数理解析研究所講究録
1520巻 2006年 116-131

バナッハ空間における近接点法と非線形写像

高橋 渉
(Wataru TAKAHASHI)
東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻
Department of Mathematical and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8552, Japan

1 はじめに

H を Hilbert 空間とし，C をその空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $x \in H$ に対して

$$\|x-z\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ が一意に存在する．このことはよく知られた事実である．そこで，$x \in H$ に対して，このような元 z を対応させる写像を P_C で表し，P_C を H から C の上への距離射影と呼ぶことにする．この距離射影 P_C は，つぎの重要な性質を持っている．すなわち，$z = P_C x$ であることの必要十分条件は

$$\langle x-z, z-y\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{1}$$

が成り立つことである．(1) の性質を用いると，P_C は非拡大 (nonexpansive) 写像，すなわち

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x-y\|, \quad \forall x, y \in H$$

であることがわかる．Hilbert 空間上での距離射影の概念は Banach 空間の場合にも拡張される．E を回帰的で狭義凸な Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．このとき，任意の $x \in E$ に対して

$$\|x-z\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$$

となるような $z \in C$ は一意に存在するが，$x \in E$ に対して，このような C の元 z を対応させる写像をやはり P_C で表し，P_C を E から C の上への距離射影と呼ぶ．

距離射影の議論とは別に，1976年に Rockafellar[27] は，Hilbert 空間におけるつぎの収束定理を証明した．

定理 1.1 ([27]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x_1 = x \in H$ とし

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

とする．ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

極大単調作用素 A のリゾルベント J_{r_n} を用いて，$A^{-1}0$ の元を求める Rockafellar のこのような手法は近接点法 (proximal point algorithm) と呼ばれ，この後，多くの数学者，応用数学者によってその研究が行われた．Rockafellar の収束定理において，点列 $\{x_n\}$ の収束先は距離射影と大いに関わりを持つ．例えば，上村–高橋 [11] はつぎの定理を証明した．

定理 1.2 ([11]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ かつ

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $Px \in A^{-1}0$ に強収束する．ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

つぎの定理は弱収束タイプの近接点法である．

定理 1.3 ([11]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ を

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．$x_1 = x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で定義する．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．ここで，$u = \lim_{n\to\infty} Px_n$ である．ただし，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

本研究においては，Rockafellar による近接点法をいろいろの角度から Banach 空間で議論する．Banach 空間でのこれらの議論は，Hilbert 空間の場合と違って，空間のノルムの凸性や，微分可能性の複雑さ，相対写像の非線形性などと関連して難解となる．本稿では，Banach 空間における近接点法の研究を極大単調作用素や非拡大作用素などの非線形作用素，及びを Banach 空間のノルムの凸性や微分可能性などの Banach 空間の幾何学 (Geometry of Banach spaces) と関連した形で行う．第 3 章では極大単調作用素のリゾルベントを考え，その収束定理をいくつか証明する．第 4 章では Hilbert 空間での非拡大写像の拡張である疑非拡大写像を定義し，その写像の収束定理を証明する．この定理は，Hilbert 空間での中條–高橋 [21] の定理の拡張定理である．第 5 章では，Hilbert 空間での非拡大写像の拡張であるもう一つ非線形写像（準非拡大写像）を定義し、第 3 章とは違った極大単調作用素のリゾルベントの収束定理を証明する．本稿を読むことによって，Banach 空間の面白さや奥深さ，そして難しさを知ってもらえば幸いである．

2 準備

H を Hilbert 空間とし，C を H の閉凸集合とする．このとき，前節で述べたように任意の $x \in H$ に対して

$$\|x - z\| = \min\{\|x - y\| : \ y \in C\}$$

となるような C の元 z が一意に存在する．任意の $x \in H$ に対して，このような $z \in C$ を対応させる写像を P_C で表し，この写像を H から C 上への距離射影という．距離射影 P_C はつぎの性質をもつ．任意の $x \in H$，$y \in C$ に対して

$$\langle x - P_C x, P_C x - y\rangle \geq 0,$$
$$\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C x\|^2 + \|y - P_C x\|^2$$

