数理解析研究所講究録
1521巻 2006年 86-98

p進多重ガンマ函数を用いた類体構成
(Construction of class fields using the p-adic multiple gamma function)

加塩 朋和 (大阪大学), 吉田 敬之 (京都大学)
Tomokazu Kashio (Osaka Univ.), Hiroyuki Yoshida (Kyoto Univ.)

0. Introduction.

今回は類体構成についての話である. 現在我々は p-adic period と p-adic multiple Γ function の特殊値の関係を研究しており, その課程で得られた結果の系として題名の通りの成果を得た. 先ずはこれらの研究について大まかに説明し (§1,2,3,4), 関連する二つの予想を紹介 (§5,6) した後, 類体構成の手法を与える (§7).

Notation. p は素数とし $\mathbf{C}_p$ を $\mathbf{Q}_p$ の代数的閉包の完備化とする. 埋め込み $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $\overline{\mathbf{Q}} \hookrightarrow \mathbf{C}_p$ は固定されているものと考える. $|\ |_\infty$ は $\mathbf{C}$ に入る通常の絶対値を意味し $|\ |_p$ は $\mathbf{C}_p$ 上の p 進絶対値で $|p|_p = 1/p$ を満たすものとする. 任意の代数体 K に対し J_K は同型 $K \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}}$ の全体の集合を表し, 特に埋め込み $\mathrm{id} \in J_K$ を一つ選んでおく. すると K 上の絶対値 $|\ |_\infty, |\ |_p$ が固定される. この時整数環 O_K の素イデアルで K 上に p 進位相を導くものを $\mathfrak{p}_K$ 書くことにする.

分数イデアル全体上で函数 log, $\log_p$ を次のように定義する. まず体 K の任意の分数イデアル $\mathfrak{a}$ に対し次の性質を満たす元 $\Pi_\mathfrak{a} \in K$ を選んでおく. 1. 正整数 n が存在しイデアルとして $\mathfrak{a}^n = (\Pi_\mathfrak{a})$. 2. $\Pi_{\mathfrak{ab}} = \Pi_\mathfrak{a}\Pi_\mathfrak{b}$. 3. 任意の同型写像 $\sigma : K \to K^\sigma$ に対し $\Pi_{\mathfrak{a}^\sigma} = \Pi_\mathfrak{a}^\sigma$. この時 $\log(\mathfrak{a}) := \frac{1}{n}\log(\Pi_\mathfrak{a})$, $\log_p(\mathfrak{a}) := \frac{1}{n}\log_p(\Pi_\mathfrak{a})$ と定める. ただし $\log_p$ は Iwasawa's p-adic log function [Iw] であり, これらの函数は $\Pi_\mathfrak{a}$ の選び方による. 条件を満たす $\Pi_\mathfrak{a}$ は例えば次のように取ることができる. $\widetilde{K}$ を K の正規閉包としておく. この時 $\widetilde{K}$ の任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して条件 1,3 を満たす元 $\Pi_\mathfrak{p}$ を取ればよい. 各素数 p に対し $\widetilde{K}$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ で (p) を割るものを一つ選ぶ. $G := \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/\mathbf{Q})$, $G_p := \{\sigma \in G \mid \mathfrak{p}^\sigma = \mathfrak{p}\}$ と置き h を $\widetilde{K}$ の類数とする. 単項イデアル $\mathfrak{p}^h$ の生成元 Π を一つ選び $n := h|G|$, $\Pi_{\mathfrak{p}^\tau} := (\prod_{\sigma \in G_p} \Pi^{\sigma\tau})^{\frac{|G|}{|G_p|}}$ $(\tau \in G)$ と置けばよい. 実際は log, $\log_p$ を分数イデアル全体上で定義する必要は無く p-adic absolute CM-period を定義するのに用いる高々有限個のイデアルに対して定めれば十分である.

1. p-adic multiple Γ-functions.

