数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 89-95

Hanner 不等式のこれまで

北九州高専　山田康隆 (Yasutaka Yamada)
Kitakyushu National College of Technology

Hanner は 1956 年 L_p の modulus of convexity $\delta_{L_p}(\epsilon)$ をあるノルム不等式を用いて決定した [4]. この不等式はすでに 1945 年 Uppsala のセミナーで Bueling によって紹介されていたようであるが, 彼の論文が文献として登場した最初であり, 今日 Hanner 不等式と呼ばれている.

Hanner 不等式

(H1) $\|x+y\|^p+\|x-y\|^p \geq \left|\|x\|+\|y\|\right|^p+\left|\|x\|-\|y\|\right|^p \qquad \forall x,y \in L_p \quad (1<p\leq 2)$

(H2) $\|x+y\|^p+\|x-y\|^p \leq \left|\|x\|+\|y\|\right|^p+\left|\|x\|-\|y\|\right|^p \qquad \forall x,y \in L_p \quad (2\leq p<\infty)$

Hanner の証明と, 1994 年の Ball-Carlen-Lieb [1] による証明を辿ってみよう. Hanner の証明は見通しが良いように l_p 空間で行なうことにする. (L_p でも同じプロセスである.)

Hanner の証明 $l_p(1<p\leq 2)$ で (H1) の成立を示す. まず任意の複素数 u,v について

(1) $$|u+v|^p+|u-v|^p \geq \left||u|+|v|\right|^p+\left||u|-|v|\right|^p$$

が成立する. 実際 $|u|=a,\ |v|=b,\ v=(b/a)ue^{i\theta},\ t=\sin\theta$ とおけば

$|u+v|^p+|u-v|^p=|a+be^{i\theta}|^p+|a-be^{i\theta}|^p=(a^2+b^2+2abt)^{p/2}+(a^2+b^2-2abt)^{p/2}$

となり, これを $\phi(t),\ (|t|\leq 1)$ とおけば, その増減から

$$\phi(t)\geq\phi(1)=\phi(-1)=|a+b|^p+|a-b|^p=\left||u|+|v|\right|^p+\left||u|-|v|\right|^p$$

は容易に得られる.

また $x=(x_1,x_2,\cdots), y=(y_1,y_2,\cdots)\in l_p$ に対し $x^*=(|x_1|,|x_2|,\cdots), y^*=(|y_1|,|y_2|,\cdots)$ は $x^*,y^*\in l_p$ であり,

(2) $$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\geq\|x^*+y^*\|^p+\|x^*-y^*\|^p$$

が成立する. 実際 (1) より

$$\begin{aligned}\|x+y\|^p+\|x-y\|^p &= \sum_j\left\{|x_j+y_j|^p+|x_j-y_j|^p\right\}\\ &\geq \sum_j\left\{\left||x_j|+|y_j|\right|^p+\left||x_j|-|y_j|\right|^p\right\}=\|x^*+y^*\|^p+\|x^*-y^*\|\end{aligned}$$

次に任意の $x^*, y^* \in l_p$ について

$$(3) \qquad \|x^* + y^*\|^p + \|x^* - y^*\|^p \geq (\|x\|^* + \|y^*\|)^p + \Big|\|x^*\| - \|y^*\|\Big|^p$$

が成立することを示す．証明に際し，2変数関数

$$g(u,v) = \left(u^{1/p} + v^{1/p}\right)^p + \left|u^{1/p} - v^{1/p}\right|^p, \quad (u, v \geq 0)$$

を導入する．$H(t) = g(t,1) = (t^{1/p}+1)^p + |t^{1/p} - 1|^p \quad (t \geq 0)$ は

$$H''(t) = \begin{cases} \frac{p-1}{p}\left\{(1-t^{-1/p})^{p-2} - (1+t^{-1/p})^{p-2}\right\} t^{-1-1/p} & (t \geq 1) \\ \frac{p-1}{p}\left\{(t^{-1/p}-1)^{p-2} - (t^{-1/p}+1)^{p-2}\right\} t^{-1-1/p} & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