が成り立つ．詳しくは [36] を参照せよ．E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または $\langle x, x^*\rangle$ で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．E の凸性の modulus δ は，$0 \leq \epsilon \leq 2$ となる ϵ に対して

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} : \ \|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \ \|x - y\| \geq \epsilon\right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\epsilon > 0$ に対して，$\delta(\epsilon) > 0$ が常に成り立つときをいう．E の元 x に対して，E から E^* への集合値写像 J が

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \ \langle x, x^*\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の相対 (duality) 写像という．$U = \{x \in E : \ \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ に対して，(2) が常に存在するときをいう．このとき，Banach 空間 E は滑らかであるともいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(2) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(2) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．(2) が $x, y \in U$ に対して一様に収束するとき，E のノルムは一様に Fréchet 微分可能であるという．このとき，E は一様に滑らかであるともいう．E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．Banach 空間 E が Opial's condition[23] を満たすとは，$x_n \rightharpoonup x$ かつ $x \neq y$ であるならば

$$\liminf_{n \to \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|$$

となるときをいう.

E をBanach空間とし, $A \subset E \times E$ としよう. A が増大作用素(accretive operator)であるとは, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して, 常に $\langle y_1 - y_2, j \rangle \geq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう. ただし, J は E のduality写像である. $A \subset E \times E$ を増大作用素とする. このとき, $\lambda > 0$ に対して A のリゾルベント(resolvent)と呼ばれる J_λ と吉田近似と呼ばれる A_λ がつぎのように定義される. すなわち

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

増大作用素 A はすべての $r > 0$ に対して $R(I + rA) = E$ であるとき, m-増大作用素といわれる. $A \subset E \times E^*$ とする. A が単調(monotone)であるとは, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle \geq 0$$

が常に成り立つときをいう. 単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大(maximal)であるとは, A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときをいう. すなわち, $B \subset E \times E^*$ が単調で, かつ $A \subset B$ であるならば $A = B$ となるときをいう. つぎの定理はよく知られている[36].

定理 2.1 ([36]). E を回帰的なBanach空間とし, $J: E \to E^*$ をduality写像とする. A を単調作用素とする. このとき, A が極大となるための必要十分条件は, すべての $r > 0$ に対して

$$R(J + rA) = E^*$$

となることである. ただし, $R(J + rA)$ は $J + rA$ の値域を表す.

定理2.1を用いると, Hilbert空間での $m-$ 増大作用素と極大単調作用素は同値であることがわかる. もちろんBanach空間では2つの作用素は違ったものとなる. E をBanach空間とし, C を E の空でない集合とする. このとき, E から C 上への写像 P が サニー(sunny)であるとは, 任意の $x \in E$ と $t \geq 0$ に対して

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

が成り立つことである. 同様に, E から C 上への写像 P が 射影(retraction)であるとは, 任意の $x \in C$ に対して, $Px = x$ が成り立つことである. E が滑らかなBanach空間では, E から C 上への サニー非拡大射影は一意に決まる([35]を参照). E を滑らかなBanach空間とする. E 上の相対写像 J が弱点列的連続(weakly sequentially continuous)であるとは, x_n が x に弱収束するとき, Jx_n が Jx に弱*収束するときをいう.

3 極大単調作用素と収束定理

この節ではBancah空間において極大単調作用素とその収束定理を議論しよう．Eを滑らかで，狭義凸な回帰的Banach空間とする．また，ϕ: $E\times E\to(-\infty,\infty)$を

$$\phi(x,y)=\|x\|^2-2\langle x,Jy\rangle+\|y\|^2,\quad \forall x,y\in E$$

によって定義する．ここでJはEのduality mappingである．CをEの空でない閉凸集合とし，$x\in E$とする．このとき，一意の$x_0\in C$が存在して

$$\phi(x_0,x)=\inf\{\phi(z,x):\ z\in C\}$$

となる．このとき，EからC上への写像Q_Cを$Q_Cx=x_0$によって定義する．このようなQ_Cを準距離射影(generalized projection)と呼ぶ．Hilbert空間では，このQ_Cと距離射影P_Cは一致する．Eを滑らかなBanach空間とし，CをEの空でない閉凸集合とする．また，$x\in E$，$x_0\in C$とする．このとき，つぎの(1)と(2)は同値である．

