

分岐制限付き基本群の有限性について

九州大学大学院数理学府 平之内俊郎 (Toshiro Hiranouchi)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1 序

このノートは論文 [4] の概説であり, 次の二つの点を解説する.

- ★ エタール基本群の或る商にあたる分岐制限付き基本群の導入.
- ★ 分岐制限付き基本群の Abel 化の有限性について.

定義に入る前に, 分岐制限付き基本群の有限性が如何に数論的な問題であるかを, 古典的な代数体の整数論を例に見てみよう. K を代数体, \mathcal{O}_K をその整数環とし, K' で K 上の (狭義) Hilbert 類体, つまり K 上の最大不分岐 Abel 拡大で無限素点では分岐を許した体を表すことにする. 拡大体 K'/K の Galois 群はエタール基本群の Abel 化を用いて次の様に記述された:

$$\text{Gal}(K'/K) \simeq \pi_1(\text{Spec } \mathcal{O}_K)^{\text{ab}}.$$

ここで左辺の Galois 群は類体論により K のイデアル類群と同型であり, これが有限群になると言う「代数的整数論に於て, 一つの基本定理」 ([7], p.42) から右辺にあるエタール基本群の有限性が得られる. 1 次元スキーム $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ の代わりにもっと一般のスキームに対する, エタール基本群の Abel 化の有限性を論じたのが N. M. Katz と S. Lang ([5]) である. 彼等は特に代数体の整数環上の「数論的」スキームに対するエタール基本群の Abel 化が有限なる事を示している.

一方, 古典的な類体論では与えられた整イデアル $D \subset \mathcal{O}_K$ の分だけ分岐を許した K 上の (狭義) シュトラール類体¹ $K(D)$ が考えられた. 上述の分岐制限付き基本群 $\pi_1(\text{Spec } \mathcal{O}_K, D)$ を用いるならば, Hilbert 類体の時と同様に

$$\text{Gal}(K(D)/K) \simeq \pi_1(\text{Spec } \mathcal{O}_K, D)^{\text{ab}}$$

と書く事ができる. 右辺に現れる基本群は $\pi_1(\text{Spec } \mathcal{O}_K)^{\text{ab}}$ よりも, 分岐を許した分だけ少し大きな群になっている筈である. しかしながら, この場合も D をモジュールとする K のシュトラール類群の有限性及び類体論から $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ と整イデアル D に対する分岐制限付き基本群の Abel 化の有限性が導かれる. そこで Katz-Lang と同様に, 代数体の整数環上の「数論的」スキームに対して Abel 化した分岐制限付き基本群の有限性を示したのが, 論文 [4] の主結果であり §3 で詳しく述べる.

¹ 「Strahl=rayon=ray=放射線. 本書では, このような fantastic な造語の邦訳を敢てしない…」 ([7], p.149, 脚注).

2 定義

前節のシュトラール類体 $K(D)$ の分岐をもう少し詳しく見てみよう. 初めに与えた整イデアルを $D = \prod P_i^{a_i}$ と素イデアル分解する. この時, 各素イデアル P_i は $K(D)$ の K 上の分岐点, 指数 a_i は点 P_i での分岐の激しさを表わしていた. この指数は, 各素点 P_i に於ける K の完備化 K_{P_i} の拡大に付随する上付き分岐群の導手でもあった事に注意して欲しい.

X を連結正規 Noether スキーム, $k(X)$ を X の関数体, $\overline{k(X)}$ をその分離閉包とする. 整イデアルを与えてシュトラール類体の分岐の様子を表わした様に, ここでは $\mathcal{Q} := \{a, a+ \mid a \in \mathcal{Q}_{\geq 1}\}$ を係数とする X の Weil 因子 D を与えて X 上の被覆の分岐, 即ち $k(X)$ 上の拡大の分岐の様子を表わす.

定義. \mathcal{Q} 係数 Weil 因子 $D = \sum_i a_i \Gamma_i$ の各既約因子 Γ_i に於ける生成点を ξ_i する. そこで $\overline{k(X)}$ の ξ_i 上の全ての素点 $\bar{\xi}_i$ に対する a_i 次分岐群 $\text{Gal}(\overline{k(X)}_{\bar{\xi}_i}/k(X)_{\xi_i})^{a_i}$ の像達で生成される閉正規部分群による $\pi_1(X \setminus D)$ の商を $\pi_1(X, D)$ と定義する. 但し $k(X)_{\bar{\xi}_i}/k(X)_{\xi_i}$ は, ξ_i と $\bar{\xi}_i$ に於ける完備化で得られる完備離散付値体の拡大である.

上の定義に出てくる分岐群として, A. Abbes と T. Saito により定義された分岐群 ([1]) を用いている. 例えば Serre の 'Corps Locaux' にある上付き分岐群は, 剰余体が完全な完備離散付値体に対して定義されていた. Abbes-Saito の分岐群はリジッド幾何を用いてこの上付き分岐群を剰余体が一般の場合に拡張したものである. 特に 1 次分岐群は惰性群, $1+$ 次分岐群は暴惰性群にあたる. こうして定義された基本群 $\pi_1(X, D)$ は, 次の様に D で分岐を許した被覆の成す Galois 圏に付随する基本群 ([2], Exposé V) とも解釈出来る:

簡単な為, X 上の被覆にあたる正規スキーム Y が連結であるとしよう. 有限射 $Y \rightarrow X$ が D 分岐被覆であるとは, $X \setminus D$ 上ではエタールであり, 各 ξ_i 及びその上の全ての素点 η_{ij} に於いて

$$(\clubsuit) \quad \text{Gal}(\widetilde{k(Y)}_{\eta_{ij}}/k(X)_{\xi_i})^{a_i} = 1,$$

なる事を言う. 但し $\widetilde{k(Y)}_{\eta_{ij}}$ は $k(Y)_{\eta_{ij}}$ の $k(X)_{\xi_i}$ 上の Galois 閉包. エタール被覆の成す圏の充満部分圏として, 上で定義した D 分岐被覆の成す圏を考えた時に, これが Galois 圏となる事が分かり ([4], Theorem 2.5), 付随する基本群が $\pi_1(X, D)$ となる.

