数理解析研究所講究録
1520 巻 2006 年 31-43

Banach 空間上の m-増大作用素のリゾルベントに関する強収束・弱収束定理

家本　繁 (Shigeru Iemoto), 高橋　渉 (Wataru Takahashi)
東京工業大学大学院 数理・計算科学専攻
(Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology)

1　はじめに

H を実 Hilbert 空間とし, $g, g_1, g_2, \ldots, g_m : H \to \boldsymbol{R}$ を連続な凸関数とする. また,

$$C = \{x \in H : g_i(x) \leq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)\}$$

とする. このとき,

$$g(u) = \min_{x \in C} g(x)$$

を満たす点 $u \in C$ を求める問題を凸計画問題という. C が空でないとし,

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \in C) \\ \infty & (x \notin C) \end{cases}$$

とすると, $f : H \to (-\infty, \infty]$ は下半連続な真凸関数となる. このとき $x \in H$ に対して,

$$\partial f(x) = \{z \in H : f(x) + \langle y - x, z \rangle \leq f(y) \ ({}^\forall y \in H)\}$$

を対応させる H から H への集合値写像 ∂f を f の劣微分という. また, 点 $u \in H$ が凸計画問題の解であることと, $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$ とは同値である. この ∂f は単調作用素であることが知られている. すなわち, 任意の $(x, y), (s, t) \in \partial f$ に対して $\langle x - s, y - t \rangle \geq 0$ が成り立つ. さらに Rockafellar [25] は, ∂f が極大単調作用素であることを証明した. 単調作用素 ∂f が極大であるとは ∂f のグラフを真に含むような単調作用素が存在しないときをいう. このとき, $f(u) = \min_{x \in H} f(x)$ であることと, $0 \in \partial f(u)$ とは同値である. よって凸計画問題は, 極大単調作用素 $A \subset H \times H$ に対して,

$$0 \in Au$$

を満たす点 $u \in H$ を求める問題に一般化される.

$A \subset H \times H$ を極大単調作用素とし, $\lambda > 0$ とする. このとき任意の $x \in H$ に対して,

$$J_\lambda(x) = \{z \in H : x \in z + \lambda Az\}$$

とすると, J_λ は H から H への一価写像になることが知られている (cf. 高橋 [29, 30]). これを A のリゾルベントという. さらに J_λ は, 非拡大写像であることが知られている. すなわち任意の $x, y \in H$ に対して,

$$\|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つ. また $0 \in Au$ であることと, $u = J_\lambda u$ とは同値である. よって Hilbert 空間では, 極大単調作用素の解を求める問題を非拡大写像の不動点を求める問題として捉えることもできる.

このように極大単調作用素 $A \subset H \times H$ に対し, $0 \in Au$ を満たす $u \in H$ を求める方法は, 様々な分野で応用例があるので, これまでに多くの研究者によってその研究がなされてきた.

この問題を解く近似法としてよく知られているものに, Rockafellar [26] によって考案された近接点法 (Proximal Point Algorithm) がある. この近似法では初期点 $x_0 = x \in H$ をとり, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

により構成する. ただし $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ であり, すべての $\lambda_n > 0$ に対して $J_{\lambda_n} = (I + \lambda_n A)^{-1}$ とする. 1976 年に Rockafellar [26] は, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0$ でかつ $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば, (1) によって構成される点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある要素に弱収束することを証明した.

その後, Brézis - Lions [1], Lions [13], Passty [16], Güler [4], Solodov - Svaiter [28] 等によって, Hilbert 空間における近接点法に関して多くの研究がなされてきた.

特に 2000 年に上村–高橋 [8] によって以下のような二つの拡張された近接点法が考案された. すなわち初期点 $x_0 = x \in H$ をとり, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2}$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n} x_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

により構成する. ただし $x_0 = x \in H$ であり, $\{\alpha_n\}$ は $[0, 1]$ の点列である. また $\{\lambda_n\}$ は $(0, \infty)$ の点列である. このとき (2) によって構成される点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある要素に強収束し, (3) によって構成される点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある要素に弱収束することが証明されている.