比較の為に Barnes' multiple Γ-function [Ba] を思い出しておこう. z, $v = (v_1, \ldots, v_r)$, $z, v_i > 0$ に対し multiple ζ-function $\zeta_r(s, v, z)$ を次で定める.

$$\zeta_r(s,v,z) := \sum_{n_1,\ldots,n_r=0}^{\infty} (z + n_1v_1 + \cdots + n_rv_r)^{-s}. \tag{1}$$

これは全平面上の有理型関数に解析接続され $s = 0$ で解析的である．この時 multiple Γ-function は次で定める．

(2)
$$L\Gamma_r(z,v) := \log\left(\frac{\Gamma(z,v)}{\rho(v)}\right) := \zeta_r'(0,v,z).$$

p 進での類似を考える．まず Cassou-Noguès は p-adic multiple ζ-function $\zeta_{p,r}(s,v,z)$ $(s \in \mathbf{Z}_p)$ を p 進補完函数として定義した [Ca1]．構成の為にここでは Robert [Ro] の意味での p 進積分を函数 $f : \mathbf{Z}_p^r \to \mathbf{C}_p$ に対し次で定める．

(3)
$$\int_{\mathbf{Z}_p^r} f(x)dx := \lim_{l_1,\dots,l_r\to\infty} \frac{1}{p^{l_1+\cdots+l_r}} \sum_{x_1=0,\dots,x_r=0}^{p^{l_1}-1,\dots,p^{l_r}-1} f(x),\ x = (x_1,\dots,x_r).$$

すると p-adic multiple ζ-function は次のように書ける．$z \in \overline{\mathbf{Q}_p}$, $v_i \in \overline{\mathbf{Q}_p}^\times$ に対し

(4)
$$\zeta_{p,r}(s,v,z) := \frac{\int_{\mathbf{Z}_p^r}(z+x_1v_1+\cdots+x_rv_r)^r\langle z+x_1v_1+\cdots+x_rv_r\rangle^{-s}dx}{(s-1)(s-2)\dots(s-r)v_1\dots v_r}.$$

ただし函数 $\langle\ \rangle^{-s}$ の定義は次の様である．$|z|_p < 1$ ならば $\langle z\rangle := 0$．$|z|_p \geq 1$ ならば $\langle z\rangle$ は $|\langle z\rangle - 1|_p < 1$ でかつ $z/(p^{\mathrm{ord}_p z}\langle z\rangle)$ はその位数が p と互いに素な 1 のべき乗根となるただ一つの $\overline{\mathbf{Q}_p}$ の元とする (詳しくは [Iw, §4] 等)．また $|z|_p < 1$ の時 $(1+z)^s := \sum_{k=0}^{\infty}\binom{s}{k}z^k$ と定義しておく．この時次の性質を示せる．

(5)
$$\zeta_{p,r}(s,v,z)\ は\ s = 0\ で\ p\ 進解析的.$$

$z, v_i \in \overline{\mathbf{Q}}^\times$ が $z, v_i > 0$ かつ $|z-1|_p, |v_i|_p < 1$ を満たすならば

(6)
$$\zeta_r(-k,v,z) = \zeta_{p,r}(-k,v,z) \in \overline{\mathbf{Q}}\ (0 \leq k \in \mathbf{Z}).$$

よって p-adic multiple Γ-function $L\Gamma_{p,r}(z,v)$ を次のように定めるのが自然であろう．

(7)
$$L\Gamma_{p,r}(z,v) := \zeta_{p,r}'(0,v,z).$$

すると次の結果を得る．

(8)
$$L\Gamma_{p,r}(z,v)\ は\ z,\ v_i\ に対して連続な函数.$$

(9)
$$L\Gamma_{p,r}(z,v) - L\Gamma_{p,r}(z+v_i,v) = L\Gamma_{p,r-1}(z,(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},\dots,v_r))\ (r \geq 2).$$

(10)
$$L\Gamma_{p,1}(z,(v_1)) - L\Gamma_{p,1}(z+v_1,(v_1)) = -\log_p(z).$$

(11)
$$L\Gamma_{p,1}(z,(1)) = \log_p(\Gamma_p(z))\ (z \in \mathbf{Z}_p).$$

ここでΓ_pはMorita's p-adic Γ-function [Mo]. (cf. 古典的には$z>0$に対して$L\Gamma_1(z,(1)) = \log(\Gamma(z)) - \frac{1}{2}\log(2\pi)$.)

