数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 132-141

あるHARDY 空間の間の補間定理について

日本大学・経済学部　松岡 勝男 (KATSUO MATSUOKA)
COLLEGE OF ECONOMICS OF NIHON UNIVERSITY

1. Introduction

1958年に, E. M. Stein [St$_1$] は, the three lines theorem の extension を用いて, 次の the M. Riesz - G. O. Thorin convexity theorem の一般化を証明した (cf. [Sa] and [SW]).

以下において, $S=\{z\in\mathbb{C}:0\leq\operatorname{Re}z\leq 1\}$, $S_0=\{z\in\mathbb{C}:0<\operatorname{Re}z<1\}$ とする.

Theorem 1. $1\leq p_0,p_1,q_0,q_1\leq\infty$, S_X, S_Y はそれぞれ measure space (X,μ), (Y,ν) 上の simple functions の subspace とし, $f\in S_X$ を measurable function on (Y,ν) に transform する family of linear operators $\{T_z\}$ $(z\in S)$ は analytic, i.e. $f\in S_X$ と $g\in S_Y$ に対して,

$$z\mapsto\int_Y(T_zf)g\,d\nu$$

が analytic in S_0, continuous in S, また admissible, i.e. $f\in S_X$ と $g\in S_Y$ に対して,

$$\exists A,\exists a<\pi\text{ such that }\log\left|\int_Y(T_zf)g\,d\nu\right|\leq Ae^{a|\operatorname{Im}z|}\quad(z\in S)$$

とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{q_0}\leq A_0(t)\|f\|_{p_0}\quad(f\in S_X,-\infty<t<\infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{q_1}\leq A_1(t)\|f\|_{p_1}\quad(f\in S_X,-\infty<t<\infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j=0,1)$ は f と独立であり,

$$\exists b<\pi\text{ such that }\sup_{-\infty<t<\infty}e^{-b|t|}\log A_j(t)<\infty\quad(j=0,1).$$

このとき, $\forall\theta$ with $0\leq\theta\leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_q\leq A_\theta\|f\|_p\quad(f\in S_X).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$.

Lemma 2 (The extension of the three lines theorem). 関数 $\Phi(z)$ は analytic in S_0, continuous in S であり,

$$\exists a<\pi\text{ such that }\sup_{z=\theta+it\in S}e^{-a|t|}\log|\Phi(z)|<\infty.$$

このとき, $\forall\theta$ with $0<\theta<1$ に対して,

$$\log|\Phi(\theta)|\leq\frac{1}{2}\sin\pi\theta\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log|\Phi(it)|}{\cosh\pi t-\cos\pi\theta}+\frac{\log|\Phi(1+it)|}{\cosh\pi t+\cos\pi\theta}\right\}dt.$$

また, 1972 年に, C. Fefferman and E. M. Stein [FS] は Hardy 空間 $H^p(\mathbb{R}^n)$ に関して, $(\cdot,\cdot)_{[\theta]}$ $(0<\theta<1)$ で示される複素補間空間 (see [BL]) についての次の結果を示した.

Theorem 3. $1<p_1<\infty$, $0\le\theta\le 1$ のとき,

$$\left(H^1(\mathbb{R}^n), L^{p_1}(\mathbb{R}^n)\right)_{[\theta]} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=1-\theta+\dfrac{\theta}{p_1}$. また, $1<p_0<\infty$, $0\le\theta\le 1$ のとき,

$$(L^{p_0}(\mathbb{R}^n), BMO)_{[\theta]} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}$.

この Theorem 3 の corollary として, 次の $H^1(\mathbb{R}^n)$ と $L^p(\mathbb{R}^n)$ の間の補間定理および $L^p(\mathbb{R}^n)$ と BMO の間の補間定理が得られる (see [FS] and [St_2]).

Corollary 4. $\{T_z\}$ $(z\in S)$ は family of bounded linear operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ であり, analytic, i.e. $f,g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$z\mapsto \int_{\mathbb{R}^n}(T_z f)(x)g(x)dx$$

が analytic in S_0, continuous in S, また operator norm $\|T_z\|$ $(z\in S)$ は uniformly bounded とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{L^1}\le A\|f\|_{H^1}\quad (f\in L^2\cap H^1(\mathbb{R}^n),\ -\infty<t<\infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{L^2}\le A\|f\|_{L^2}\quad (f\in L^2(\mathbb{R}^n),\ -\infty<t<\infty).$$

このとき, $\forall\theta$ with $0<\theta\le 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{L^p}\le A_\theta\|f\|_{L^p}\quad (f\in L^2\cap L^p(\mathbb{R}^n)).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=1-\theta+\dfrac{\theta}{2}$ であり, A_θ は A と θ だけに depend.