また同年に上村–高橋 [9] はこの結果を Hilbert 空間から Banach 空間へ拡張することができることを証明した. Hilbert 空間においては, $A \subset H \times H$ が単調作用素である

ことと増大作用素であることは同値であるが, Banach 空間ではこれらの作用素は異なる概念である. 実際 E を Banach 空間とするとき, $A \subset E \times E$ が増大作用素であるとは, 任意の $(x,y),(s,t) \in A$ に対し, ある $j \in J(x-s)$ が存在して, $\langle y-t, j \rangle \geq 0$ が成り立つことであり, $B \subset E \times E^*$ が単調作用素であることは, 任意の $(x,x^*),(y,y^*) \in B$ に対し, $\langle x-y, x^*-y^* \rangle \geq 0$ が成り立つことである. ここで J は E から E^* への双対写像である.

本研究では, この上村–高橋 [8, 9] の近接点法を動機付けとして以下のような新しい点列の構成法を考えた. すなわち初期点 $x_0 = x \in E$ をとり, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + \beta_n x_n + \gamma_n J_{\lambda_n} x_n + e_n, \; n = 0,1,2,\cdots \tag{4}$$

により構成する. ただし $\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ とし, $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\}$ を $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ を満たす $[0,1]$ の点列, $\{e_n\}$ を E 上の点列とする. そして, この構成法によって作られた点列が, Hilbert 空間と Banach 空間のそれぞれにおいて, $A^{-1}0$ の元に強収束, 弱収束することが示せたので, それらについて報告する.

第2節では第3節以降で必要となる様々な条件を準備する. 第3節では Hilbert 空間上の極大単調作用素のリゾルベントに対する強収束, 弱収束定理についてまとめ, 第4節では Banach 空間上の m-増大作用素のリゾルベントに対する強収束, 弱収束定理についてまとめる. 最後の第5節では前節で紹介した定理を凸最小化問題に応用する.

2 準備

非負の整数全体の集合を $\boldsymbol{N}$, 実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す. H を実 Hilbert 空間とし, E を実 Banach 空間とする. また E の双対写像 J は, 任意の $x \in E$ に対して,

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる E から E^* への集合値写像である. $J(0) = \{0\}$ であることは明らかである. また Hahn-Banach の定理により, 任意の $x \in E$ に対して $J(x) \neq \emptyset$ である. 特に, $E = H$ ならば, J は恒等写像 I となる. 集合値写像 $A \subset E \times E$ が増大作用素であるとは, 任意の $(x,y),(s,t) \in A$ に対し, ある $j \in J(x-s)$ が存在して, $\langle y-t, j \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう. また増大作用素が m-増大作用素であるとは, $A \subset E \times E$ が増大作用素であり, かつ

$$R(I + \lambda A) = E, \quad {}^{\forall}\lambda > 0$$

が成り立つときをいう. ただし $D(A) = \{x \in E : Ax \neq \emptyset\}$ で A の定義域を表し, $R(A) = \bigcup\{Ax : x \in D(A)\}$ で A の値域を表すこととする. また $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とし, $\lambda > 0$ とする. このとき任意の $x \in E$ に対して,

$$J_\lambda(x) = \{z \in E : x \in z + \lambda Az\}$$

とすると, J_λ は E から E への一価写像になることが知られている. これを A のリゾルベントという. つまり $J_\lambda = (I+\lambda A)^{-1}$ である. また, $0 \in Au$ であることと $u = J_\lambda u$ とは同値である. さらに A の吉田近似は $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$ で定義される. このとき任意の $x \in E$ に対して, $(J_\lambda x, A_\lambda x) \in A$ となる.

関数 $f : E \to (-\infty, \infty]$ が真であるとは, $f(a) \in \boldsymbol{R}$ を満たす点 $a \in E$ が存在することをいう. また f が下半連続であるとは, 任意の $r \in \boldsymbol{R}$ に対して $\{x \in E : f(x) \leq r\}$ が E の閉集合になることをいう. さらに f が凸関数であるとは, すべての $x, y \in E$ と $\alpha \in (0,1)$ に対して,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

が成り立つことをいう.

$f : E \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. このときに $x \in E$ 対して,

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle y - x, x^* \rangle \leq f(y),\ ^\forall y \in E\}$$

を対応させる E から E^* への集合値写像 ∂f を f の劣微分という.

