数理解析研究所講究録
1521 巻 2006 年 99-107

$\mathbb{Q}$-モチーフについて

広島大学大学院理学研究科　山内　卓也[1] (Takuya Yamauchi),
Department of Mathematics, Hiroshima University

1 序文

代数体上の楕円曲線 E は自身とそのすべてのガロア共役が $\overline{\mathbb{Q}}$ 上同種であるとき $\mathbb{Q}$-曲線と呼ばれる. K. Ribet は [15] において $\mathbb{Q}$-曲線の基本的性質を解明し、そしてすべての $\mathbb{Q}$-曲線はモジュラーであることを予想した. 実際、Serre 予想を仮定すればその主張は正しい. 本稿の目的は $\mathbb{Q}$-曲線の概念をモチーフに拡張し、その基本的性質を調べることである.

アーベル多様体への一般化は既に E. Pyle [14] により実行されていることを注意しておく.

2 $\mathbb{Q}$-曲線

この節では $\mathbb{Q}$-曲線の定義、及び知られている事実を簡単に復習する. 以下、アーベル多様体 A, B に対してそれらが体 K 上同種であるとき、$A \overset{K}{\sim} B$ と書くことにする.

定義 2.1([15]). E/K を代数体 K 上の楕円曲線とする. このとき E が $\mathbb{Q}$-曲線であるとは次を満たすときを言う: 任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して、${}^{\sigma}E \overset{\overline{\mathbb{Q}}}{\sim} E$.

E が虚数乗法を持つ場合は本質的には B. Gross の定義である [9]. さらに、この場合は志村の結果により E はモジュラーであることがわかっているのでモジュラー性問題に関しては虚数乗法を持たない場合が重要である.

代数体上のアーベル多様体に対して、それが (Ribet の意味で) モジュラーであるとはどういうことかを明確にしておく.

定義 2.2([15]). A/K を代数体 K 上のアーベル多様体とする. A がモジュラーであるとは、A に対してあるレベル N が定まり、A はモジュラー曲線 $X_1(N)$ のヤコビ多様体 $J_1(N)$ の $\overline{\mathbb{Q}}$-因子と同種になっているときを言う.

Ribet は一連の研究の後に、次を予想した.

予想 2.3([15]). すべての $\mathbb{Q}$-曲線は (定義 2.2 の意味で) モジュラーであろう.

実際、Ribet は予想を支持する次の定理を証明している.

---

[1]著者は日本学術振興会から援助を受けております.

定理 2.4([15]).

(1) すべての $\mathbb{Q}$-曲線はある GL_2 型のアーベル多様体の $\overline{\mathbb{Q}}$-因子と同種. ここで、
GL_2 型のアーベル多様体 A とは $\mathbb{Q}$ 上定義されたアーベル多様体で $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ 上の次数が $\dim(A)$ となる代数体の構造をもつものである.

(2) Serre 予想を仮定すれば、すべての GL_2 型のアーベル多様体 A はモジュラーである. 即ち、ある保型形式 $f\in S_2(\Gamma_1(N))$ が存在して $A \overset{\mathbb{Q}}{\sim} A_f$. ここで、$A_f$ は f に付随する志村のアーベル多様体.

(3) GL_2 型のアーベル多様体の一次元 $\overline{\mathbb{Q}}$-単純因子は $\mathbb{Q}$-曲線である.

定理 2.4 の (1) と (2) から Serre 予想を仮定すれば予想 2.3 が従う.

志村の結果と定理 2.4 から次の三つの対象が (完全な一対一の対応ではないが) 結びつくことになる.

(A) $\mathbb{Q}$-曲線.

(B) GL_2 型のアーベル多様体の一次元 $\overline{\mathbb{Q}}$-単純因子.

(C) 重さ 2 の保型形式.

3 $\mathbb{Q}$-モチーフと GL_2 型のモチーフ

この節では本題にある $\mathbb{Q}$-モチーフの定義とそれに付随して出てくる GL_2 型のモチーフの定義を与える. その精神は Ribet の結果 [15] に基づく.

