数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 96-103

STRONG AND WEAK CONVERGENCE THEOREMS FOR A COUNTABLE FAMILY OF NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES

芝浦工業大学　工学部
厚芝 幸子 (SACHIKO ATSUSHIBA)

1. 序

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C から C への写像 T が C から C への nonexpansive であるとは任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

をみたすときである. $F(T)$ で集合 $\{x \in C : x = Tx\}$ を表す.

Hilbert 空間の閉凸部分集合上の非拡大写像に対する不動点近似として, Mann [15] は以下の不動点近似点列を導入した: x は C の任意の点とする.

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T x_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ここで $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1$ をみたす実数列とする. 後に Reich [16] はこの Mann 型点列を研究し, 一様凸で Fréchet 微分可能なノルムを持つ Banach 空間において, $F(T)$ が空でなくて実数列 $\{\alpha_n\}$ が $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$ をみたすならば $\{x_n\}$ は T の不動点に弱収束することを証明した. Suzuki [20] は 2 つの非拡大写像に対する次の強収束定理を証明した: C は Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, T と U は C から C への非拡大写像で $TU = UT$ とする. $\{\alpha_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \alpha_n \leq 1$ をみたし, かつ $0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{n-1} T^i U^j x_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

で定義される点列とする. すると $\{x_n\}$ は T と U の共通不動点へ強収束する ([9, 10] 参照).

一方, Xu and Ori [27] は有限個の写像 $T_1, T_2, \ldots, T_r$ に対して次の陰的近似点列を Hilbert 空間において研究した: x は C の任意の点とする.

$$x_0 = x, \quad x_n = \alpha_n x_{n-1} + (1 - \alpha_n) T_n x_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

This research was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), the Ministry of Education,Culture,Sports,Science and Technology, Japan.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47H09, 49M05.

Key words and phrases. Fixed point, nonexpansive mapping, nonexpansive semigroup, weak convergence, nonlinear ergodic theorem.

ここで $\{\alpha_n\}$ は $0<\alpha_n<1$ をみたす実数列とし, $T_n=T_{n+r}$ とする. そして (1) で定義される点列の弱収束定理を Hilbert 空間において証明した. Liu [14] は (1) で定義される点列の研究をし, 一様凸な Banach 空間において, 写像族の中で semicompact となる写像 T_i が存在するという仮定のもとで強収束定理を証明した. ([10, 12, 19, 28] も参照).

この論文では, まず可算個の写像の共通不動点への強収束定理を一般の Banach 空間において Mann 型点列を用いて証明する. また, 可算個の非拡大写像の共通不動点への強収束定理を一般の Banach 空間において陰的近似点列により証明する. さらに, 可算個の非拡大写像の共通不動点への弱収束定理を Opial 条件をみたす Banach 空間において陰的近似点列により証明する.

2. 準備と補題

本論文では以後, E は実 Banach 空間を表し, E^* は E の共役空間とし, $\langle y,x^*\rangle$ は $x^*\in E^*$ の $y\in E$ での値を表す. $x_n\to x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを表し, また $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ も x_n が x に強収束することを表す. $x_n\rightharpoonup x$ は点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを表し, また w-$\lim_{n\to\infty}x_n=x$ も x_n が x に弱収束することを表す. $\mathbb{N}$ はすべての正の整数からなる集合を表す.

C を実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1,T_2,\dots$ を C から C への写像とし, $\{\alpha_{n,i}:n,i\in\mathbb{N},1\le i\le n\}$ は任意の $n,i\in\mathbb{N}$ に対して $0\le\alpha_{n,i}\le 1$ をみたす実数列とする. Takahashi [24] は任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して以下のような C から C への写像 W_n を定義した:

$$
\begin{aligned}
U_{n,n+1}&=I,\\
U_{n,n}&=\alpha_{n,n}T_nU_{n,n+1}+(1-\alpha_{n,n})I,\\
U_{n,n-1}&=\alpha_{n,n-1}T_{n-1}U_{n,n}+(1-\alpha_{n,n-1})I,\\
&\ \vdots\\
U_{n,k}&=\alpha_{n,k}T_kU_{n,k+1}+(1-\alpha_{n,k})I,\\
&\ \vdots\\
U_{n,2}&=\alpha_{n,2}T_2U_{n,3}+(1-\alpha_{n,2})I,\\
W_n=U_{n,1}&=\alpha_{n,1}T_1U_{n,2}+(1-\alpha_{n,1})I.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

このような写像 W_n は $T_n,T_{n-1},\dots,T_1$ と $\alpha_{n,n},\alpha_{n,n-1},\dots,\alpha_{n,1}$ によって生成される W-mapping と呼ばれる. 次の補題は定義 (2) より導かれる.