E を Banach 空間とし, $\varepsilon \in [0,2]$ とする. このとき,

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

で定義される $[0,2]$ から $[0,1]$ への関数 δ は空間 E の凸性の modulus という. また E が一様凸であるとは, E の元からなる点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して,

$$\|x_n\| = \|y_n\| = 1,\ \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$$

ならば $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ が成り立つことをいう. E が一様凸であることと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta(\varepsilon) > 0$ が成り立つことは同値である. さらに E が一様凸のとき, $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\|x\| \leq r,\ \|y\| \leq r,\ \|x-y\| \geq \varepsilon > 0$$

ならば

$$\frac{\|x+y\|}{2} \leq r\left\{1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)\right\},\ \delta\left(\frac{\varepsilon}{r}\right) > 0$$

である. また, 一様凸な Banach 空間は回帰的である. 詳しくは, [29] を参照せよ.

次に Banach 空間のノルムの微分可能性についてまとめる. $S(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする. このとき, $x, y \in S(E)$ に対して, 次の極限を考える.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \quad \cdots (*)$$

Banach 空間 E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは, $S(E)$ の任意の元 x, y に対して, つねに $(*)$ が存在するときをいう. このとき, 空間 E は滑らかであるともいう.

E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは, 任意の $y \in S(E)$ に対して, (*) が $x \in S(E)$ に関して一様に収束するときをいう. Banach 空間 E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは, 任意の $x \in S(E)$ に対して, (*) が $y \in S(E)$ に関して一様に収束するときをいう. Banach 空間 E のノルムが一様に Fréchet 微分可能であるとは, (*) が $S(E)$ の元 x, y に関して一様に収束するときをいう. このとき空間 E は, 一様に滑らかであるともいう. E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能ならば, 双対写像 J は一価写像で, E の有界集合上で一様連続である. ただし E の位相はノルム位相であり, E^* の位相は弱 * 位相である.

C を Banach 空間 E の閉部分集合とし, $T : C \to C$ を非拡大写像とする. このとき T のすべての不動点の集合を $F(T)$ で表す. C が正規構造をもつとは, 2 点以上からなる C の有界閉凸集合 D に対して, 点 $z \in D$ が存在し,

$$\sup_{y \in D} \|z - y\| < \sup_{x,y \in D} \|x - y\| = \delta(D)$$

となることである. 一様凸な Banach 空間の閉凸集合および Banach 空間のコンパクト凸集合は正規構造をもつことが知られている.

C が非拡大写像に対して不動点性をもつとは, C 上で作用するどんな非拡大写像もつねに不動点をもつときをいう. Hilbert 空間では, C が非拡大写像に対して不動点性をもつための必要十分条件は C が有界となることである. また一様凸な Banach 空間上のすべての有界閉凸集合は非拡大写像に対して不動点性をもつ.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とし, D を C の部分集合とする. このとき C から D の上への写像 P が sunny であるとは, $x \in C$ と $t \geq 0$ に対して $Px + t(x - Px) \in C$ ならば

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

がつねに成り立つときをいう. また C から D の上への写像 P が射影であるとは, 任意の $x \in C$ に対して $P^2 x = Px$ が成り立つときをいう. D が C の sunny 非拡大 retract であるとは, C から D の上への sunny 非拡大射影が存在するときをいう.

次の補助定理は, sunny 非拡大射影の一つの特徴付けである [29].

補助定理 2.1. *C を滑らかな Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. P を E から C の上への射影とする. このとき, P が sunny 非拡大であることと, 任意の $x \in E$ と $y \in C$ に対して,*

$$\langle x - Px, J(y - Px) \rangle \leq 0$$

が成り立つことは同値である. ただし J は E から E^* への双対写像である.

3 Hilbert 空間における極大単調作用素に対する強収束・弱収束定理

この節では, Hilbert 空間における極大単調作用素に対する強収束・弱収束定理を紹介する.

第 1 節でも紹介したが, 1976 年に Rockafellar [26] は, 次の弱収束定理を証明した.