Corollary 5. $\{T_z\}$ $(z\in S)$ は analytic family of bounded linear operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ であり, operator norm $\|T_z\|$ $(z\in S)$ は uniformly bounded とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{L^2}\le A\|f\|_{L^2}\quad (f\in L^2(\mathbb{R}^n),\ -\infty<t<\infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{BMO}\le A\|f\|_{L^\infty}\quad (f\in L^2\cap L^\infty(\mathbb{R}^n),\ -\infty<t<\infty).$$

このとき, $\forall\theta$ with $0\le\theta<1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{L^p}\le A_\theta\|f\|_{L^p}\quad (f\in L^2\cap L^p(\mathbb{R}^n)).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{2}$ であり, A_θ は A と θ だけに depend.

本講演の目的は, Corollary 5 の analog の Theorem 1 version を用いて, Corollary 4 の analog の Theorem 1 version を示すことである.

2. Preliminaries

最初に, non-homogeneous Herz 空間 $K_q^{\alpha,p}$ (see [HY] and [H]) の特別な場合である, Beurling algebra A^p と 関数空間 B^p の定義を述べる (see [B], [CL], [F] and [G]).

$k \in \mathbb{Z}$ に対して, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 2^k\}$ とし, $k \in \mathbb{N}$ に対して, $C_k = B_k \backslash B_{k-1}$ とする. また, χ_{C_k} を C_k の characteristic function として, $\chi_k = \chi_{C_k}$ if $k \in \mathbb{N}$, そして $\chi_0 = \chi_{B_0}$ とする.

Definition 6. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$ のとき,

$$K_q^{\alpha,p} = \left\{ f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_q^p \right\}^{1/p} < \infty \right\};$$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < q \le \infty$ のとき,

$$K_q^{\alpha,\infty} = \left\{ f \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,\infty}} = \sup_{k \ge 0} 2^{k\alpha} \|f\chi_k\|_q < \infty \right\}.$$

Definition 7. $1 < p < \infty$ のとき,

$$A^p = K_p^{n(1-1/p),1} = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kn/p'} \|f\chi_k\|_p < \infty \right\}.$$

ただし, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

$$B^p = K_p^{-n/p,\infty} = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{k \ge 0} 2^{-kn/p} \|f\chi_k\|_p < \infty \right\}.$$

次の定義は, A^p 空間と B^p 空間の同値なもう一つの定義である (see [CL] and [G]).

Definition 8. $1 < p < \infty$ とするとき,

$$A^p = \left\{ f : \|f\|_{A^p} = \inf_{\omega \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)^{-(p-1)} dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ただし, Ω は positive, radial, $|x|$ に関して nonincreasing, そして

$$\omega(0) + \int_{\mathbb{R}^n} \omega(x) dx = 1$$

である $\mathbb{R}^n$ 上の関数 ω の class である;

$$B^p = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^p} = \sup_{R \ge 1} \left(\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

ここで (および 以下において), $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ は 中心 0, 半径 $R>0$ の open ball を表すとする.

次に, non-homogeneous Herz-type Hardy 空間 $HK_q^{\alpha,p}$ の特別な場合である HA^p と関数空間 CMO^p の定義を述べる (see [CL], [G] and [LY]).

Definition 9. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \le \infty$, $0 < q < \infty$ とし, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ with $\operatorname{supp}\phi \subset B_0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \ne 0$, $\phi_t(x) = \frac{1}{t^n}\phi(\frac{x}{t})$ $(t>0)$ とする. このとき, non-homogeneous Herz-type Hardy 空間 $HK_q^{\alpha,p}$ associated to $K_q^{\alpha,p}$ を

$$HK_q^{\alpha,p} = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \phi^*(f) \in K_q^{\alpha,p} \right\}$$

で定義する. ただし, $S'(\mathbb{R}^n)$ は tempered distributions on $\mathbb{R}^n$ の class であり,

$$\phi^*(f)(x) = \sup_{t>0} |(f * \phi_t)(x)|.$$

また, norm $\|\cdot\|_{HK_q^{\alpha,p}}$ を

$$\|f\|_{HK_q^{\alpha,p}} = \|\phi^*(f)\|_{K_q^{\alpha,p}}$$

で定義する.