(1) $\phi(x_0,x)=\min\limits_{y\in C}\phi(y,x)$;

(2) $\langle x_0-y,Jx-Jx_0\rangle\geq 0,\quad \forall y\in C.$

$x\in E$と$r>0$に対して，つぎの方程式を考える．

$$Jz+rAz\ni Jx. \tag{3}$$

定理2.1によって，解zが存在する．また，Banach空間が狭義凸なので，この解は一意である．その解をx_rで表す．$x_r=Q_rx$によって，Q_rを定義し，Q_rをAのリゾルベント(resolvent)という．また，Q_rを$Q_r=(J+rA)^{-1}J$と表すこともある．我々はもう一つのリゾルベントを定義できる．$x\in E$と$r>0$に対して，方程式を考える．

$$J(z-x)+rAz\ni 0. \tag{4}$$

やはり定理2.1によって，解zが存在する．また，Banach空間が狭義凸なので，この解は一意である．その解をx_rで表す．$x_r=J_rx$によって，J_rを定義し，J_rをやはりAのリゾルベント(resolvent)という．また，J_rを$J_r=(I+rJ^{-1}A)^{-1}$と表すこともある．最近，高阪–高橋[14]はBanach空間上の極大単調作用素に対して，つぎの強収束定理を得た．

定理 3.1 ([14]). Eを滑らかで一様凸なBanach空間とし，$A\subset E\times E^*$を極大単調作用素とする．また，$r>0$に対して$Q_r=(J+rA)^{-1}J$とし，点列$\{x_n\}$をつぎのように定義する．

$$x_1=x\in E,$$
$$x_{n+1}=J^{-1}(\alpha_nJ(x)+(1-\alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)),\quad n=1,2,3,\dots.$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ ならば，$\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}x$ に強収束する．ここで，$Q_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への準距離射影 (generalized projection) である．

Banach 空間上の極大単調作用素に対して弱収束定理を得るために，つぎの強収束定理が必要となる．

定理 3.2 ([10]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への準距離射影 (generalized projection) とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in E, \\ x_{n+1} &= J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1-\alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0,\infty)$ である．このとき，$\{Q_{A^{-1}0}(x_n)\}$ は $A^{-1}0$ の点 v に強収束する．さらに，この元 $v \in A^{-1}0$ は

$$\lim_{n\to\infty} \phi(v, x_n) = \min_{y\in A^{-1}0} \lim_{n\to\infty} \phi(y, x_n)$$

を満たす．

定理 3.3 ([10]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その相対写像 J を弱点列的連続 (weakly sequentially continuous) とする．$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．$r > 0$ に対して $Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への準距離射影 (generalized projection) とする．また，$\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in E, \\ x_{n+1} &= J^{-1}(\alpha_n J(x_n) + (1-\alpha_n)J(Q_{r_n}x_n)), \quad n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned}$$

ここで，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．ここで，v は $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である．

定理 3.3 の直接的な結果として，つぎの定理を得る．

定理 3.4 ([10]). E を滑らかで一様凸な Banach 空間とし，その duality mapping J を weakly sequentially continuous とする．$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して，$Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とする．$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ 上への generalized projection とする．$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$x_{n+1} = Q_{r_n}x_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

ここで，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たす．このとき $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．ここで $v = \lim_{n\to\infty} Q_{A^{-1}0}(x_n)$ である．

上村–高橋の定理 (定理 1.2) とは別に，Solodov–Svaiter[29] は Hilbert 空間におけるつぎの強収束定理を得た．

定理 3.5 ([29]). H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．$x \in H$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_1 = x \in H, \\ 0 = v_n + \dfrac{1}{r_n}(y_n - x_n), \ v_n \in Ay_n, \\ H_n = \{z \in H : \langle z - y_n, v_n \rangle \leq 0\}, \\ W_n = \{z \in H : \langle z - x_n, x_1 - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x_1, \ n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}x_1$ に強収束する．ここで，$P_{A^{-1}0}$ は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