定理 3.1 (Rockafellar [26]). *H を Hilbert 空間とし, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. $x_0 = x \in H$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を*

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n, \quad n \in N$$

で構成する. ただし $\{\lambda_n\} \subset (0, \infty)$ は, $\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0$ を満たすものとする. このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する.

その後, Brézis - Lions [1], Lions [13], Passty [16], Güler [4], Solodov - Svaiter [28] 等によって, Hilbert 空間における近接点法に関して多くの研究がなされてきた. 特に上村- 高橋 [8] は次の弱収束定理と強収束定理を証明した.

定理 3.2 (上村-高橋 [8]). *H を Hilbert 空間とし, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. $x_0 = x \in H$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を*

$$y_n \approx J_{\lambda_n} x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n, \quad n \in N$$

で構成する. ただし $\|y_n - J_{\lambda_n} x_n\| \leq \delta_n$, $n \in N$ であり, $\{\alpha_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0,\infty), \{\delta_n\} \subset [0,\infty)$ は

$$\liminf_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < \infty$$

を満たすとする. このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する. また $v = \lim_{n\to\infty} Px_n$ である. ただし P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である.

この定理は Rockafellar [26] の拡張となっている. すなわち $\alpha_n \equiv 0$ としたとき, Theorem 3.1 を得る.

定理 3.3 (上村-高橋 [8]). *H を Hilbert 空間とし, $A \subset H \times H$ を極大単調作用素とする. $x_0 = x \in H$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を*

$$y_n \approx J_{\lambda_n} x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n, \quad n \in N$$

で構成する．ただし $\|y_n - J_{\lambda_n}x_n\| \le \delta_n,\ n \in N$ であり，$\{\alpha_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0,\infty), \{\delta_n\} \subset [0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,\ \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n < \infty$$

を満たすとする．このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで $Px = u$ とおくと，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

そして家本–高橋はこれらの結果をより拡張した形で証明している．

定理 3.4 (家本–高橋 [6])．H を *Hilbert* 空間とし，$A \subset H \times H$ を $A^{-1}0 \neq \emptyset$ となる極大単調作用素とする．$x_0 = x \in H$ とし，点列 $\{x_n\}$ を

$$y_n \approx J_{\lambda_n}x_n,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x + \beta_n x_n + \gamma_n y_n, \quad n \in N$$

で構成する．ただし $\|y_n - J_{\lambda_n}x_n\| \le \delta_n,\ n \in N$ であり，$\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0,\infty), \{\delta_n\} \subset [0,\infty)$ は $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty$ を満たすものとする．このとき以下の (1), (2) が成り立つ．さらに

(1) $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ が，

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで $Px = u$ とおくと，P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

(2) $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1]$ が，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty,\ \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1,\ \liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0.$$

を満たすとする．このとき，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に弱収束する．また $v = \lim_{n\to\infty} Px_n$ である．ただし P は H から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

この定理は点列 $\{x_n\}$ の収束性を $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ の値が発散するか否かで制御することができることを意味している．これらの定理は，上村–高橋 [8] の結果を含む形での拡張となっている．

4 Banach 空間における m-増大作用素に対する強収束・弱収束定理

この節では, Banach 空間における m-増大作用素に対する強収束・弱収束定理を紹介する.

上村–高橋 [9] は, m-増大作用素に対して定理 3.2 と定理 3.3 をそれぞれ次のように Banach 空間に拡張した.

定理 4.1 (上村–高橋 [9]). E を一様凸な *Banach* 空間とし, E のノルムが *Fréchet* 微分可能であるか E が *Opial* 条件を満たすとする. また $A \subset E \times E$ を *m*-増大作用素とする. $x_0 = x \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N$$

で構成する. ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0,\infty), \{e_n\} \subset E$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすものとする. このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する.

定理 4.2 (上村–高橋 [9]). E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムをもつ回帰的な *Banach* 空間とし, E に含まれる任意の有界閉凸集合が非拡大写像に対して不動点性をもつものとする. また $A \subset E \times E$ を *m*-増大作用素とする. $x_0 = x \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N$$

で構成する. ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0,\infty), \{e_n\} \subset E$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすものとする. このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に強収束する. ここで $Px = v$ とおくと, P は E から $A^{-1}0$ の上への *sunny* 非拡大射影である.

