数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 1-5

重み付き Morrey 空間とある特異積分作用素について

白井　悟

山形大学大学院 博士後期課程 3 年

1 Motivation

Morrey 空間は C. B. Jr. Morrey が 1938 年の論文 [4] で，ある楕円型偏微分方程式の解の存在と微分可能性を考察するために示した「Morrey の補題」に起因する．

2 Definitions and Notation

- χ_E : 可測集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ の特性関数
- $|E|$: E の Lebesgue 測度
- $Q = Q(x_0, r)$: 中心 x_0，座標軸に平行な辺で辺長が r の cube
- w : 重み関数, すなわち, $0 \le w \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ かつ $w(Q) = \int_Q w(x)\,dx$
- $L^p(w)$: 測度 $w(x)dx$ に関する重み付き Lebesgue 空間
- $1/p + 1/p' = 1$

Definition 1. $1 \le p < \infty$, $0 < \lambda < n$ とする．そのとき Morrey 空間は次のように定義される：

$$L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n) = \{f \in L^p_{\mathrm{loc}} : \|f\|_{L^{p,\lambda}} < \infty\}$$

ここで

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}} = \sup_{r, x_0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{Q(x_0,r)} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1}$$

そして上限はすべての $r > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$ で取られる．

Definition 2. 核関数 K が存在して，L^2 上有界な作用素 T が次のように書けるとき Calderón-Zygmund 作用素という：

$$Tf(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbf{R}^n} K(x-y)f(y)\,dy.$$

ただし，核関数 $K(x)$ は次の条件を満たす：

$$|K(x)| \le \frac{C_K}{|x|^n} \quad \text{and} \quad |\nabla K(x)| \le \frac{C_K}{|x|^{n+1}},\ x \ne 0.$$

Definition 3. 分数次積分作用素 (Riesz potential) I_α を

$$I_\alpha f(x) = \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy, \quad 0 < \alpha < n$$

で定義する．

Definition 4. $b \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ による乗法作用素を b，T を線形作用素とすると，交換子は次のように定義される：

$$[b,T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x).$$

Remark 1. ここで次のことに注意する：

1. 交換子 $[b,T]$ は $weak(1,1)$ が不成立である．
2. Morrey 空間は補間定理が不成立である．

どちらも反例が示されている．

3 Theorems

この節では，得られている結果を証明なしで述べる．

Theorem 1 (Di Fazio and Ragusa [1]). $b \in BMO(\mathbf{R}^n)$ ならば，$[b,T]\colon L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n) \to L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$,$1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$.

逆に $[b,R_j]\colon L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n) \to L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$, $j = 1,\dots,n$ ならば，$b \in BMO(\mathbf{R}^n)$. ここで R_j は Riesz 変換とする．

Theorem 2 (Di Fazio and Ragusa [1]). $b \in BMO(\mathbf{R}^n)$ ならば，$[b,I_\alpha]\colon L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n) \to L^{q,\lambda}(\mathbf{R}^n)$,$0 < \alpha < n$, $1 < p < \alpha/n$, $0 < \lambda < n$, $1/q = 1/p - \alpha/(n-\lambda)$.

逆に $n-\alpha$：偶数，$[b,I_\alpha]\colon L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n) \to L^{q,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ ならば，$b \in BMO(\mathbf{R}^n)$. ここで α, p, q, λ は上記のものとする．

必要性の証明には球面調和が用いられたことに注意する.

Theorem 3 (Shirai [7]). $0<\alpha<n$, $1<p<\alpha/n$, $0<\lambda<n$, $1/q=1/p-\alpha/n$, $\mu/q=\lambda/p$ そして $b\in BMO(\mathbf{R}^n)$ ならば, $[b,I_\alpha]\colon L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)\to L^{q,\mu}(\mathbf{R}^n)$ である.

逆に $[b,I_\alpha]\colon L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)\to L^{q,\mu}(\mathbf{R}^n)$ ならば, $b\in BMO(\mathbf{R}^n)$ である. ここで α,p,q,λ,μ は上記のものとする.

必要性の証明には多重 Fourier 級数展開が用いられた. これは Janson [2] の方法である.