Lemma 2.1. C は実 Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. $T_1,T_2,\dots$ は C から C への非拡大写像とし, $\{\alpha_{n,i}:n,i\in\mathbb{N},1\le i\le n\}$ は任意の $n,i\in\mathbb{N}$ に対して $0\le\alpha_{n,i}\le 1$ をみたす実数列とする. $U_{n,n+1},U_{n,n},U_{n,n-1},\dots,U_{n,2}$ と W_n は (2) で定義される写像とする. すると $U_{n,n+1},U_{n,n},U_{n,n-1},\dots,U_{n,2}$ と W_n は非拡大写像となる.

次の補題は Suzuki [20, 21] によって示された.

Lemma 2.2 ([20, 21]). $\{z_n\}$ と $\{w_n\}$ は Banach 空間 E の有界点列とし, $\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n \leq 1$ かつ $0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < \overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ をみたす実数列とする.

$$z_{n+1} = \alpha_n z_n + (1-\alpha_n) w_n$$

がすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して成立し,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (\|w_{n+1} - w_n\| - \|z_{n+1} - z_n\|) \leq 0$$

が成立すると仮定する. すると

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n - z_n\| = 0$$

が成立する.

Banach 空間 E が狭義凸であるとは $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$ をみたす任意の $x, y \in E$ に対して $\|x+y\|/2 < 1$ が成立するときをいう. 狭義凸な Banach 空間 E では, 任意の $x, y \in E$, $\lambda \in (0,1)$ に対して $\|x\| = \|y\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y\|$ が成立するならば, $x = y$ となる.

$B_r = \{v \in E : \|v\| \leq r\}$ とする. Banach 空間 E が一様凸であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $x, y \in B_1$ かつ $\|x - y\| \leq \varepsilon$ ならば, $\|x+y\|/2 \leq 1 - \delta$ となる $\delta > 0$ が存在することである. 一様凸な Banach 空間は回帰的であり, 狭義凸であることが知られている ([25] 参照). また, Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは任意の $x, y \in B_1$ に対して

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{3}$$

が存在するときにいう. $x \in B_1$ に対して, 極限 (3) が $y \in B_1$ に関して一様に存在するとき, Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるという. Banach 空間 E が Opial 条件をみたすとは, E の点列 $\{x_n\}$ が $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ をみたすならば

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in E$ に対して成立するときにいう ([17]). 回帰的な Banach 空間においては, この条件は E の $\text{net}\{x_\alpha\}$ が $\text{w-}\lim_\alpha x_\alpha = x$ をみたすならば

$$\underline{\lim}_{\alpha} \|x_\alpha - x\| < \underline{\lim}_{\alpha} \|x_\alpha - y\|$$

が $y \neq x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立するという条件と同値である ([4] 参照). 双対写像 $E \to E^*$ $x \to \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$ が一価で弱点列連続であれば E は Opial 条件をみたす. すべての Hilbert 空間, $\ell^p (1 < p < \infty)$ は Opial 条件をみたす ([11, 17] 参照). L^p-空間 $(p \neq 2)$ は Opial 条件をみたさないが, 過分な Banach 空間は Opial をみたすようにリノルミング可能である ([8, 17] 参照).

3. MANN 型点列による強収束定理

この節では, 可算個の写像の共通不動点への強収束定理を一般の Banach 空間において, Mann 型点列を用いて証明する. C は Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n\}$ は $1 \le i \le n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le \alpha_{n,i} \le 1$ をみたす実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \ldots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. この節では以下のような点列を考える ([5, 12, 13, 18, 24, 26] も参照):

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ここで $\{\beta_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le \beta_n \le 1$ をみたす実数列とする.

この点列の定義などから次の補題が導かれる.

Lemma 3.1. C は Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n\}$ は $1 \le i \le n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le \alpha_{n,i} \le 1$ をみたす実数列とする. $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への非拡大写像とし, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \ldots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

で定義される点列とする, ここで $\{\beta_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \le \beta_n \le 1$ をみたす実数列とする. すると, $\|x_{n+1} - w\| \le \|x_n - w\|$ が成立し, 任意の $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ に対して, $\lim_{n \to \infty} \|x_n - w\|$ が存在する.

次の補題は主定理の証明で重要な役割を担う ([6, 20, 21] も参照).

Lemma 3.2. C は Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n\}$ は $1 \le i \le n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_{n,i} \le 1$, 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n \to \infty} \alpha_{n,i} = 0$ をみたす実数列とする. $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への可換な非拡大写像とし, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \ldots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. $\{z_n\}$ は C の点列で C のある点 w に強収束するものとする. さらに任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\|W_n z_n - z_n\|}{\alpha_{n,1}\alpha_{n,2}\alpha_{n,3}, \ldots, \alpha_{n,k}} = 0$$

が成立するとする. このとき, w は $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ の点となる.