以下、単にモチーフと言えば絶対ホッジサイクルを用いて定義された圏 $\mathcal{M}_{\mathrm{AHC}}$(cf. [3], [13]) の対象を意味する. さらに、絶対ホッジサイクルは代数的サイクルであると仮定する (この仮定はホッジ予想から従う). このとき代数体上のモチーフ M に対して、K を含む体 L 上定義された M の自己準同型達の成す環 $\mathrm{End}_L(M)$ が定義され、特に $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(M)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbb{Q}$ は半単純環である.

先ず、$\mathbb{Q}$-モチーフの定義を述べる.

定義 3.1. $\mathbb{Q}$-モチーフを代数体上定義されたモチーフ N で次の性質を満たすものとして定義する:

(1) N のホッジタイプは次の形 $(p,q)+(q,p),\ p>q$.

(2) $\mathfrak{X} := \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbb{Q}$ は総実代数体 F 上中心的な単純環でそのシューア指数 $t := \sqrt{\dim_F(\mathfrak{X})}$ は 1 又は 2、さらに $2t[F:\mathbb{Q}] = \mathrm{rank}(N)$ を満たす.

(3) 各 $\sigma\in \mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ に対して、ある非自明な同種 (擬同型) $\mu_\sigma : {}^{\sigma}N \longrightarrow N$ が存在し、すべての $\phi\in\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbb{Q}$ に対して、$\mu_\sigma\circ{}^{\sigma}\phi = \phi\circ\mu_\sigma$ を満たす.

続いて、GL_2 型のモチーフの定義を述べる.

定義 3.2. GL_2 型のモチーフとは $\mathbb{Q}$ 上定義されたモチーフ M で次を満たすものとして定義する:

(1) M はホッジタイプ $(p,q)+(q,p),\ p>q$ 　を持つ.

(2) $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は次数 $\frac{1}{2}\mathrm{rank}(M)$ の代数体の構造を持つ.

上の定義 3.2 の (1) より、$\mathrm{rank}(N)$ は偶数になる. また、$\mathrm{rank}(M)$ はベッチ実現、エタール実現、又はホッジ実現のいずれかの次元で定義する.

Scholl のモチーフ M_f ([16]) は $\mathcal{M}_{\mathrm{AHC}}$ の中で再構成されており ([10])、M_f は GL_2 型のモチーフとなっている. 従って、Grothendieck モチーフの圏 ではなく、圏 $\mathcal{M}_{\mathrm{AHC}}$ の上で考えることはそれなりに意味があると思われる.

最後に、モチーフに対する虚数乗法を次のように定義する.

定義 3.3. 代数体 K 上のモチーフ M が $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ が次数 $\mathrm{rank}(M)$ の代数体の構造をもつとき M は虚数乗法を持つという.

モチーフに対する虚数乗法は本来ならモチーフの $\mathbb{Q}$-ホッジ構造から定まるホッジ群を用いて定義するべきである. しかし、本稿及び [22] では天下りな定義を採用した. ホッジ予想を仮定すれば定義 3.3 はモチーフのホッジ群がアーベルであることと同値である.

$\mathbb{Q}$-モチーフは定義から自動的に虚数乗法を持たないことを注意しておく.

4 主定理

$\mathbb{Q}$-曲線に対する Ribet の結果の類似が $\mathbb{Q}$-モチーフに対しても成立する.

以下、

(*) すべての絶対ホッジサイクルは代数的サイクル

を仮定する.

定理 4.1.

(1) すべての $\mathbb{Q}$-モチーフはある GL_2 型のモチーフの $\overline{\mathbb{Q}}$-因子と同種.

(2) Serre 予想と有限体及び代数体上の Tate 予想を仮定すれば、すべての GL_2 型のモチーフ M はモジュラーである. 即ち、ある重さ k の保型形式 $f\in S_k(\Gamma_1(N))$ が存在して $M \overset{\mathbb{Q}}{\sim} M_f$. ここで、$M_f$ は f に付随する Scholl のモジュラーモチーフ.

(3) 虚数乗法を持たない GL_2 型のモチーフの $\overline{\mathbb{Q}}$-単純因子は $\mathbb{Q}$-モチーフである.