これらの結果を拡張したものが本研究の主結果である.

定理 4.3. E を一様凸な *Banach* 空間とし, E のノルムが *Fréchet* 微分可能であるか E が *Opial* 条件を満たすとする. また $A \subset E \times E$ を *m*-増大作用素とする. $x_0 = x \in E$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + \beta_n x_n + \gamma_n J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N$$

で構成する．ただし $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\} \subset [0,1],\{\lambda_n\} \subset (0,\infty),\{e_n\} \subset E$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1,\ \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1,\ \liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

定理 4.4. E を一様 *Gâteaux* 微分可能なノルムをもつ回帰的な *Banach* 空間とし，E に含まれる任意の有界閉凸集合が非拡大写像に対して不動点性をもつものとする．また $A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする．$x_0 = x \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x + \beta_n x_n + \gamma_n J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N$$

で構成する．ただし $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\} \subset [0,1],\{\lambda_n\} \subset (0,\infty),\{e_n\} \subset E$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,\ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に強収束する．ここで $Px = v$ とおくと，P は E から $A^{-1}0$ の上への *sunny* 非拡大射影である．

また別の条件を課すことによって次の結果も得た．

定理 4.5. E を回帰的な *Banach* 空間とし，E のノルムが一様 *Gâteaux* 微分可能であるとする．また E は正規構造をもち，$A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする．$x, u \in E$ とし，点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_0 = x \in E \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N \end{cases}$$

で構成する．ただし $\{\alpha_n\},\{\beta_n\},\{\gamma_n\} \subset [0,1],\{\lambda_n\} \subset (0,\infty),\{e_n\} \subset E$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \alpha_{n-1}| < \infty,\ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n - \beta_{n-1}| < \infty,$$
$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n - \lambda_{n-1}| < \infty,\ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすとする．このとき $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 v に強収束する．

一様凸な Banach 空間ならば回帰的であり，正規構造をもつ．よって，この定理は一様凸な Banach 空間においても成り立つ．

5 応用

この節では, Theorem 4.3, Theorem 4.4 を用いて Hilbert 空間における制約なしの凸最小化問題への応用を考える.

定理 5.1. H を *Hilbert* 空間とし, $f : H \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. $x_0 = x \in H$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を

$$y_n \approx \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda_n} \|z - x_n\|^2 \right\} = J_{\lambda_n} x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n x_n + \gamma_n J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N$$

で構成する. ただし $\|y_n - J_{\lambda_n} x_n\| \le \delta_n$ とし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0, \infty), \{e_n\} \subset E$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1, \ \liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすものとする. このとき $(\partial f)^{-1}0 \ne \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 u に弱収束する. また $u = \lim_{n\to\infty} P x_n$ である. ただし P は H から $(\partial f)^{-1}0$ の上への距離射影である.

定理 5.2. H を *Hilbert* 空間とし, $f : H \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数とする. $x_0 = x \in H$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を

$$y_n \approx \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda_n} \|z - x_n\|^2 \right\} = J_{\lambda_n} x_n$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x + \beta_n x_n + \gamma_n J_{\lambda_n} x_n + e_n, \quad n \in N$$

で構成する. ただし $\|y_n - J_{\lambda_n} x_n\| \le \delta_n$ とし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \subset [0,1], \{\lambda_n\} \subset (0, \infty), \{e_n\} \subset E$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \ \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$$

を満たすものとする. このとき $(\partial f)^{-1}0 \ne \emptyset$ ならば, 点列 $\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 v に強収束する. ここで $Px = v$ とおくと, P は H から $(\partial f)^{-1}0$ の上への距離射影である.

参考文献

[1] H. Brézis and P. L. Lions, *"Produits infinis de resolvants"*, Israel J. Math. **29** (1978), 329–345.

[2] R. E. Bruck, *"A strongly convergent iterative solution of* $0 \in U(x)$ *for a maximal mmonotone operator U in Hilbert space"*, J. Math. Anal. Appl. **48** (1974), 114–126.

[3] R. E. Bruck and G. B. Passty, *"Almost convergence of the infinite product of resolvents in Banach spaces"*, Nonlinear Anal. **3** (1979), 279–282.