Definition 10. $1 < p < \infty$ のとき,

$$HA^p = HK_p^{n(1-1/p),1} = \left\{ f \in A^p : f^+ \in A^p \right\}.$$

ただし, f^+ は f の Poisson 積分の vertical maximal 関数, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$f^+(x) = \sup_{t>0} \left| c_n \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \frac{t}{(t^2+|y|^2)^{(n+1)/2}} dy \right|, \quad c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{(n+1)/2}},$$

である. また,

$$\|f\|_{HA^p} = \|f^+\|_{A^p}.$$

Definition 11. $1 < p < \infty$ のとき, $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ が central mean oscillation of order p の関数の class , CMO^p, に属するとは,

$$\|f\|_{CMO^p} = \sup_{R \ge 1} \left(\frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} |f(x) - m_R(f)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

を満たすことである. ただし,

$$m_R(f) = \frac{1}{|B(0,R)|} \int_{B(0,R)} f(x)dx$$

である.

このとき, $1 < p < \infty$ に対して,

$$CMO^p \supset B^p$$

であり, $1 < p_1 < p_2 < \infty$ に対して,

$$L^1 \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \supset A^{p_1} \supset A^{p_2},$$
$$B^{p_1} \supset B^{p_2} \supset L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$H^1 \cap A^{p_1} \supset HA^{p_1} \supset HA^{p_2}$$

そして

$$CMO^{p_1} \supset CMO^{p_2} \supset BMO$$

である.

さらに, 次の duality theorem が成り立つ (see [CL], [G] and [HY]).

Theorem 12. $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, where $p' = \infty$ if $0 < p \le 1$, のとき,

$$\left(K_q^{\alpha,p}\right)^* = K_{q'}^{-\alpha,p'}.$$

Corollary 13. $1 < p, p' < \infty$ with $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ のとき,

$$(A^p)^* = B^{p'}.$$

Theorem 14. $1 < p, p' < \infty$ with $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ のとき,

$$(HA^p)^* = CMO^{p'}.$$

また, sharp 関数 $f^\sharp$ に関して, sharp maximal theorem の analog が成り立つ.

Definition 15. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ を open ball として,

$$f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(y)dy$$

とするとき, sharp 関数 $f^\sharp$ を

$$f^\sharp(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y) - f_B| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する.

Theorem 16 ([K]). $1 < p < \infty$ のとき,

$$f \in CMO^p \Longrightarrow f^\sharp \in B^p$$

であり,

$$\|f^\sharp\|_{B^p} \le C_p \|f\|_{CMO^p}.$$

Theorem 17 ([K] and [M$_2$]). $1 < p < \infty$ のとき, some $1 < p_0 < p$ に対して, $f \in L^{p_0}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ならば,

$$f^\sharp \in B^p \Longrightarrow f \in CMO^p$$

であり,

$$\|f\|_{CMO^p} \le C_p \|f^\sharp\|_{B^p}.$$

3. Interpolation of analytic families of operators

最初に, Theorem 16, Theorem 17 そして Lemma 2 を用いて, C. Fefferman and E. M. Stein の $L^p(\mathbb{R}^n)$ と BMO の間の補間定理 (Corollary 5) の analog の Theorem 1 version が示される (cf. [M$_1$] and [M$_3$]).

Theorem 18. $1 < p_0 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z \in S)$ は family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, analytic, i.e. $f \in B^{p_0}$, $g \in HA^{p_0'}$ where $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0{}'} = 1$ に対して,

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx$$

が analytic in S_0, continuous in S, また admissible, i.e. $f \in B^{p_0}$, $g \in HA^{p_0'}$ where $\dfrac{1}{p_0} + \dfrac{1}{p_0{}'} = 1$ に対して,

$$\exists a < \pi \text{ such that } \sup_{z \in S} e^{-a|\mathrm{Im} z|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx \right| < \infty$$

とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{B^{p_0}} \le A_0(t) \|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0},\ -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{BMO} \le A_1(t) \|f\|_{L^\infty} \quad (f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$ は f と独立であり,

$$(*) \qquad \exists b < \pi \text{ such that } \sup_{-\infty < t < \infty} e^{-b|t|} \log A_j(t) < \infty \quad (j = 0, 1).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \le A_\theta \|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$, p_0 と θ に depend.

Remark. Theorem 18 において,

$$A_\theta = C_{p_0,\theta} \exp \left[\frac{1}{2} \sin \pi\theta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\log A_0(t)}{\cosh \pi t - \cos \pi\theta} + \frac{\log A_1(t)}{\cosh \pi t + \cos \pi\theta} \right\} dt \right].$$

ただし, $0 < \theta < 1$.

また, Theorem 18 と同様にして, 次の 3 つの補間定理が得られる.