より $H''(t) \geq 0$. $H(t)$ は convex である．$0 \leq a/c \leq b/d$ なる非負値 a, b, c, d について $(a+b)/(c+d)$ は a/c と b/d の $d:c$ の内分点であるから

$$(c+d)H\left(\frac{a+b}{c+d}\right) \leq cH\left(\frac{a}{c}\right) + dH\left(\frac{b}{d}\right)$$

が成立し，g に関する自明な性質 $\lambda g(u,1) = g(\lambda u, \lambda)$, $(\lambda \geq 0)$ を使えば上記の H に関する不等式は

$$g(a+b, c+d) \leq g(a,c) + g(b,d)$$

と表せる．したがって $a_j \geq 0$, $b_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \cdots)$ について

$$\begin{aligned} g\Big(\sum_{j=1} a_j, \sum_{j=1} b_j\Big) &= g\Big(a_1 + \sum_{j=2} a_j, b_1 + \sum_{j=2} b_j\Big) \\ &\leq g(a_1, b_1) + g\Big(\sum_{j=2} a_l, \sum_{j=2} b_j\Big) \leq \cdots \leq \sum_{j=1} g(a_j, b_j) \end{aligned}$$

が成り立つ．この不等式において $a_j = |x_j|^p$, $b_j = |y_j|^p$ とおけば

$$\begin{aligned} & g\Big(\sum a_j, \sum b_j\Big) = g\Big(\|x^*\|^p, \|y^*\|^p\Big) = \Big(\|x\|^* + \|y^*\|\Big)^p + \Big|\|x^*\| - \|y^*\|\Big|^p, \\ & \sum g(a_j, b_j) = \sum\Big(|x_j| + |y_j|\Big)^p + \sum\Big||x_j| - |y_j|\Big|^p = \|x^* + y^*\|^p + \|x^* - y^*\|^p \end{aligned}$$

であるから (3) が示された．こうして (2),(3) および $\|x^*\| = \|x\|$, $\|y^*\| = \|y\|$ を使って (H1) の証明は完了する．(H2) についても同様のプロセスを経て証明される．

Ball-Carlen-Lieb の証明 $1 < p < \infty$,

$$\alpha(r) = (1+r)^{p-1} + |1-r|^{p-1}\mathrm{sgn}(1-r)$$

とすれば，任意の実数 x, y について次の不等式が成立する．

$$(4) \qquad |x+y|^p + |x-y|^p = \sup_{r>0}\{\alpha(r)|x|^p + \alpha(1/r)|y|^p\} \qquad (1 < p \leq 2)$$

$$(5)\qquad |x+y|^p+|x-y|^p=\inf_{r>0}\{\alpha(r)|x|^p+\alpha(1/r)|y|^p\}\qquad (2\le p<\infty)$$

証明では $x=1,\ 0<y\le 1$ としも一般性は失われない. $f(r)=\alpha(r)+\alpha(1/r)y^p$ の増減は $f'(r)=(p-1)\{1-(y/r)^p\}\{|1+r|^{p-2}-|1-r|^{p-2}\}$ より $1<p\le 2$ の場合 $f(r)$ は $r=y$ で極大 (最大) となる. すなわち

$$\begin{aligned} f(r) &\le f(y)=\alpha(y)+\alpha(1/y)y^p\\ &= (1+y)^{p-1}+(1-y)^{p-1}+\left\{(1/y+1)^{p-1}-(1/y-1)^{p-1}\right\}y^p\\ &= (1+y)^p+(1-y)^p \end{aligned}$$

よって $(1+y)^p+(1-y)^p=\sup_{r>0}f(r)$, (4) は示された. また $2\le p<\infty$ の場合 $f(r)$ は $r=y$ で極小 (最小) となり, 同様な手法で (5) を得る. そこで (H1) の証明に入ろう. $1<p\le 2$, (S,Σ,μ) を measure space とすれば, 任意の $x,y\in L_p(S,\Sigma,\mu)$ について

$$\begin{aligned} \|x+y\|^p+\|x-y\|^p &= \int_S |x(t)+y(t)|^p+|x(t)-y(t)|^p d\mu(t)\\ &= \int_S \sup_r\{\alpha(r)|x(t)|^p+\alpha(1/r)|y(t)|^p\}d\mu(t)\\ &\ge \sup_r\int_S\{\alpha(r)|x(t)|^p+\alpha(1/r)|y(t)|^p\}d\mu(t)\\ &= \sup_r\left\{\alpha(r)\|x\|^p+\alpha(1/r)\|y\|^p\right\}\\ &= \Big|\|x\|+\|y\|\Big|^p+\Big|\|x\|-\|y\|\Big|^p \end{aligned}$$

