_n$ が収束する．一方で $\rho_n|_H$ も収束するので，ϕ_n が収束し，従って ρ_n も収束する.) さらに

$$\begin{aligned}
&\rho_n(\alpha) = (\tau^{-k_n} \cdot \eta_n)(\alpha) = \eta_n(\alpha), \\
&\rho_n(\beta) = (\tau^{-k_n} \cdot \eta_n)(\beta) = \eta_n(\alpha^{-k_n}\beta) = \eta_n(\alpha)^{-k_n}\eta_n(\beta)
\end{aligned}$$

であり，η_n は収束列なので，ρ_n が収束する必要十分条件は $\eta_n(\alpha)^{k_n}$ が収束することである．ところが，$\tau^{k_n} y_n \to c$ が horocyclic なので，Minsky's Pivot Theorem より $\eta_n(\alpha)$ の multiplier $\lambda(\eta_n(\alpha))$ に関する収束 $\lambda(\eta_n(\alpha)) \to c$ も horocyclic であり，McMullen の定理より $\langle \eta_n(\alpha) \rangle$ は $\langle \eta_\infty(\alpha) \rangle$ に強収束することが分かる．従って $\eta_n(\alpha)^{k_n} \to \infty$ であり $[\rho_n] = b(x_n, y_n) \to \infty$ となる． □

定理 3.5. $\infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ とし，$(\overline{\mathbf{H}} \times \overline{\mathbf{H}}) \setminus \Delta \ni (x_n, y_n) \to (\infty, \infty) \in \Delta$ とする．両方の収束 $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$ が tangential とする．さらに（必要ならば部分列を取って）ある整数の列 k_n, l_n が存在して $\tau^{k_n} x_n$, $\tau^{l_n} y_n$ がそれぞれ $\overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ で収束するとする．このとき，$b(x_n, y_n)$ が収束列である必要十分条件はある整数 p, q が存在して

$$(p+1)\, k_n - p\, l_n + q \equiv 0 \quad (n \gg 0)$$

が成り立つことである．さらに $b(x_n, y_n)$ が収束するとき，$\mu = m(x'_\infty), \nu = m(y'_\infty)$ とおくと

$$b(x_n, y_n) \to [\rho_\xi], \quad \xi = (p+1)\mu - p\overline{\nu} + 2q \in \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}^*$$

が成り立つ．

例 3.6 (Anderson-Canary). $x, y \in \mathbf{H}$, $p \in \mathbb{Z}$ に対して，$\mu = m(x)$, $\nu = m(y)$ とおくと

$$b(\tau^{pn} x, \tau^{(p+1)n} y) \to [\rho_\xi], \quad \xi = (p+1)\mu - p\overline{\nu} \in \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}^*$$

が成り立つ．

定理 *3.5* **の証明.** まず $[\rho_n] = b(x_n, y_n)$ が収束すると仮定する．$\overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ において

$$x'_n = \tau^{k_n} x_n \to x'_\infty, \quad y'_n = \tau^{l_n} y_n \to y'_\infty$$

とする．$[\rho_n] = b(x_n, y_n)$ とし，$\eta_n = \tau^{k_n} \cdot \rho_n$ とおく．このとき，$m_n = k_n - l_n$ とおくと

$$\begin{aligned} [\eta_n] = [\tau^{k_n} \cdot \rho_n] &= \tau^{k_n} \cdot b(x_n, y_n) \\ &= b(\tau^{k_n} x_n, \tau^{k_n} y_n) \\ &= b(x'_n, \tau^{m_n} y'_n) \end{aligned}$$

が成り立つ．

始めに $m_n \to \infty$ を示す．そのために m_n が有界な部分列を持つと仮定して矛盾を導く．いま，さらに部分列を取れば $\tau^{m_n} y'_n \to \exists y''_\infty \in \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ としてよい．(必要ならば k_n を $k_n + 1$ に置き換えることで) $(x'_\infty, y''_\infty) \notin \Delta$ と仮定していいので，収束列 $[\eta_n] \to b(x'_\infty, y''_\infty)$ を得る．さらに代表元に関して $\eta_n \to \eta_\infty$ s.t. $[\eta_\infty] = b(x'_\infty, y''_\infty)$ と仮定する．ここで $\rho_n \equiv \eta_n$ on $\langle \alpha, \beta^{-1}\alpha\beta \rangle$ であり，

$$\rho_n(\beta) = (\tau^{-k_n} \cdot \eta_n)(\beta) = \eta_n(\alpha^{-k_n}\beta) = \eta_n(\alpha)^{-k_n} \eta_n(\beta)$$