Theorem 19. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z \in S)$ は analytic family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{B^{p_0}} \leq A_0(t)\|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0},\ -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{CMO^{p_1}} \leq A_1(t)\|f\|_{B^{p_1}} \quad (f \in B^{p_1},\ -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$ は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall\theta$ with $0 < \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta\|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$, p_j $(j = 0, 1)$ と θ に depend.

Theorem 20. $1 < p_0 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z \in S)$ は analytic family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{CMO^{p_0}} \leq A_0(t)\|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0},\ -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{BMO} \leq A_1(t)\|f\|_{L^\infty} \quad (f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$ は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall\theta$ with $0 \leq \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta\|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$, p_0 と θ に depend.

Theorem 21. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z \in S)$ は analytic family of bounded linear operators from B^{p_0} to CMO^{p_0} であり, また admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{CMO^{p_0}} \leq A_0(t)\|f\|_{B^{p_0}} \quad (f \in B^{p_0},\ -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{CMO^{p_1}} \leq A_1(t)\|f\|_{B^{p_1}} \quad (f \in B^{p_1},\ -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$ は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall\theta$ with $0 \leq \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{CMO^p} \leq A_\theta\|f\|_{B^p} \quad (f \in B^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$, p_j $(j = 0, 1)$ と θ に depend.

最後に, 本講演の目的である, C. Fefferman and E. M. Stein の $H^1(\mathbb{R}^n)$ と $L^p(\mathbb{R}^n)$ の間の補間定理 (Corollary 4) の analog の Theorem 1 version を, Theorem 18 を用いて示す.

Theorem 22. $1 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z \in S)$ は family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, analytic, i.e. $f \in HA^{p_1}$, $g \in B^{p_1'}$ where $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_1'} = 1$ に対して,

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx$$

が analytic in S_0, continuous in S, また admissible, i.e. $f \in HA^{p_1}$, $g \in B^{p_1'}$ where $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_1'} = 1$ に対して,

$$\exists a < \pi \text{ such that } \sup_{z \in S} e^{-a|\mathrm{Im} z|} \log \left| \int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) g(x) dx \right| < \infty$$

とする. そして,

$$\|T_{it} f\|_{L^1} \le A_0(t) \|f\|_{H^1} \quad (f \in H^1,\ -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it} f\|_{A^{p_1}} \le A_1(t) \|f\|_{A^{p_1}} \quad (f \in A^{p_1},\ -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$ は f と独立であり,

(*) $$\exists b < \pi \text{ such that } \sup_{-\infty < t < \infty} e^{-b|t|} \log A_j(t) < \infty \quad (j = 0, 1).$$

このとき, $\forall \theta$ with $0 < \theta < 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \le A_\theta \|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = 1 - \theta + \dfrac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$, p_1 と θ に depend.

Proof. Corollary 4 の証明に similar (see [FS]).

$\forall z \in S$ に対して, S_z を $T_{\bar{z}}$ の adjoint とすると,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_z f)(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{(S_{\bar{z}} g)(x)} dx \quad (f \in HA^{p_1}, g \in B^{p_1'}).$$

このとき, $\{S_z\}$ $(z \in S)$ は analytic family of bounded linear operators from $B^{p_1'}$ to $CMO^{p_1'}$ であり, admissible. その上, $g \in B^{p_1'}$ where $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_1'} = 1$ のとき,

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (S_{1+it} g)(x) dx$$

は bounded linear functional on A^{p_1} であり, A^{p_1} - $B^{p_1'}$ duality により, $S_{1+it} g \in B^{p_1'}$ となり,

$$\|S_{1+it} g\|_{B^{p_1'}} \le A_1(t) \|g\|_{B^{p_1'}}.$$

また, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ のとき,

$$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (S_{it} g)(x) dx$$

は bounded linear functional on H^1 であり, H^1 - BMO duality により, $S_{it} g \in BMO$ となり,

$$\|S_{it} g\|_{BMO} \le A_0(t) \|g\|_{L^\infty}.$$

よって, Theorem 18 を用いると, $\forall\theta'$ with $0<\theta'<1$ に対して, $\dfrac{1}{p'}=\dfrac{1-\theta'}{{p_1}'}$ として,

$$\|S_{\theta'}g\|_{CMO^{p'}} \le A_{\theta'}\|g\|_{B^{p'}} \quad (g\in B^{p'}).$$

故に, $\theta=1-\theta'$ とおくと, $\forall\theta$ with $0<\theta<1$ に対して, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, i.e. $\dfrac{1}{p}=1-\theta+\dfrac{\theta}{p_1}$ として,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \le A_\theta\|f\|_{HA^p} \quad (f\in HA^p).$$

□

Remark. Theorem 22 において,

$$A_\theta = C_{p_1,\theta}\exp\left[\frac{1}{2}\sin\pi(1-\theta)\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\log A_1(t)}{\cosh\pi t-\cos\pi(1-\theta)}+\frac{\log A_0(t)}{\cosh\pi t+\cos\pi(1-\theta)}\right\}dt\right].$$

ただし, $0<\theta<1$.