定理 4.1 の (1) と (2) から Serre 予想と有限体及び代数体上の Tate 予想を仮定すればすべての $\mathbb{Q}$-モチーフはモジュラーであることがわかる. ここで、代数体上のモチーフ N がモジュラーであるとは N が $W_1(N):=W_N^{\Gamma_1^N}$ の $\overline{\mathbb{Q}}$-因子と同種になっているときを言う ($W_1(N)$ に関しては [2] の p.9 を見よ).

定理 4.1 から次の三つの対象が (完全な一対一の対応ではないが) 結びつくことになる.

(A) $\mathbb{Q}$-モチーフ.

(B) 虚数乗法を持たない GL_2 型のモチーフの $\overline{\mathbb{Q}}$-単純因子.

(C) 重さが 2 以上の保型形式.

4.1 主定理の証明

以下では定理 4.1 の証明を概観する.

先ず、定理 4.1-(2) を証明する.

M を GL_2 型のモチーフとし、$E := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とおく. l を素数とし、l の上にある E の (有限) 素点を λ とする. このとき、M に付随する λ-進表現が以下の合成射として定義される:

$$\rho_\lambda : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_{E\otimes\mathbb{Q}_l}(H_{et}(M)) \simeq \prod_{\lambda | l} \mathrm{GL}_2(E_\lambda) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(E_\lambda).$$

また、定数 $B = B(M)$ を任意の素数 $l \geq B$ に対して $H_{et}(M, \mathbb{Z}_l)$ が自由 $\mathbb{Z}_l$ 加群となるようにとる.

一方、同種写像による取り換えにより $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M)$ は E の整数環 $\mathcal{O}_E$ として良い. このとき、$l \geq B$ と $\lambda | l$ に対して、M に付随する法 λ-表現が以下の合成射として定義される:

$$\overline{\rho_\lambda} : \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathcal{O}_E\otimes\mathbb{Z}_l}(H_{et}(M, \mathbb{Z}_l)) \simeq \prod_{\lambda | l} \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{E_\lambda}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_\lambda),\ \mathbb{F}_\lambda = \mathcal{O}_{E_\lambda}/\lambda\mathcal{O}_{E_\lambda}.$$

このとき、$\overline{\rho_\lambda}$ は奇な表現となる. さらに、M のホッジ型を $(p,q)+(q,p)$, $p > q$ とするとき、十分大きなノルムをもつ λ に対して $\overline{\rho_\lambda}$ の重さは $k_\lambda = p - q + 1$ となり、レベルは λ を動かすとき有界である (レベルと重さに関しては [17] を見よ). モチーフの重さを一つとめて考えるとき、λ のノルムが十分大きくとれば、Fontaine-Laffaille 理論 [6] と p 進ホッジ理論 ([4], [21]) から重さが決定できる.

M に対して、集合 Λ を次の条件を満たす E の有限素点 λ の集まりとして定める:

(0) λ の下にある有理素数 l は $l \geq B = B(M)$ を満たす.

(1) 上記 (0) の λ に対して、$\overline{\rho_\lambda}$ は絶対既約.

(2) λ は奇 (i.e. $\lambda \not| 2$) かつ E において完全分解する.

(3) λ は M の (Artin) 導手と E の判別式を割らない.

(4) λ の下にある有理素数 l に対して $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ は半単純加群.

5 節の Tate 予想を仮定すると Λ は (可算) 無限集合となる.

Tate 捻りにより、M はホッジ型 $(p,0)+(0,p)$ を持つとしてよい. ノルムが十分大きな $\lambda \in \Lambda$ をとる. $\lambda \in \Lambda$ を動かしたとき $\overline{\rho_\lambda}$ から定まるレベル N_λ が割る自然数を N とおく.