大沢–高橋 [22] は第 3 節の (4) で定義された極大単調作用素 A のリゾルベント J_r を用いて，Solodov–Svaiter[29] の拡張定理を得た．

定理 3.6 ([22]). E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_1 \in E, \\ y_n = J_{r_n} x_n, \\ H_n = \{z \in E : \langle y_n - z, J(x_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_n - z, J(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{H_n \cap W_n} x_1, \ n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする．このとき，$\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}x_1$ に強収束する．ここで，$P_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

この節の最後に，大沢–高橋 [22] とは異なる Solodov–Svaiter の拡張定理を述べる．上村–高橋 [13] は第 3 節の (3) で定義されたリゾルベントを用いてつぎの強収束定理を得た．

定理 3.7 ([13]). E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．$r > 0$ に対して，$Q_r = (J + rA)^{-1}J$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_1 \in E, \\ y_n = Q_{r_n} x_n, \\ H_n = \{z \in E : \langle z - y_n, Jx_n - Jy_n \rangle \leq 0\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle z - x_n, Jx_1 - Jx_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{H_n \cap W_n} x_1, \ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすとする．このとき，$\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0} x_1$ に強収束する．ここで，$Q_{A^{-1}0}$ は E から $A^{-1}0$ の上への準距離射影 (generalized projection) である．

4 疑非拡大作用素と収束定理

2003 年，中條–高橋 [21] は Hilbert 空間における非拡大写像に対するつぎの強収束定理を示した．

定理 4.1 ([21]). C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする．T を C から C への $F(T) \neq \emptyset$ となる非拡大写像とし，$P_{F(T)}$ を H から $F(T)$ の上への距離射影とする．また，C の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S x_n, \\ C_n = \{z \in C : \|z - y_n\| \leq \|z - x_n\|\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x, n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ は $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たし，$P_{C_n \cap Q_n}$ は H から $C_n \cap Q_n$ の上への距離射影である．このとき，$\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ に強収束する．

この定理を Banach 空間でこのままの形で証明することは難しい．C が閉凸集合になってくれないからである．そこで，松下–高橋 [19] は Banach 空間での Hilbert 空間での非拡大写像を拡張するつぎの非線形写像を考えた．C を Banach 空間 E の閉凸集合とし，T を C から C への写像とする．このとき，$F(T)$ によって T の不動点集合を表す．C の点 p が T の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) であるとは，C の点列 $\{x_n\}$ で，$\{x_n\}$ が p に弱収束し，かつ $\lim_{n\to\infty}(x_n - Tx_n) = 0$ となるものが存在するときをいう．T の漸近的不動点集合は $\hat{F}(T)$ で表される．C か

ら C への写像 T が疑非拡大 (relatively nonexpansive) であるとは，$\hat{F}(T) = F(T)$ かつ

$$\phi(p, Tx) \leq \phi(p, x), \quad \forall x \in C,\ \forall p \in F(T)$$

が成り立つときをいう．松下–高橋 [19] はこの非線形写像を用いて，中條–高橋 [21] の定理を Banach 空間につぎの形で拡張した．

定理 4.2 ([19]). E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす疑非拡大写像とし，$\{\alpha_n\}$ を $0 \leq \alpha_n < 1$ と $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たす実数の列とする．点列 $\{x_n\}$ はつぎのようであるとする．

$$\begin{cases} x_1 = x \in C, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JTx_n), \\ H_n = \{z \in C : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{H_n\cap W_n}x,\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし，J は E の相対写像である．$Q_{F(T)}$ を C から $F(T)$ の上への準距離射影とするとき，$\{x_n\}$ は $Q_{F(T)}x$ に強収束する．

定理 4.2 を用いて，中條–高橋 [21] の定理をつぎのように証明することが出来る．中條–高橋の定理を証明するためには，T が非拡大写像であるとき，T が疑非拡大写像であることをいえばよい．$F(T) \subset \hat{F}(T)$ は明らかである．$u \in \hat{F}(T)$ ならば，このとき，点列 $\{x_n\} \subset C$ で $x_n \rightharpoonup u$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ を満たすものがある．T は非拡大なので，T は demiclosed である．そこで，$u = Tu$ となる．これは $F(T) = \hat{F}(T)$ を意味する．さらに，Hilbert 空間 H では，$x, y \in H$ に対して

$$\phi(x, y) = \|x - y\|^2$$

が成り立つ．そこで，$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ と $\phi(Tx, Ty) \leq \phi(x, y)$ は同値である．だから，T は疑非拡大写像である．よって，定理 4.2 から，中條–高橋の定理を得る．