さらに, Theorem 22 の証明と同様にして, Theorem 19 ～ Theorem 21 をそれぞれ用いると, 次の 3 つの補間定理を得ることができる.

Theorem 23. $1<p_0<p_1<\infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z\in S)$ は analytic family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{A^{p_0}} \le A_0(t)\|f\|_{HA^{p_0}} \quad (f\in HA^{p_0},\ -\infty<t<\infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{A^{p_1}} \le A_1(t)\|f\|_{A^{p_1}} \quad (f\in A^{p_1},\ -\infty<t<\infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j=0,1)$ は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall\theta$ with $0\le\theta<1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \le A_\theta\|f\|_{HA^p} \quad (f\in HA^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$, p_j $(j=0,1)$ と θ に depend.

Theorem 24. $1<p_1<\infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z\in S)$ は analytic family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{L^1} \le A_0(t)\|f\|_{H^1} \quad (f\in H^1,\ -\infty<t<\infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{A^{p_1}} \le A_1(t)\|f\|_{HA^{p_1}} \quad (f\in HA^{p_1},\ -\infty<t<\infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j=0,1)$ は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall\theta$ with $0<\theta\le 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \le A_\theta\|f\|_{HA^p} \quad (f\in HA^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p}=1-\theta+\dfrac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t)$ $(j=0,1)$, p_1 と θ に depend.

Theorem 25. $1 < p_0 < p_1 < \infty$ とし, $\{T_z\}$ $(z \in S)$ は analytic family of bounded linear operators from HA^{p_1} to A^{p_1} であり, admissible とする. そして,

$$\|T_{it}f\|_{A^{p_0}} \leq A\|f\|_{HA^{p_0}} \quad (f \in HA^{p_0},\ -\infty < t < \infty)$$

であり,

$$\|T_{1+it}f\|_{A^{p_1}} \leq A\|f\|_{HA^{p_1}} \quad (f \in HA^{p_1},\ -\infty < t < \infty).$$

ここで, $A_j(t)$ $(j = 0, 1)$ は f と独立であり, $(*)$ を満たす. このとき, $\forall\theta$ with $0 \leq \theta \leq 1$ に対して,

$$\|T_\theta f\|_{A^p} \leq A_\theta\|f\|_{HA^p} \quad (f \in HA^p).$$

ただし, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$ であり, A_θ は $A_j(t), p_j$ $(j = 0, 1)$ と θ に depend.

References

[BL] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[B] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 1–32.

[CL] Y. Chen and K. Lau, Some new classes of Hardy spaces, J. Func. Anal., **84** (1989), 255–278.

[FS] C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math., **129** (1972), 137–193.

[F] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space, Proceedings, Conference at Cortona 1984, Sympos. Math., **29** (1987), 267–301.

[G] J. Garcia-Cuerva, Hardy spaces and Beurling algebras, J. London Math. Soc. (2), **39** (1989), 499–513.

[HY] E. Hernández and D. Yang, Interpolation of Herz spaces and applications, Math. Nachr., **205** (1999), 69–87.

[H] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech., **18** (1968), 283–324.

[K] Y. Komori, Notes on interpolation theorem between B^p and BMO, Scientiae Mathematicae Japonicae, **60** (2004), 107–111.

[LY] S. Lu and D. Yang, Some new Hardy spaces associated with the Herz spaces and their wavelet characterizations (in Chinese), J. of Beijing Normal Univ. (Natur. Sci.), **29** (1993), 10–19.

[M1] K. Matsuoka, Interpolation theorem between B_0^p and BMO, Scientiae Mathematicae Japonicae, **53** (2001), 547–554.

[M2] K. Matsuoka, Remark on the sharp function on Banach spaces B^p, Research Bulletin of Nihon Daigaku Keizaigaku Kenkyukai, **47** (2004), 47–51.

[M3] K. Matsuoka, Interpolation theorems related to CMO^p spaces, to appear.

[Sa] C. Sadosky, *Interpolation of Operators and Singular Integrals*, Marcel Dekker, New York, 1979.

[St1] E. M. Stein, Interpolation of linear operators, Trans. Amer. Math. Soc., **83** (1956), 482–492.

[St2] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[SW] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.