このとき、Serre 予想を仮定すると、ある保型形式 $S_{p+1}(\Gamma_1(N))$ が存在して

$$\overline{\rho_\lambda} \simeq \rho_f \bmod \lambda,$$

となる．このような $f \in S_{p+1}(\Gamma_1(N))$ は有限個ある．このとき上記の f を一つ固定すると、$\overline{\rho_\lambda} \simeq \rho_f \bmod \lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ が無限個取れる．

R を $\mathbb{Q}(a_n(f)|(n,N)=1)$ の整数環とし、環準同型 $\phi_\lambda : R \ni a_p \longrightarrow \mathrm{trace}(\overline{\rho}_\lambda(\mathrm{Frob}_p)) \in \overline{\mathbb{F}}_\lambda, (p, lN)=1,\ \lambda|l$ を定める．このとき、チェボタレフの密度定理より

$\overline{\mathbb{F}}_\lambda[\mathrm{G}_\mathbb{Q}]$-加群としての同型、

$$(H_{\mathrm{et}}(M_f,\mathbb{Z}_l)/lH_{\mathrm{et}}(M_f,\mathbb{Z}_l)) \otimes_{R/lR,\phi_\lambda} \overline{\mathbb{F}}_\lambda \simeq (H_{\mathrm{et}}(M,\mathbb{Z}_l)/\lambda H_{\mathrm{et}}(M,\mathbb{Z}_l)) \otimes_{\mathbb{F}_\lambda} \overline{\mathbb{F}}_\lambda,$$

を得る．

ここで、$\overline{V}_M = H_{\mathrm{et}}(M,\mathbb{Z}_l)/lH_{\mathrm{et}}(M,\mathbb{Z}_l)$、$\overline{V}_{M_f} := H_{\mathrm{et}}(M_f,\mathbb{Z}_l)/lH_{\mathrm{et}}(M_f,\mathbb{Z}_l)$ とおく．今 $\lambda \in \Lambda$ なので $\overline{\mathbb{F}}_\lambda = \overline{\mathbb{F}}_l$. 上の同型の左側は $\overline{V}_{M_f}$ のガロア加群としての商だから、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_\mathbb{Q}}(\overline{V}_{M_f}, (H_{\mathrm{et}}(M,\mathbb{Z}_l)/\lambda H_{\mathrm{et}}(M,\mathbb{Z}_l))) \neq 0,$$

を得る．特に、

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_\mathbb{Q}}(\overline{V}_{M_f}, \overline{V}_M) \neq 0,$$

が成立する．

他方、Tate 予想の (d) と再交換団理論 [1] から十分大きな l に対して、自然な射

$$\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(M_f, M) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_\mathbb{Q}}(\overline{V}_{M_f}, \overline{V}_M)$$

は全射．Λ は無限集合なので、上記の性質を満たすような $\lambda \in \Lambda, \lambda|l$ を予め選んでおけば、$\mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(M_f, M) \neq 0$ が分るので、再び（代数体上の）Tate 予想から $M_f \overset{\mathbb{Q}}{\sim} M$ を得る．

定理 4.1-(1) 及び (3) に関しては証明のスケッチを述べるにとどめる事にする．

先ず、(1) について解説する．

N を $\overline{\mathbb{Q}}$-モチーフとする．定義から $\sigma \in \mathrm{G}_\mathbb{Q}$ に対して、同種 $\mu_\sigma : {}^\sigma N \longrightarrow N$ が存在するので、次のように $\mathrm{G}_\mathbb{Q}$ 上の 2-コサイクル $c : \mathrm{G}_\mathbb{Q} \times \mathrm{G}_\mathbb{Q} \longrightarrow F^*$ が定まる:

$$c(\sigma,\tau) := \mu_\sigma \circ {}^\sigma\mu_\tau \circ \mu_{\sigma\tau}^{-1}.$$

c が $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ の中心 $F := Z(\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q})$ に値を持つことは、各 μ_σ がすべての $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$ の元 ϕ に対して、$\mu_\sigma \circ {}^\sigma\phi = \phi \circ \mu_\sigma$ なるように選べることから従う．

2-コサイクル c から付随する代数体を以下のように構成する．結論を言うと、この代数体の整環を自己同型環として備え、かつ N を $\overline{\mathbb{Q}}$-因子として含む GL_2 型のモチーフが構成される．一般に、$H^2(\mathrm{G}_\mathbb{Q}, \overline{\mathbb{Q}}) = 0$ ([18]) が成立することから、埋め込み $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ を固定するとき、局所定数関数

$$\beta : \mathrm{G}_\mathbb{Q} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^*,$$