[4] O. Güler, *"On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization"*, SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403–419.

[5] B. Halpern, *"Fixed points of nonexpansive maps"*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[6] S. Iemoto and W. Takahashi, *"Strong and Weak Convergence Theorems for Resolvents of Maximal Monotone Operators in Hilbert Spaces"*, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, 2004.

[7] J. S. Jung and W. Takahashi, *"Dual convergence theorems for the infinite products of resolvents in Banach spaces"*, Kodai Math. J. **14** (1991), 358–364.

[8] S. Kamimura and W. Takahashi, *"Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces"*, J. Approx. Theory, **106** (2000), 226–240.

[9] S. Kamimura and W. Takahashi, *"Weak and Strong Convergence of Solutions to Accretive Operator Inclusions and Applications"*, Set-Valued Anal. **8** (2000), 361–374.

[10] T. H. Kim and H. K. Xu, *"Strong convergence of modified Mann iterations"*, Nonlinear Anal., **61** (2005), 51–60.

[11] Y. Kimura, W. Takahashi and M. Toyoda, *"Convergence to common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings"*, Arch. Math., **84** (2005), 350–363.

[12] F. Kohsaka and W. Takahashi, *"Strong Convergence of an Iterative Sequence for Maximal Monotone Operators in a Banach Space"*, Abstr. Appl. Anal., **3** (2004), 239–249.

[13] P. L. Lions, *"Une méthode itérative de résolution d'une inéquation variationnelle"*, Israel J. Math., **31** (1978), 204–208.

[14] W. R. Mann, *"Mean value methods in iteration"*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[15] O. Nevanlinna and S. Reich, *"Strong convergence of contraction semigroups and of iterative methods for accretive operators in Banach spaces"*, Israel J. Math. **32** (1979), 44–58.

[16] G. B. Passty, *"Ergodic convergence to a zero of the sum of monotone operators in Hilbert space"*, J. Math. Anal. Appl. **72** (1979), 383–390.

[17] A. Pazy, *"Remarks on nonlinear ergodic theory in Hilbert space"*, Nonlinear Anal. **6** (1979), 863–871.

[18] S. Reich, *"On infinite products of resolvents"*, Atti Acad. Naz. Lincei **63** (1977), 338–340.

[19] S. Reich, *"An iterative producedure for constructiong zeros of accretive sets in Banach spaces"*, Nonlinear Anal. **2** (1978), 85–92.

[20] S. Reich, *"Construction zeros of accretive operators"*, Appl. Anal. **8** (1979), 349–352.

[21] S. Reich, *"Construction zeros of accretive operators II"*, Appl. Anal. **9** (1979), 159–163.

[22] S. Reich, *"Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274–276.

[23] S. Reich, *"Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces"*, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287–292.

[24] R. T. Rockafellar, *"Characterizationn of the subdifferentials of convex functions"*, Pacific J. Math. **17** (1966), 497–510.

[25] R. T. Rockafellar, *"On the maximal monotonicity of subdefferential mappings"*, Pacific J. Math., **33** (1970), 209–216.

[26] R. T. Rockafellar, *"Monotone operators and the proximal point algorithm"*, SIAM J. Control Optim., **14** (1976), 877–898.

[27] N. Shioji and W. Takahashi, *"Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 3641–3645.

[28] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space"*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[29] W. Takahashi, *"Nonlinear Functional Analysis"*, Yokohama Publishers, 2000.

[30] W. Takahashi, *"Introduction to Nonlinear & Convex Analysis (Japanese)"* Yokohama Publishers, 2005.

[31] W. Takahashi and G. E. Kim, *"Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces"*, Math. Japon. **48** (1998), 1–9.

[32] W. Takahashi and Y. Ueda, *"On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators"*, J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546–553.

[33] K. K. Tan and H. K. Xu, *"Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the ishikawa iteration process"*, J. Math. Anal. Appl., **178** (1993), 301–308.

[34] R. Wittmann, *"Approximation of fixed points of nonexpansive mappings"*, Arch. Math. **58** (1992), 486–491.

[35] H. K. Xu, *"An iterative algorithms for nonlinear operators"*, J. Optimiz. Theory Appl., **116** (2003), 659–678.