であるので，$[\rho_n]$ の収束・発散は $\eta_n(\alpha)^{-k_n}$ の収束・発散に等しい．ところで，$\eta_\infty(\alpha)$ は loxodromic なので $\langle \eta_n(\alpha) \rangle$ は $\langle \eta_\infty(\alpha) \rangle$ に強収束し，従って $\eta_n(\alpha)^{-k_n}$ は発散する．これは $[\rho_n]$ が収束するという仮定に矛盾する．従って $m_n \to \infty$ が示せた．

以上より，$[\eta_n] \to b(x'_\infty, \infty) = [\boldsymbol{\rho}_\mu]$, $\mu = m(x'_\infty)$ であり，代表元に関して $\eta_n \to \boldsymbol{\rho}_\mu$ と仮定する．このとき定理 3.2 より $\langle \eta_n(\alpha) \rangle$ は $\langle \delta, \hat{\delta} \rangle$ に幾何収束することに注意する．(ここで $\delta = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha)$ かつ $\hat{\delta} = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha)^{m_n}$ である．) また，この場合も上と同様の議論により，$[\rho_n]$ の収束・発散は $\eta_n(\alpha)^{-k_n}$ の収束・発散に等しい．いま $\eta_n(\alpha)^{k_n}$ が収束するならば，ある整数 $s, t \in \mathbb{Z}$ が存在して $\eta_n(\alpha)^{k_n} \to \hat{\delta}^s \delta^t$ となる．これと $\eta_n(\alpha)^{s m_n + t} \to \hat{\delta}^s \delta^t$ を合わせて $k_n \equiv s\, m_n + t\, (n \gg 0)$ を得る．ここで $p = -s$, $q = -t$ とおいて整理すると $(p+1)\, k_n - p\, l_n + q \equiv 0\ (n \gg 0)$ を得る．逆に $(p+1)\, k_n - p\, l_n + q \equiv 0\ (n \gg 0)$ ならば，$\eta_n(\alpha)^{k_n}$ は $\hat{\delta}^s \delta^t = \hat{\delta}^{-p} \delta^{-q}$ に収束し，

$$\rho_\infty(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (\tau^{-k_n} \cdot \eta_n)(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha) = \boldsymbol{\rho}_\mu(\alpha) = \delta = T_2,$$
$$\rho_\infty(\beta) = \lim_{n\to\infty} (\tau^{-k_n} \cdot \eta_n)(\beta) = \lim_{n\to\infty} \eta_n(\alpha)^{-k_n} \eta_n(\beta) = \hat{\delta}^p \delta^q \boldsymbol{\rho}_\mu(\beta) = (T_{\mu-\overline{\nu}})^p (T_2)^q T_\mu J$$

より，$\rho_\infty = \boldsymbol{\rho}_\xi$, $\xi = (p+1)\mu - p\overline{\nu} + 2q \in \mathcal{M} \sqcup \mathcal{M}^*$ が成り立つ． □

注: ここで k_n, l_n の取り方を変えても（従って p, q, μ, ν の値が変わっても）$\xi = (p+1)\mu - p\overline{\nu} - 2q$ の値は不変である．実際 $k'_n \equiv k_n + u$, $l'_n = l_n + v$ とすると $\mu' = \mu + 2u$, $\nu' = \nu + 2v$ であり，$(p'+1)k'_n - p'l'_n + q' \equiv 0$ より $p' = p$, $q' = q + (p+1)u - pv$ が成り立つ．このとき

$$\begin{aligned}(p'+1)\mu' - p'\overline{\nu'} + 2q' &= (p+1)(\mu + 2u) - p(\overline{\nu} + 2v) + 2(q - (p+1)u + pv) \\ &= (p+1)\mu - p\overline{\nu} + 2q.\end{aligned}$$

4 ベアス・スライスの幾何極限

$\overline{\mathbf{H}}$ における収束 $y_n \to y_\infty$ に対して，$\overline{\mathcal{B}_{y_n}}$ の幾何的極限を $\mathcal{B}_G$ と書く．すなわち次が成り立つとする：

- 任意の $[\rho] \in \mathcal{B}_G$ に対してある $[\rho_n] \in \overline{\mathcal{B}_{y_n}}$ が存在して $[\rho_n] \to [\rho]$.
- 任意の収束列 $[\rho_{n(j)}] \in \overline{\mathcal{B}_{y_{n(j)}}}$, $[\rho_{n(j)}] \to [\rho]$ に対して $[\rho] \in \mathcal{B}_G$.