で $c(\sigma,\tau) = \beta(\sigma)\cdot\beta(\tau)\cdot\beta(\sigma\tau)^{-1}$ を満たすものが存在する．そこで、$E = F(\beta(\sigma)|\sigma \in \mathrm{G}_\mathbb{Q})$ とおく．β は局所定数関数なので E は F の有限次拡大となる．

ここで、次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} H^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}, F^*) & \longrightarrow & H^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}, (\overline{\mathbb{Q}} \otimes F)^*) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow E \otimes_F * \\ H^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}, E^*) & \longrightarrow & H^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}, (\overline{\mathbb{Q}} \otimes E)^*) & \longrightarrow & \mathrm{Br}(E). \end{array}$$

2-コサイクル c の類 $[c]$ は $\mathrm{Br}(F)$ の中で、$[\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q})]$ と一致することがわかる. 他方、$H^2(\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}, E^*)$ においては $[c]$ は自明になるので、図式を追うことで、$\mathrm{Br}(E)$ において $[E \otimes_F (\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q})] = 0$ がわかる. これより、$E \otimes_F (\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}) = M_t(E)$ を得る. ここで、t は $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}$ のシューア指数. また [14] の方法を真似ることで、$\mathbb{Q}$ 上定義されたモチーフ N_0 が存在して、$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(N_0) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} = E \otimes_F (\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(N) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q})$ が成り立つことがわかる. 詳しくは述べないが、N_0 は N の Weil restriction のある部分因子として定義される.

e を $M_t(E)$ の直交冪等元とするとき、$M = e(N_0)$ は N を $\overline{\mathbb{Q}}$-単純因子として含み、かつ $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(M) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} = E$ を満たす GL_2 型のモチーフである.

最後に定理 4.1-(3) であるが、これは虚数乗法を持たない GL_2 型のモチーフ M はある $\overline{\mathbb{Q}}$-単純因子 N があって、$M \overset{\overline{\mathbb{Q}}}{\sim} N^n$ の形に分解されることと、M が $\mathbb{Q}$ 上定義されていることを使えば簡単に従う.

5 Serre 予想と Tate 予想

定理 4.1 を証明する際に、重要な役割を果たす Serre 予想と Tate 予想について簡単に解説する.

Serre 予想の主張は大変明快である. それ故に応用上非常に強力なものである:

Serre 予想 ([17]). p を奇素数とし、$\overline{\mathbb{F}}_p$ を有限体 $\mathbb{F}_p$ の代数閉体とする. このとき、奇かつ既約な二次元 (連続) ガロア表現 $\overline{\rho}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$ はモジュラー、即ち、ある保型形式 f が存在して、$\overline{\rho} \simeq \rho_f \bmod p$.

以下に述べる Tate 予想はアーベル多様体の場合は既に証明されていることを注意しておく (cf. [5], [20]).

代数体 K 上のモチーフ N と素数 l に対して、

$$\rho_l : \mathrm{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbf{Z}_l}(H_{\mathrm{et}}(N, \mathbb{Z}_l)),$$

を N に付随する l-進ガロア表現とする.

Tate 予想 ([19]). N 及び M を代数体 K 上のモチーフとし、共に重さは等しいとする. 正の定数 B を、$l \geq B$ なるすべての素数に対して、$H_{\mathrm{et}}(N, \mathbb{Z}_l)$ 及び $H_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l)$ が 自由 $\mathbb{Z}_l$-加群と成るように定める (比較定理を用いればそのような定数 B はいつでも取れる).

このとき、次が成立する:

(a) $H_{\mathrm{et}}(N, \mathbb{Z}_l)$ は半単純 G_K-加群

(b) 自然な射 $\alpha_K : \mathrm{Hom}_K(N, M) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_l \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_K}(H_{\mathrm{et}}(N, \mathbb{Z}_l), H_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$ は同型.

(c) 有限個を除くすべての $l \geq B$ に対して, $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(H_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$ の部分代数 $\mathbb{Z}_l[\rho_l(\mathrm{G}_K)]$ は自然な射 $\beta_K : \mathrm{End}_K(M) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_l}(H_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$ の像の full commutator と一致.