すなわち (H1) が示された. ここでは (4) を適用した. $p=1$ の場合も自明な三角不等式となり成立する. $2\le p<\infty$ の場合,(5) を用いて

$$\begin{aligned} \|x+y\|^p+\|x-y\|^p &= \int_S |x(t)+y(t)|^p+|x(t)-y(t)|^p d\mu(t)\\ &= \int_S \inf_r\{\alpha(r)|x(t)|^p+\alpha(1/r)|y(t)|^p\}d\mu(t)\\ &\le \inf_r\int_S\{\alpha(r)|x(t)|^p+\alpha(1/r)|y(t)|^p\}d\mu(t)\\ &= \inf_r\left\{\alpha(r)\|x\|^p+\alpha(1/r)\|y\|^p\right\}\\ &= \Big|\|x\|+\|y\|\Big|^p+\Big|\|x\|-\|y\|\Big|^p. \end{aligned}$$

(H2) が示される.

Ball-Carlen-Lieb の証明に本質的であった (4),(5) により Hanner 不等式と Clarkson 不等式の関係も明らかにできる.

Hanner 不等式と Clarkson 不等式. X をバナッハ空間, $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$ とする. このとき次が成立する.

(i) $1<p\le 2$ の場合, X で Hanner 不等式 (H1) が成立するならば, Clarkson 不等式

$$\Big(\|x+y\|^q+\|x-y\|^q\Big)^{1/q}\le 2^{1/q}\Big(\|x\|^p+\|y\|^p\Big)^{1/p}$$

が成立する.

(ii) $2\le p<\infty$ の場合, X で Hanner 不等式 (H2) が成立するならば, Clarkson 不等式

$$\Big(\|x+y\|^p+\|x-y\|^p\Big)^{1/p}\le 2^{1/p}\Big(\|x\|^q+\|y\|^q\Big)^{1/q}$$

が成立する.

実際 $2\le p<\infty$ の場合, (H2) が成立すれば. $u=\|x\|^q$, $v=\|y\|^q$, $r=v/u$ ($v\le u$ としてよい) とおき, (4) を使って

$$\begin{aligned}\|x+y\|^p+\|x-y\|^p &\le \Big|\|x\|+\|y\|\Big|^p+\Big|\|x\|-\|y\|\Big|^p\\ &\le \alpha(r)\|x\|^p+\alpha(1/r)\|y\|^p=\alpha(v/u)u^{p-1}+\alpha(u/v)v^{p-1}\\ &= (u+v)^{p-1}+(u-v)^{p-1}+(u+v)^{p-1}-(u-v)^{p-1}\\ &= 2(u+v)^{p-1}=2\Big(\|x\|^q+\|y\|^q\Big)^{p/q}.\end{aligned}$$

(ii) の Clarkson 不等式を得る. (i) も (5) を使って同様に示される.

この Hanner の不等式の成立する空間は L_p 空間の他, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$. またソボレフ空間 W_p^m, ($p=$ 偶数 (H2)), p−Schatten class operator のなす空間 C_p ($1\le p\le 4/3$ のとき (H1)), ($p\ge 4$ のとき (H2)) などが知られている. なお $p=1$ の場合, (H1) は三角不等式となりすべてのノルム空間で成立する.

$\delta_{L_p}(\epsilon)$ の算出に見られるように Hanner 不等式はバナッハ空間のよりシャープな uniform convexity, smoothness 等の幾何学的特性のリサーチに効果的であった. 70 年代には L_p 空間の optimal 2-uniform convexity inequality が Hanner 不等式を使って求められている [4].