このとき，明らかに $\overline{\mathcal{B}_{y_\infty}} \subset \mathcal{B}_G$ が成り立つ．

命題 4.1. $\overline{\mathbf{H}}$ における収束列 $y_n \to y_\infty$ に対し，(必要ならば部分列を取って) $\overline{\mathcal{B}_{y_n}}$ は $\mathcal{B}_G$ に幾何的に収束するとする．このとき $\mathcal{B}_G \setminus \overline{\mathcal{B}_{y_\infty}} \neq \emptyset$ となる必要十分条件は $y_\infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ かつ $y_n \to y_\infty$ が tangential であることである．さらに $y_n \to \infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ が tangential で，ある整数列 l_n が存在して $\tau^{l_n} y_n \to y'_\infty \in \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ となるとき，$\nu = m(y'_\infty)$ とおけば

$$\mathcal{B}_G = \{[\boldsymbol{\rho}_\xi] \mid \xi \in \mathcal{M} \sqcup (\mathcal{M}^* + 2\overline{\nu})\} \subset \overline{\mathcal{B}_\infty} \sqcup \overline{\mathcal{B}^*_\infty}$$

が成り立つ．

Proof. いま $\mathcal{B}_G \setminus \overline{\mathcal{B}_{y_\infty}} \neq \emptyset$ と仮定すると，ある点列 $x_n \in \overline{\mathbf{H}}$ が存在して $b(x_n, y_n)$ が $\overline{\mathcal{B}_{y_\infty}}$ の外の点に収束する．ここで，必要ならば部分列を取って $x_n \to x_\infty \in \overline{\mathbf{H}}$ としてよい．いま，$(x_\infty, y_\infty) \notin \Delta$ ならば $b(x_n, y_n) \to b(x_\infty, y_\infty) \in \overline{\mathcal{B}_{y_\infty}}$ となる．また $(x_\infty, y_\infty) \in \Delta$ の場合，すなわち $x_\infty = y_\infty \in \partial\mathbf{H}$ の場合は，定理より $b(x_n, y_n)$ が収束列であるためには $y_\infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ かつ $y_n \to y_\infty$ が tangential であることが必要である．

次に $y_n \to y_\infty \in \hat{\mathbb{Q}}$ が tangential ならば $\mathcal{B}_G \setminus \overline{\mathcal{B}_{y_\infty}} \neq \emptyset$ となることを示す．ここで $y_\infty = \infty$ として一般性を失わない．必要ならば部分列を取れば，ある整数列 l_n が存在して $\tau^{l_n} y_n \to y'_\infty \in \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ となる．ここでは，点列 $x_n \in \overline{\mathbf{H}}$ に対して $b(x_n, y_n)$ が収束するとして，その極限の可能性を調べる．必要ならば部分列を取って $x_n \to x_\infty \in \overline{\mathbf{H}}$ とする．$x_\infty \in \overline{\mathbf{H}} \setminus \{\infty\}$ ならば $b(x_n, y_n) \to b(x_\infty, \infty) \in \overline{\mathcal{B}_\infty}$ であり，$x_n \to \infty$ が horocyclic ならば $b(x_n, y_n) \to \infty$ であるので，$x_n \to \infty$ が tangential の場合を考える．必要ならばさらに部分列を取れば，定理と同じ記号のもとに $(p+1)k_n - pl_n + q \equiv 0$ が成り立つとしてよく，このとき $b(x_n, y_n) \to [\rho_\xi]$, $\xi = (p+1)\mu - p\overline{\nu} + 2q$ となる．ここで $p \geq 0$ の場合は $[\rho_\xi] \in \overline{\mathcal{B}_\infty}$ なので $p < 0$ の場合のみを考える．いま $y_n \to \infty$ が tangential なので $p = -1$ の場合は有り得ない．$p = -2$ の場合，任意の極限は $[\rho_\xi]$, $\xi = -\mu + 2\overline{\nu} + 2q \in \mathcal{M}^* + 2\overline{\nu}$ の形をしており，逆に任意の $\xi = -\mu + 2\overline{\nu} \in \mathcal{M}^* + 2\overline{\nu}$ に対して，$x'_\infty = m^{-1}(\mu)$, $x_n = \tau^{2l_n} x'_\infty$ とおけば $b(x_n, y_n) \to [\rho_\xi]$ となる．最後に $p < -2$ の場合，$\xi = (p+1)\mu - p\overline{\nu} + 2q$ は常に $\mathcal{M}^* + 2\overline{\nu}$ に含まれる．従って，$\mathcal{B}_G = \{[\rho_\xi] \,|\, \xi \in \mathcal{M} \sqcup (\mathcal{M}^* + 2\overline{\nu})\}$ であることが証明された．□

（2006年5月21日）