4 Weight I

Definition 5 (Muckenhoupt [5]). 重み関数が w Muckenhoupt class A_p, $1<p<\infty$ に属するとは, $C\geq 1$ が存在して任意の cube Q に対して

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{1-p'}\,dx\right)^{p-1}\leq C. \tag{2}$$

となることとする.

また $w\in A_1$ とは, $C\geq 1$ が存在してほとんどすべての x に対して,

$$Mw(x)\leq Cw(x), \tag{3}$$

となることとする. ここで M は Hardy-Littlewood の極大作用素

$$Mf(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|\,dy$$

を表す.

重み関数の例は次のようなものである.

Example 1. $w(x)=|x|^a\in A_p$, $-n<a<n(p-1)$.

そこで次のように重みつき Morrey 空間を定義する.

Definition 6 (Komori and Shirai [3]). $1\leq p<\infty$, $0<\kappa<1$ そして w を weight とする. そのとき重みつき Morrey 空間は

$$L^{p,\kappa}(w):=\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(w)\colon \|f\|_{L^{p,\kappa}(w)}<\infty\}, \tag{4}$$

によって定義される. ただし

$$\|f\|_{L^{p,\kappa}(w)}=\sup_Q\left(\frac{1}{w(Q)^\kappa}\int_Q |f(x)|^p\,w(x)\,dx\right)^{1/p} \tag{5}$$

で，そしてその上限は $\mathbf{R}^n$ のすべての cube Q でとられる．

Theorem 4 (Komori and Shirai [3]). $b \in BMO(\mathbf{R}^n)$ そして T を Calderón-Zygmund 作用素とする．もし $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ そして $w \in A_p$ ならば，$[b, T]$ は $L^{p,\kappa}(w)$ 上有界である．

5 Weight II

Definition 7 (Muckenhoupt and Wheeden [6]). 重み関数 w が $A_{p,q}$，$1 < p < q < \infty$ に属するとは，$C \geq 1$ が存在して

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^q\,dx\right)^{1/q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^{-p'}\,dx\right)^{1/p'} \leq C, \tag{6}$$

となることである．

$p = 1$ のとき, w が $A_{1,q}$，$1 < q < \infty$ に属するとは，$C \geq 1$ が存在して

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q w(x)^q\,dx\right)\left(\operatorname*{esssup}_{x\in Q}\frac{1}{w(x)}\right) \leq C. \tag{7}$$

となることである．

2 つの重み関数でさらに重みつき Moorrey 空間を一般化する．

Definition 8 (Komori and Shirai [3]). $1 \leq p < \infty$ そして $0 < \kappa < 1$ とする．2 つの weight u と v に対して，重みつき Morrey 空間は

$$L^{p,\kappa}(u,v) = \{f \colon \|f\|_{L^{p,\kappa}(u,v)} < \infty\},$$

によって定義される．ただし

$$\|f\|_{L^{p,\kappa}(u,v)} = \sup_Q \left(\frac{1}{v(Q)^\kappa}\int_Q |f(x)|^p\,u(x)\,dx\right)^{1/p}$$

で，そして上限は $\mathbf{R}^n$ のすべての cube Q でとられる．

もし $u = v$ ならば，簡単に $L^{p,\kappa}(u)$ と表す．

Theorem 5 (Komori and Shirai [3]). $b \in BMO(\mathbf{R}^n)$ そして I_α を分数次積分作用素とする．もし $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $1/q = 1/p - \alpha/n$, $0 < \kappa < p/q$ そして $w \in A_{p,q}$ ならば，$[b, I_\alpha]$ は $L^{p,\kappa}(w^p, w^q)$ から $L^{q,\kappa q/p}(w^q)$ へ有界である．

参考文献

[1] G Di Fazio and M. A. Ragusa, *Commutators and Morrey spaces*, Bollettino U. M. I. **7** (1991), 323–332.

[2] S. Janson, *Mean oscillation and commutators of singular integral operators*, Ark. Math. **16** (1978), 263–270.

[3] Y. Komori and S. Shirai, *Weighted morrey spaces and a singular integral operator*, submitted.

[4] Charles B. Morrey, Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[5] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[6] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274.

[7] S. Shirai, *Necessary and sufficient conditions for boundedness of commutators of fractional integral operators on classical morrey spaces*, Hokkaido Math. J. (to appear).