Lemmas 3.1,3.2 を用いて, 一般の Banach 空間にける次の強収束定理を証明できる ([21] も参照). この定理の証明の考え方としては, [2] の考え方を用いるとよい.

Theorem 3.3. C は Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n\}$ は $1 \le i \le n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_{n,i} \le 1$ をみたす実数列とし, $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への可換な非拡大写像とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し

て, W_n は $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \dots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. $\{\beta_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \beta_n \leq 1$ をみたし, かつ

$$0 < \varliminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$$

をみたす実数列とする. $\{s_n\}$ はある $a \in (0,1)$ に対して $0 < s_n < a < 1$ が成立し, かつ $\varliminf_{n\to\infty} s_n = 0$, $\varlimsup_{n\to\infty} s_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} |s_{n+1} - s_n| = 0$ をみたす実数列とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

で定義される点列とする, このとき, $1 \leq i \leq n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_{n,i} = s_n{}^i$ とすると $\{x_n\}$ が $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ の点に強収束する.

4. 陰的近似点列による強収束定理

この節では可算個の非拡大写像の共通不動点への強収束定理を一般の Banach 空間において陰的近似点列により証明する.

C は Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, $T_1, T_2, \dots$ は C から C への非拡大写像とする. $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ は $1 \leq i \leq n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \alpha_{n,i} \leq 1$ をみたす実数列とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \dots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. 以後, 以下のような点列を考える ([5, 12, 13, 18, 24, 26] も参照):

$$x_1 = x \in C, \quad x_n = \beta_n x_{n-1} + (1-\beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ここで $\{\beta_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \beta_n < 1$ をみたす実数列とする. この点列の定義から次の補題が導かれる.

Lemma 4.1. C は Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ は $1 \leq i \leq n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 \leq \alpha_{n,i} \leq 1$ をみたす実数列とする. $T_1, T_2, \dots$ は C から C への非拡大写像とし, $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i) \neq \emptyset$ をみたすものとする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して W_n は $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \dots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_n = \beta_n x_{n-1} + (1-\beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

で定義される点列とする, ここで $\{\beta_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $0 < \beta_n < 1$ をみたす数列とする. このとき, $\|x_{n+1} - w\| \leq \|x_n - w\|$ が成立し, 任意の $w \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F(T_i)$ に対して, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\|$ が存在する.

Lemmas 4.1, 3.2 を用いて一般の Banach 空間における次の強収束定理を証明できる ([21] も参照). 証明の考え方については [2] の考え方を用いるとよい.

Theorem 4.2. C は Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ は $1 \leq i \leq n$ となる任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_{n,i} \leq 1$ をみたす実数列とし, $T_1, T_2, \dots$ は C から C への可換な非拡大写像とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \dots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping

とする. $\{\beta_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \beta_n < 1$ をみたし, かつ $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$ をみたす実数列とする. $\{s_n\}$ はある $a \in (0,1)$ に対して $0 < s_n < a < 1$ が成立し, $\underline{\lim}_{n\to\infty} s_n = 0$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} s_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} |s_{n+1} - s_n| = 0$ をみたす実数列とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_n = \beta_n x_{n-1} + (1-\beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

で定義される点列とする, このとき, $1 \le i \le n$ をみたす任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_{n,i} = {s_n}^i$ とすると $\{x_n\}$ が $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ の点に強収束する.

5. Opial 条件をみたす Banach 空間における弱収束定理

この節では陰的近似点列により, 可算個の非拡大写像に対する弱収束定理について考察する. Banach 空間に凸性は仮定しない Opial's 条件をみたす Banach 空間において次の可算個の非拡大写像に対する弱収束定理を証明した. この定理の証明の考え方としては, [3] の考え方を用いるとよい.

Theorem 5.1. C は Opial 条件をみたす Banach 空間 E の空でない弱コンパクト凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n\}$ と $\{\beta_n\}$ は実数列で, $1 \le i \le n$ をみたす任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \alpha_{n,i} \le 1$ がみたされ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \beta_n < 1$, $n \ge i \ge 2$ をみたす任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ が成立し, さらに任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\prod_{j=1}^{k} \alpha_{n,j}} = 0$ がみたされるものとする. $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への可換な非拡大写像とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \ldots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_n = \beta_n x_{n-1} + (1-\beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

で定義される点列とする, このとき, $\{x_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = \inf\left\{ \lim_{n\to\infty} \|x_n - v\| : v \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k) \right\}.$$

をみたす唯一の $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ の点に弱収束する.

Remark 5.2. Theorem 5.1 において, E が「Opial's 条件をみたす」という条件は以下の条件に置き換えてよい: x に弱収束する C の任意の点列 $\{x_n\}$ に対して

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

$y \ne x$ なる任意の $y \in C$ に対して成立する. この条件は C がコンパクトの場合には成立する ([17, 22, 23] 参照).