(d) $l \geq B$ に対して、$\overline{\rho}_l$ を ρ_l の法 l による還元とする. このとき、有限個を除くすべての $l \geq B$ に対して、$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_l}(H_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/lH_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$ の部分代数 $\mathbb{F}_l[\overline{\rho}_l(\mathrm{G}_K)]$ は自然な射 $\mathrm{End}_K(M) \otimes \mathbb{Z}/l\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}_l}(H_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l)/lH_{\mathrm{et}}(M, \mathbb{Z}_l))$ の像の full commutator と一致.

6 例

この節では GL_2 型のモチーフ及び $\mathbb{Q}$-モチーフの具体例を紹介する. 定理 4.1 から $\mathbb{Q}$-モチーフは GL_2 型のモチーフの単純因子と同種になっているので取り敢えず GL_2 型のモチーフを構成すればよいことがわかる. もちろん、直接的に $\mathbb{Q}$-モチーフを構成することは重要ではあるが大変難しい.

数十年前から高次元多様体、特にカラビ・ヤウ多様体に付随するモチーフからランクが 2 の部分モチーフを構成する動きはあったが、最近ではこの動きはさらに活発になった. それに伴って様々な分野の研究者がモチーフ的 L 関数と保型 L 関数が一致する具体例を散発的ではあるが計算している. それらの例は辞書的文献 [11] にほとんど載ってあるので参照して頂きたい.

この節では次のリジッドな三次元カラビ・ヤウ多様体を考える. 平方因子を含まない整数 D に対して

$$Y_D : x + \frac{D}{x} + y + \frac{D}{y} + z + \frac{D}{z} + w + \frac{D}{w} = 0,$$

とおく. X_D を [7] に習って構成された Y_D の非特異な射影的モデルとする. このとき、X_D はリジッドな三次元カラビ・ヤウ多様体となり、モチーフ $M_D := (X_D, \Delta_3)$ は GL_2 型のモチーフであることがわかる (X_D はチャウ-キネス分解を持つので (cf. [8])、その 3 番目の成分を Δ_3 とおいた). さらに次が成立する:

(1) すべての奇素数 p に対して、

$$\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_p | H_{et}(M_D)) = p^3 - 2p^2 - 3p(\chi_D(p) - 1) - 7 - \sharp Y_D(\mathbb{F}_p),$$

ここで、χ_D は二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ に付随する二次指標.

(2) すべての奇素数 p に対して、

$$\mathrm{trace}(\mathrm{Frob}_p|H_{et}(M_D)) = \chi_D(p)\cdot b_p,$$

ここで、$\eta(2z)^4\eta(4z)^4 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi\sqrt{-1}nz} \in S_4(\Gamma_0(8))$.

(3) M_D は (定義 3.3 の意味で) 虚数乗法はもたない.

(1) と (2) に関しては [7] をみれば直ぐにわかることである. (3) はホッジ群と l-進ガロア表現に関する若干の議論からわかる.

最後に、二次体上定義された重さ 1 の $\mathbb{Q}$-モチーフ、即ち、Building block の例を与える. これらは [23] で得られた例である.

(a) $C_1 : y^2 = x^6 - 2(-1+\sqrt{5})x^5 + 10(-2+\sqrt{5})x^3 - 2(-11+15\sqrt{5})x - 41 + 6\sqrt{5}$.
$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}}J(C_1)$ は $J_0(125)$ の 4 次元 $\mathbb{Q}$-単純因子.

(b) $C_2 : y^2 = x^5 + 3\sqrt{2}x^4 - 4x^3 - 12\sqrt{2}x^2 - 12x + 28\sqrt{2}$.
$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}J(C_2)$ は $J_0(512)$ の 4 次元 $\mathbb{Q}$-単純因子.

(c) $C_3 : y^2 = x^6 - 5(1+\sqrt{5})x^3 + 12\sqrt{5}x + \frac{5}{2}(3+\sqrt{5})$.
$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})/\mathbb{Q}}J(C_3)$ は $J_0(1125)$ の 4 次元 $\mathbb{Q}$-単純因子.