定理 4.2 を用いると，Banach 空間における極大単調作用素に対するつぎのような強収束定理を得ることもできる．

定理 4.3 ([19]). E 一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，A を E から E^* への極大単調作用素とする．Q_r を $r > 0$ に対する A のリゾルベントとし，$\{\alpha_n\}$ は $0 \leq \alpha_n < 1$ と $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$ を満たす実数の列とする．点列 $\{x_n\}$ は以下のようであるとする．

$$\begin{cases} x_1 = x \in E, \\ y_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JQ_r x_n), \\ H_n = \{z \in E : \phi(z, y_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ W_n = \{z \in E : \langle x_n - z, Jx - Jx_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = Q_{H_n\cap W_n}x,\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

ただし，J は E の相対写像 とする．もし $A^{-1}0$ が空でないとし，$Q_{A^{-1}0}$ を E から $A^{-1}0$ の上への準距離射影とするならば，点列 $\{x_n\}$ は $Q_{A^{-1}0}x$ に強収束する．

つぎに，Banach 空間における極大単調作用素に対する弱収束定理を得る．この定理は Browder–Petryshyn[4] の定理とも関係している．それを述べる前に，つぎの定理を述べておく．

定理 4.4 ([19])**.** E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす疑非拡大写像とする．$\{\alpha_n\}$ を $0 \leq \alpha_n \leq 1$ を満たす実数列とする．$x_1 \in C$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 1, 2, \ldots$ に対してつぎのように定義する．

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1 - \alpha_n) J T x_n).$$

このとき，$\{Q_{F(T)} x_n\}$ は T の不動点に弱収束する．ただし，$Q_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への準距離射影である．

これを用いて，つぎの弱収束定理を得る．

定理 4.5 ([19])**.** E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，C を E の空でない閉凸集合とする．また，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす疑非拡大写像とする．$\{\alpha_n\}$ を実数列で

$$0 \leq \alpha_n \leq 1, \quad \liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1 - \alpha_n) > 0$$

を満たすものとする．$x_1 \in C$ とし，$\{x_n\}$ を $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$x_{n+1} = Q_C J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1 - \alpha_n) J T x_n)$$

で定義する．もし J が弱点列的連続ならば，$\{x_n\}$ は u に弱収束する．ただし，$u = \lim_{n\to\infty} Q_{F(T)} x_n$ であり，$Q_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への準距離射影である．

定理 4.5 を用いて，Browder–Petryshyn[4] の定理を証明することが出来る．

定理 4.6 ([4])**.** C を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とし，T を C から C への $F(T) \neq \phi$ を満たす非拡大写像とする．λ を実数で，$0 < \lambda < 1$ を満たすとする．$x_1 \in C$ とし，点列 $\{x_n\}$ を $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda x_n + (1 - \lambda) T x_n$$

で定義する．このとき，$\{x_n\}$ は u に弱収束する．ただし，$u = \lim_{n\to\infty} P_{F(T)} x_n$ であり，$P_{F(T)}$ は C から $F(T)$ の上への距離射影である．

5 準非拡大写像と収束定理

E を滑らかな Banach 空間とし，D を E の空でない閉凸集合とする．このとき，写像 $R : D \to D$ が準非拡大 (generalized nonexpansive) であるとは，$F(R) \neq \emptyset$ であり，かつ

$$\phi(Rx, y) \leq \phi(x, y), \quad \forall x \in D,\ \forall y \in F(R)$$

がつねに成り立つことと定義する．この写像に関してつぎの定理がいえる．

定理 5.1 ([8]). E を滑らかで狭義凸な Banach 空間とし，C を空でない集合とする．また，R_C を E から C の上への射影とする．このとき，R_C がサニーかつ準非拡大になる必要十分条件は

$$\langle x - R_C x, J(R_C x) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in E,\ \forall y \in C$$