従って以下の定理を得る. 証明の考え方としては, [3] の考え方を用いるとよい.

Theorem 5.3. C は Banach 空間 E の空でないコンパクト凸部分集合とし, $\{\alpha_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n\}$ と $\{\beta_n\}$ は実数列で, $1 \le i \le n$ をみたす任意の $n, i \in \mathbb{N}$ に対して, $0 < \alpha_{n,i} \le 1$ がみたされ, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $0 < \beta_n < 1$ かつ, $n \ge i \ge 2$ をみたす任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,i} = 0$ が成立し, さらに任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{\prod_{j=1}^k \alpha_{n,j}} = 0$ がみたされるものとする. $T_1, T_2, \ldots$ は C から C への可換な非拡大写像とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, W_n は $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_{n,n}, \alpha_{n,n-1}, \ldots, \alpha_{n,1}$ によって生成される C から C への W-mapping とする. x は C の点とし, $\{x_n\}$ は

$$x_1 = x, \quad x_n = \beta_n x_{n-1} + (1-\beta_n) W_n x_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

で定義される点列とする, このとき, $\{x_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| = \inf\left\{ \lim_{n\to\infty} \|x_n - v\| : v \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k) \right\}.$$

をみたす唯一の $\bigcap_{k=1}^{\infty} F(T_k)$ の点に強収束する.

References

[1] S. Atsushiba, *Strong convergence theorems for finite nonexpansive mappings*, Comm. Appl. Nonlinear Anal. **9** (2002), 57-68.

[2] S. Atsushiba *Strong convergence theorems for a countable family of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, to appear in Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, Japan.

[3] S. Atsushiba, *Weak convergence theorems for a countable family of nfonexpafive Mappings in Banach Spaces which satisfy Opial's condition*, to appear in Proceedings of 2005 Symposium on Applied Functional Analysis Information Sicence and Related Topics, Yokohama Publ., Yokohama, Japan.

[4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems in a Banach space satisfying Opial's condition*, Tokyo J. Math. **21** (1998), 61–81.

[5] S. Atsushiba and W.Takahashi, *Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications*, Indian J. Math. **41** (1999), 435–453.

[6] S. Atsushiba and W.Takahashi, *Strong convergence of Mann's-type iterations for nonexpansive semigroups in general Banach spaces*, Nonlinear Anal. **61** (2005), 881–899.

[7] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonexpansive semigroups in Banach spaces*, Fixed Point Theory and Applications **2005** (2005), 343–354.

[8] D. Van Dulst, *Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. London. Math. Soc. **25** (1982), 139–144.

[9] S. Ishikawa, *Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **59** (1976), 65–71.

[10] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **80** (1979), 493–501.

[11] J. P. Gossez and E. Lami Dozo, *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings*, Pacific. J. Math. **40** (1972), 565–573.

[12] M. Kikkawa and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of an implicit iterative process for A countable family of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect.A **58** (2004), 69-78.

[13] Y. Kimura and W. Takahashi, *Weak convergence to common fixed points of countable nonexpansive mappings and its applications*, J. Korean Math. Soc. **38** (2001), 1275–1284.

[14] J.A. Liu, *Some convergence theorems of implicit iterative process for nonexpansive mappings in Banach spaces*, Math. Commun. **7** (2002), 113–118.

[15] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, (1953) 506–510.

[16] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **75** (1980), 287–292.

[17] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[18] K. Shimoji and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of infinite nonexpansive mappings and applications*, Taiwanese J. Math. **5** (2001), 387–404.

[19] Z.H.Sun, C.He and Y.Q.Ni, *Strong convergence of an implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Nonlinear Funct. Anal. Appl. **8** (2003), 595- 602.

[20] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.

[21] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of a infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Fixed Point Theory and Appl. **2005** (2005), 103–123.

[22] T.Suzuki, *Some remarks on the set of common fixed points of one-parameter semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Bull. Aust. Math. Soc. **69** (2004), 1-18.

[23] T.Suzuki, *Common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces with Opial property*, Nonlinear Anal. **58** (2004), 441-458.

[24] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for families of nonexpansive mappings and their applications*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A **51** (1997), 277–292.

[25] W. Takahashi, Nonlinear functional analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[26] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modelling. **32** (2000), 1463–1471.

[27] H. K. Xu and R.G.Ori, *An implicit iteration process for nonexpansive mappings*, Numer. Funct. Anal. Optim. **22** (2001), 767–773.

[28] Y.Zhou and S.S. Chang, *Convergence of implicit iteration process for a finite family of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. **23** (2002), 911–921.

(S. Atsushiba) Department of Mathematics, Shibaura Institute of Technology, Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-City, Saitama 337-8570, Japan

E-mail address: atusiba@sic.shibaura-it.ac.jp