(d) $C_4 : y^2 = 4x^5 - 12x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 8(-5+2\sqrt{2})x - 8(-3+2\sqrt{2})$.
$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}J(C_4)$ は $J_0(1792)$ の 4 次元 $\mathbb{Q}$-単純因子.

次の例は Building block ではないが、虚数乗法をもつ二次体上で単純かつモジュラーな例である. 村林の結果 [12] に対する良い例を与えているのではないかと思われる.

(e) $C_5 : y^2 = 4x^5 - 8(-1+\sqrt{2})x$.
$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}}J(C_5)$ は $J_0(2048)$ の 4 次元 $\mathbb{Q}$-単純因子であり、$\mathbb{Q}(\zeta_8)$ 上で $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ を虚数乗法を持つ楕円曲線の 4 つの積と同種.

References

[1] N. Bourbaki, Algèbra, chap.8, Paris 1958.

[2] A. Brown and E.Ghata, Endomorpshim algebras of modular motives attached to elliptic modular forms, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), no. 6, 1615–1676.

[3] P. Deligne, Hodge cycles, Hodge cycles, motives, and Shimura varieties, Lecture Notes in Mathematics, 900.

[4] G. Faltings, p-adic Hodge theory. J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), no. 1, 255–299.

[5] G. Faltings and G.Wüstholz et al, Rational points, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1992.

[6] J. Fontaine and G. Laffaille, Construction de representations p-adiques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 15 (1982), no. 4, 547–608 (1983).

[7] B. van Geemen and N.O. Nygaard, On the Geometry and arithmetic of some siegel modular threefolds, J. Number Theory 53 (1995), no. 1, 45–87.

[8] B. Gordon and J. Murre, Chow motives of elliptic modular threefolds. J. Reine Angew. Math. 514 (1999), 145–164.

[9] B. Gross, Arithmetic on elliptic curves with complex multiplication. With an appendix by B. Mazur. Lecture Notes in Mathematics, 776. Springer, Berlin, 1980.

[10] U. Jannsen, Mixed motives and algebraic K-theory. With appendices by S. Bloch and C. Schoen. Lecture Notes in Mathematics, 1400. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[11] C. Meyer, Modular Calabi-Yau threefolds. Fields Institute Monographs, 22.

[12] N. Murabayashi, On the field of definition for modularity of CM elliptic curves, 数理解析研究所講究録. No 1376, p.72-84.

[13] A. Panchishkin, Motives for absolute Hodge cycles, Proceedings of the Joint. AMS Summer Conference on Motives, Seattle, July 20-August 2 1991, Seattle, Providence, RI, 1994, vol.1, 461-483.

[14] E. Pyle, Abelian varieties over $\mathbb{Q}$ with large endomorphism algebras and their simple components over $\overline{\mathbb{Q}}$. Modular curves and abelian varieties, 189–239, Progr. Math., 224, Birkhauser, Basel, 2004.

[15] K. Ribet, Abelian varieties over $\mathbb{Q}$ and modular forms. Modular curves and abelian varieties, 241–261, Progr. Math., 224, Birkhauser, Basel, 2004.

[16] T. Scholl, Classical motives, Motives (Seattle, WA, 1991), 163–187, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[17] J-P. Serre, Sur les representations modulaires de degre 2 de Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), Duke. Math J, (1) 54 (1987), 179–230.

[18] J-P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, Algebraic Number Fields (Proc. Sympos.Univ. Durham, Durham, 1975) ed. A. Frohlich, Academic Press, London, 1977, pp.193-268.

[19] J-P. Serre, Proprietes conjecturales des groupes de Galois motiviques et des representations l-adiques, Motives (Seattle, WA, 1991), 377–400, Proc. Sympos. Pure Math., 55, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[20] J. Tate, Endomorphisms of abelian varieties over finite fields. Invent. Math. 2 1966 134–144.

[21] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. Invent. Math. 137 (1999), no. 2, 233–411.

[22] T. Yamauchi, $\mathbb{Q}$-motives and modular forms, preprint (2005).

[23] T. Yamauchi, Modular curves of genus 2 over quadratic fields, preprint (2006).

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Hiroshima University, Higashihiroshima 739-8526 Japan.

E-mail:`yamauchi@math.sci.hiroshima-u.ac.jp`