エタール基本群との関係: Galois 圏の一般論 ([2], Exposé V, §6) から, X 及び $X \setminus D$ のエタール基本群との間には

$$(\diamond) \quad \pi_1(X \setminus D) \longrightarrow \pi_1(X, D) \longrightarrow \pi_1(X).$$

なる関係がある. 初めに与えた Weil 因子 $D = \sum a_i \Gamma_i$ に於ける既約因子 Γ_i の重複度 $a_i \in \mathcal{Q}$ を最小の $a_i = 1$ とした時, 式 (\diamond) に於いて $\pi_1(X, D)$ は $\pi_1(X)$ にもっと

も近づかずだが、一般に $\pi_1(X, D) = \pi_1(X)$ とは成り得ない。これは分岐制限付き基本群が余次元 1 の点の分岐のみを考慮している事から生じるもので、余次元の高い点で分岐被覆が存在すれば、分岐制限付き基本群とエタール基本群の間には差異が生じる。しかしながら、例えば X を正則 (regular) と仮定すれば、Zariski-Nagata の純正定理 ([2], Exposé X, Théorème de pureté 3.1) によりこの等式が成立する。

馴分岐基本群との関係: 分岐制限付き基本群と同じ様に X 上の Weil 因子 D で馴分岐 (tame ramification) なる分岐を許した X 上の被覆から馴分岐基本群 (tame fundamental group) が定義された ([2], [3]). 有限射 $Y \rightarrow X$ が D に関して馴分岐被覆であるとは、やはり $X \setminus D$ 上ではエタールであって、関数体の拡大 $k(Y)/k(X)$ が D の既約因子の生成点 ξ_i で馴分岐なる事を言う。この分岐に関する条件は、暴情性群を用いて

$$\text{Gal}(\widetilde{k(Y)_{\eta_{\xi_i}}}/k(X)_{\xi_i})^{1+} = 1$$

と言い換える事が出来る。この条件を (♣) の様に一般化する事で得られる被覆からどんな基本群が現れるのだろうか、と考えたのが事の発端になっている。尚、定義から明らかに、Weil 因子 $D = \sum a_i \Gamma_i$ の既約因子の重複度を $a_i = 1+$ とした時 $\pi_1(X, D)$ は馴分岐基本群 $\pi_1^{\text{tame}}(X, D)$ と一致する。

3 有限性

前節で定義した分岐制限付き基本群の Abel 化の有限性に関して、次の定理が得られる。

定理 ([4], Theorem 1.1). X を代数体 k の整数環 \mathcal{O} 上正規有限型忠実平坦スキームであって $X \otimes_{\mathcal{O}} \bar{k}$ は連結であると仮定する。また D を \mathbb{Q} 係数 Weil 因子とする。この時 $\pi_1(X, D)^{\text{ab}}$ は有限。

この定理は即ち、数論的スキーム上の Abel 被覆の同型類は余次元 1 の点の分岐さえ制限すれば有限個なる事を言っている。尚、次の様な結果は知られていた:

- $X = \text{Spec } \mathcal{O}_K$ の時、類体論により $\pi_1(X, D)^{\text{ab}}$ は有限。
- X が上の定理の仮定に加えて \mathcal{O} 上スムーズなスキームである時、 $\pi_1(X)^{\text{ab}}$ は有限 ([5], Theorem 3).
- 上の定理と同じ仮定で $\pi_1^{\text{tame}}(X, D)^{\text{ab}}$ は有限 ([6], Theorem 3.1).
- 定理の仮定に加えて、更に X が固有 (proper) 且つ \mathcal{O} 上スムーズとすれば、高次元類体論から上の定理が得られる (と思われる)。

定理の証明は馴分岐基本群の有限性を示した A. Schmidt ([6]) の手法に従い、イデアル類群の有限性及びエタール基本群の有限性に関する Katz-Lang の定理の両方を用いる。最終的には X 上の D 分岐被覆が無数個在ると仮定して矛盾を導く事に

なる。馴分岐基本群の時は単にある点に於いて暴分岐が生ずる事を導けば良かった。しかしながら、分岐制限付き基本群の場合にはそれだけでは不十分であって、もっと強く、ある点に於いては分岐の導手が有限に成り得ないという事を示して証明は完成する。

参考文献

- [1] A. Abbes and T. Saito, *Ramification of local fields with imperfect residue fields*, Amer. J. Math. **124** (2002), no. 5, 879–920.
- [2] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Springer-Verlag, Berlin, 1971, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960–1961, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224.
- [3] A. Grothendieck and J. P. Murre, *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 208.
- [4] T. Hiranouchi, *Finiteness of abelian fundamental groups with restricted ramification*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **341** (2005), 207–210.
- [5] N. M. Katz and S. Lang, *Finiteness theorems in geometric classfield theory*, Enseign. Math. (2) **27** (1981), no. 3-4, 285–319 (1982), With an appendix by Kenneth A. Ribet.
- [6] A. Schmidt, *Tame coverings of arithmetic schemes*, Math. Ann. **322** (2002), no. 1, 1–18.
- [7] 高木貞治, 代数的整数論 第2版, 岩波書店, 1971.