Optimal 2-unifrom convexity for L_p

$$\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2}\ge\|x\|^2+(p-1)\|y\|^2\qquad \text{in } L_p\ (1<p\le 2)$$

$$\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2}\le\|x\|^2+(p-1)\|y\|^2\qquad \text{in } L_p\ (2\le p<\infty)$$

Hanner 不等式を対象とした研究は決して多くはないが, Hanner 不等式の成立する一般のバナッハ空間に関する情報は 80 年代後半から見られるようになる. Trubnikov は

Hanner 不等式を満たすバナッハ空間 X 上の γ-accretive operator F について, 非線形方程式 $Fz=0$ が解を持つときその一意性が保障されることを示した [9]. Ball-Carlen-Lieb は Hanner 不等式の C_p での成立を示した論文で,Hanner 不等式の新たな証明を与えるとともに一般のバナッハ空間とその双対空間での (H1) と (H2) の双対定理を与えた. これにより L_p でのオリジナルな 2 つの Hanner 不等式は同値であることがわかる.

Hanner 不等式の双対性

X をバナッハ空間, X^* をその双対空間. $1<p\le 2,\ 1/p+1/q=1$ として

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p \ge \Big|\|x\|+\|y\|\Big|^p+\Big|\|x\|-\|y\|\Big|^p \qquad \forall x,y\in X$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\|x^*+y^*\|^q+\|x^*-y^*\|^q \le \Big|\|x^*\|+\|y^*\|\Big|^q+\Big|\|x^*\|-\|y^*\|\Big|^q \qquad \forall x^*,y^*\in X^*$$

近年 Takahashi, Kato は, より一般的な重み付きの Hanner 型不等式を導入し, この不等式の成立するバナッハ空間の研究が始まった [10]. 以下最近の我々の結果 [12] [13] を示す.

定理 1. X をバナッハ空間 $1<p,s,t<\infty$ とする. 以下同値である.
(i) X は 2-uniformly convex.
(ii) $\gamma>0$ が存在し, Hanner 型不等式

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p \ge \Big|\|x\|+\|\gamma y\|\Big|^p+\Big|\|x\|-\|\gamma y\|\Big|^p$$

が X で成立する.
(iii) $\gamma>0$ が存在し, Hanner 型不等式

$$\left(\frac{\|x+y\|^s+\|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s} \ge \left(\frac{\Big|\|x\|+\|\gamma y\|\Big|^t+\Big|\|x\|-\|\gamma y\|\Big|^t}{2}\right)^{1/t}$$

が X で成立する.

定理 2. X をバナッハ空間 $1<p,s,t<\infty$ とする. 以下同値である.
(i) X は 2-uniformly smooth.
(ii) $\gamma>0$ が存在し, Hanner 型不等式

$$\|x+y\|^p+\|x-y\|^p \le \Big|\|x\|+\|\gamma y\|\Big|^p+\Big|\|x\|-\|\gamma y\|\Big|^p$$

が X で成立する.

(iii) $\gamma > 0$ が存在し, Hanner 型不等式

$$\left(\frac{\|x+y\|^s+\|x-y\|^s}{2}\right)^{1/s} \le \left(\frac{\left|\|x\|+\|\gamma y\|\right|^t+\left|\|x\|-\|\gamma y\|\right|^t}{2}\right)^{1/t}$$

が X で成立する.

定理1で(iii)は重み γ $(0<\gamma\le 1)$ のついた Hanner 型不等式(ii)を一般化した不等式で L_p $(1<p\le 2)$ 空間では γ の最良値も決定される.

$$\gamma = \min\left\{1, \sqrt{(p-1)/(t-1)}, \sqrt{(s-1)/(t-1)}\right\} \quad (1<p\le 2).$$

また定理2(iii)の $\gamma \ge 1$ の最良値も次のように決まる.

$$\gamma = \max\left\{1, \sqrt{(p-1)/(t-1)}, \sqrt{(s-1)/(t-1)}\right\} \quad (2\le p<\infty).$$

前述した L_p の optimal 2-uniform convexity 不等式はこの結果の系となる. Ball-Carlen-Lieb の双対定理の一般化となるバナッハ空間 X とその双対空間 X^* の間の Hanner 型不等式の双対定理も成立する. またこれらの Hanner 型不等式の重みの位置を変えた形の Hanner 型不等式は q-uniform convexity, p-uniform smoothness な空間を特徴付けることができる.