となることである．ただし，J は E から E への相対写像である．

E が滑らかで狭義凸な Banach 空間とし，C を空でない集合とする．このとき，E から C の上へのサニー準非拡大射影は一意に決まる．実際，R, S を E から C の上へのサニー準非拡大射影とする．このとき，定理 5.1 より，$x \in E$ とすると

$$\langle x - Rx, J(Rx) - J(y)\rangle \geq 0,\ \langle x - Sx, J(Sx) - J(y)\rangle \geq 0,\ \forall y \in C$$

が成り立つ．$Rx, Sx \in C$ であることから

$$\langle x - Rx, J(Rx) - J(Sx)\rangle \geq 0,\ \langle x - Sx, J(Sx) - J(Rx)\rangle \geq 0$$

が成り立つ．この 2 つの不等式から

$$\langle Sx - Rx, J(Rx) - J(Sx)\rangle \geq 0$$

が得られる．E が狭義凸であることから $Sx = Rx$ である．また，この計算から分かるように，つぎの不等式を満たす $z \in E$ は一意である．

$$\langle x - z, J(z) - J(y)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

そこで，滑らかで狭義凸な Banach 空間の場合に，E から C の上へのサニー準非拡大射影を R_C で表すことにする．

E を滑らかで，回帰的な狭義凸 Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を極大単調作用素とする．このとき

$$R(J^{-1} + \lambda B) = E, \quad \forall \lambda > 0$$

である．よって，$x \in E$ に対して，$x^* \in E^*$ が存在して，$x \in J^{-1}x^* + \lambda Bx^*$ となる．E は滑らか，かつ回帰的で狭義凸なので，ある $z \in E$ が存在して，$x^* = J(z)$ となる．だから，$x \in E$ に対して

$$x \in J^{-1}J(z) + \lambda BJ(z) = z + \lambda BJ(z) \subset R(I + \lambda BJ)$$

である．そこで，$\lambda > 0$ と $x \in E$ に対して，R_λ を

$$R_\lambda x := \{z \in E : x \in z + \lambda BJ(z)\}$$

である定義しよう．すると，$D(R_\lambda) = E$ であり，かつ任意の $x \in E$ に対して，$R_\lambda x$ は一点からなる．実際，$D(R_\lambda) = E$ であることは、$E \subset R(I + \lambda BJ)$ より $E = D(R_\lambda)$ であることがわかる．$R_\lambda x$ が一点であることは，$z_1 + \lambda w_1 = x$, $z_2 + \lambda w_2 = x$, $w_1 \in BJ(z_1)$, $w_2 \in BJ(z_2)$ とすると，B が単調であることから

$$\langle w_1 - w_2, J(z_1) - J(z_2)\rangle \geq 0$$

を得る．よって

$$\left\langle \frac{x - z_1}{\lambda} - \frac{x - z_2}{\lambda}, J(z_1) - J(z_2)\right\rangle \geq 0$$

を得る．そこで

$$\langle (x - z_1) - (x - z_2), J(z_1) - J(z_2)\rangle \geq 0$$

となり

$$\langle z_2 - z_1, J(z_1) - J(z_2)\rangle \geq 0$$

を得る．E は狭義凸なので，$z_1 = z_2$ を得る．よって，$R_\lambda x$ は一点からなる．R_λ の定義域と値域は $D(R_\lambda) = R(I + \lambda BJ)$ であり、$R(R_\lambda) = D(BJ)$ であることもよい．ただし，I は恒等作用素である．R_λ は B のリゾルベントと呼ばれ

$$R_\lambda = (I + \lambda BJ)^{-1}$$

で表される．つぎに R_λ と $(BJ)^{-1}0$ の性質について述べておこう．

定理 5.2 ([8]). E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ回帰的な狭義凸 Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とする．このとき， つぎが成り立つ．

(1) 任意の $\lambda > 0$ に対して，$D(R_\lambda) = E$ である;

(2) 任意の $\lambda > 0$ に対して，$(BJ)^{-1}0 = F(R_\lambda)$ である．ただし， $F(R_\lambda)$ は R_λ の不動点集合である;