定理 3. X をバナッハ空間 $2\le q<\infty$, $1\le t\le q$ とする. 以下同値である.
(i) X は q-uniformly convex.
(ii) $\gamma > 0$ が存在し, Hanner 型不等式

$$\left(\|x+y\|^q+\|\gamma(x-y)\|^q\right)^{1/q} \le \left(\left|\|x\|+\|y\|\right|^t+\left|\|x\|-\|y\|\right|^t\right)^{1/t}$$

が X で成立する.

定理 4. X をバナッハ空間, $1<p\le 2$, $p\le s\le\infty$ とする. 以下同値である.
(i) X は p-uniformly smooth である.
(ii) $\gamma > 0$ が存在し, Hanner 型不等式

$$\left(\|x+y\|^p+\|\gamma(x-y)\|^p\right)^{1/p} \ge \left(\left|\|x\|+\|y\|\right|^s+\left|\|x\|-\|y\|\right|^s\right)^{1/s}$$

が X で成立する.

Hanner 不等式の任意 n 元への拡張が 1995-1996 年 Kigami,Okazaki,Takahashi によって証明され, これによって L_p の type2, cotype2 定数が決定された.

L_p **での多元 Hanner 不等式** 任意有限個の $x_1, \cdots, x_n \in L_p$ について次が成立する.

$$\text{(i)} \qquad \mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|^p \geq \mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \|x_j\|\right|^p \qquad (1 < p \leq 2)$$

$$\text{(ii)} \qquad \mathbf{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j\right\|^p \leq \mathbf{E}\left|\sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \|x_j\|\right|^p \qquad (2 \leq p < \infty)$$

$\{\epsilon_j\}$ は $\epsilon_j = \pm 1$ を同確率 $1/2$ でとる独立な Rademacher 列, $\mathbf{E}$ は期待値.

定理1,2の重みの付いたHanner型不等式も同様な形で導入され, 2元と多元のHanner型不等式の成立は同値であることが示される.

参考文献

[1] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms, Invent. Math. **115** (1994), 463-482.

[2] W. L. Bynum, Weak parallelogram laws for Banach spaces, Canad. Math. Bull. Vol. **19**(3) (1976), 269-275.

[3] W. L. Bynum and J. H. Drew, A weak parallelogram law for l_p, Amer. Math. Monthly **79** (1972), 1012-1015.

[4] O. Hanner, On the uniform convexity of L_p and l_p, Ark. Math. **3** (1956), 239-244.

[5] D. C. Kay, A parallelogram law for certain L_p spaces, Amer. Math. Monthly, **74** (1967), 140-147.

[6] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of the Hanner's inequality and the type 2 (cotype 2) constant of a Banach space. Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci. No.**42**, (1995), 29-34.

[7] A. Kigami, Y. Okazaki and Y. Takahashi, A generalization of Hanner's inequality. Bull. Kyushu. Inst. Tech. Math. Natur. Sci. No.**43**, (1996), 9-13.

[8] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces II, 1979.

[9] Yu. V. Trubnikov, Hanner inequality and convergence of iteration process, Soviet Math. (Iz. VUZ) **31** (1987), no.7, 74-83.

[10] Y. Takahashi, M. Kato, On Hanner type inequalities in Banach space, 平成14年日本数学会秋季総合分科会.

[11] Y. Takahashi, K. Hashimoto and M. Kato, On sharp uniform convexity, smoothness, and strong type, cotype inequalities, J. Nonlinear. Convex Anal. **3**, No.2, (2002), 267-281.

[12] Y. Takahashi, Y. Yamada and M. Kato, On Hanner-type inequalities for Banach space, Banach and Functional Spaces, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, 359-365.

[13] Y. Yamada, Y. Takahashi and M. Kato, On Hanner type inequalities with a weight for Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., accepted.