(3) $(BJ)^{-1}0$ は閉集合である;

(4) 任意の $\lambda > 0$ に対して，R_λ は準非拡大になる．

さらに，[8] の中でつぎの定理も証明された．

定理 5.3 ([8]). E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸 Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とする．このとき， つぎが成り立つ．

(1) 任意の $x \in E$ に対して，$\lim_{r\to\infty} R_r x$ が存在し，その極限は $(BJ)^{-1}0$ に属する;

(2) $x \in E$ に対して，$Rx := \lim_{r\to\infty} R_r x$ と置くならば，R は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である．

これらの結果を用いて，Hilbert 空間での上村–高橋の定理 (定理 1.2, 定理 1.3) の Banach 空間への拡張であるつぎの弱収束定理，及び強収束定理が得られる．

定理 5.4 ([9]). E を一様凸で，一様に滑らかな Banach 空間とし，その相対写像 J が弱点列的連続 (weakly sequentially continuous) であるとする． $B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して，$R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする．$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) R_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $(BJ)^{-1}0$ の点に弱収束する．

定理 5.5 ([9]). E を一様凸で，一様に滑らかな Banach 空間とし，$B \subset E^* \times E$ を $B^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とし，$r > 0$ に対して，$R_r = (I + rBJ)^{-1}$ とする．$x_1 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) R_{r_n} x_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $R_{(BJ)^{-1}0}(x)$ に強収束する．ここで，$R_{(BJ)^{-1}0}$ は E から $(BJ)^{-1}0$ の上へのサニー準非拡大射影である．

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projections in Banach spaces: Properties and applications*, in Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type (A. G. Kartsatos Ed.), Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 15–20.

[2] H. Brèzis, Opérateurs maximaux monotones, Mathematics Studies No. 5, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1041–1044.

[4] F. E. Browder and W. V. Petryshym, *Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **20** (1967), 197–228.

[5] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics **485**, Springer, Berlin, 1975.

[6] O. Güler,*On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[7] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, to appear.

[9] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for new resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces*, to appear.

[10] S. Kamimura, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[11] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, J. Approx. Theory **106** (2000), 226–240.

[12] S. Kamimura and W. Takahashi, *Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach apace*, SIAM. J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[14] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. **2004** (2004), 239-249.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, Weak and strong convergence theorems for minimax problems in Banach spaces, in "Nonlinear Analysis and Convex

Analysis" (W. Takahashi and T. Tanaka, Eds.), Yokohama Publishers, pp. 203–216, 2004.

[16] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[17] B. Martinet, *Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives*, Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, 1970, pp. 154–159.

[18] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2004** (2004), 37-47.

[19] S. Matsushita and W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory, **134** (2005), 257–266.

[20] J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilberien*, Bull. Soc. Math., France **93** (1965), 273–299.

[21] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372-378.

[22] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvento of maximal monotone operator*, Arch. Math. **81** (2003), 439–445.

[23] Z. Opial, *Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 591–597.

[24] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[25] R. T. Rockafellar *Characterization of the subdifferentials of convex functions*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[26] R. T. Rockafellar *On the maximality of sums of nonlinear monotone operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 75–88.

[27] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm*, SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877–898.

[28] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *A hybrid projection – proximal point algorithm*, J. Convex Anal. **6** (1999), 59–70.

[29] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[30] W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications*, in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, pp. 241-260.

[31] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and their applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.

[32] W. Takahashi, *Fixed point theorems and proximal point algorithms*, in Nonlinear Analysis and Convex Analysis (W. Takahashi and T. Tanaka, Eds.), Yokohama Publishers, 2003, pp. 471–481.

[33] W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for nonlinear operators of accretive and monotone type and applications*, in Nonlinear Analysis and Applications (R. P. Agarwal and D. O'Regan, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 891-912.

[34] W. Takahashi, *Convergence theorems for nonlinear projections in Banach spaces*, RIMS Kokyuroku 1396, 2004, pp. 49–59.

[35] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[36] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[37] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2005 (Japanese).

[38] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. **58** (1992), 486–491.