$$L\Gamma_{p,r}(z,v) = \frac{(-1)^r \int_{\mathbf{Z}_p^r} f(x)dx}{r! v_1 \ldots v_r}. \tag{12}$$

ただし$|z + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r|_p \geq 1$の時$f(x) = (z + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r)^r(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{r} - \log_p(z + x_1v_1 + \cdots + x_rv_r))$, それ以外では$f(x) = 0$とする. 特に$p$-adic multiple Γ-functionの特殊値は$\mathbf{C}_p$の中で数値計算できる.

Remark. ここでのp-adic ζ-functionの定義はオリジナルの定義 [Ca1] や筆者の論文 [Ka1,2] から僅かに修正してある.

2. A p-adic analogue of Shintani's formula.

Shintani's formulaは以下の様に定式化できる.

Theorem. (Shintani [Sh2].) Fを次数nの総実体, $\mathfrak{f}$をその正イデアルとし, $C_\mathfrak{f}$を$\mathfrak{f}\infty_1 \ldots \infty_n$を法に持つイデアル類群とする. ただし$\{\infty_1, \ldots, \infty_n\}$はreal placeの全体とした. イデアル類$\mathfrak{c} \in C_\mathfrak{f}$に対しpartial ζ functionを$\zeta_F(s,\mathfrak{c}) := \sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{c}\text{, integral ideals}} N(\mathfrak{a})^{-s}$で定める. この時次が成り立つ.

$$\zeta_F'(0,\mathfrak{c}) = \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) - \log(N(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f}))\zeta_F(0,\mathfrak{c}) + T(\mathfrak{c},\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\}). \tag{13}$$

ただし$v_j = (v_{j,1}, \ldots, v_{j,r(j)})$は各成分が$O_F$の総正な元からなる$r(j)$-row vector, $R(\mathfrak{c},j)$はFの有限部分集合, Jは添え字の有限集合, $T(\mathfrak{c},\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\})$はcorrection termをまとめたものである. これらは狭義イデアル類群$C_{(1)}$の代表元$\{\mathfrak{a}_\mu\}$及びcone decomposition $\mathbf{R}^{+n} = \coprod_{j\in J}\coprod_{\epsilon\in O_F^\times} \epsilon C(v_j)$を導くベクトル$\{v_j\}$の選び方による. ここで$\coprod$はdisjoint unionを表すこととし$C(v_j) := \{t_1v_{j,1} + \cdots + t_{r(j)}v_{j,r(j)} \mid (t_1, \ldots, t_{r(j)}) \in \mathbf{R}^{+r(j)}\} \subset \mathbf{R}^{+n}$と置く. また$F \hookrightarrow \mathbf{R}^{+n}$, $z \mapsto (z^\sigma)_{\sigma\in J_F}$と埋め込んでおく. 式中の$\mathfrak{a}_\mu$は$C_{(1)}$の中で$\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f} = \mathfrak{c}$を満たす代表元を取る事とする. この時$R(\mathfrak{c},j) = \{z = \sum_{k=1}^{r(j)} x_kv_{j,k} \in (\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})^{-1} \cap C(v_j) \mid 0 < x_i \leq 1, (z)\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f} \in \mathfrak{c}\}$と書き表せる.

この式に関して吉田敬之氏は次のLemmaを示した. これによりpartial ζ functionの$s=0$での微分値に対して自然な分解を得る.

Lemma. (Yoshida [Yo3].) Shintani's formula中のcorrection termは次の様に書ける.

$$T(\mathfrak{c},\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\}) = \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{i\in I} a_i^\sigma \log(b_i^\sigma). \tag{14}$$

ただし I は添え字の有限集合で $a_i \in F,\ b_i \in O_F^\times$.

この分解を用いて吉田氏は新しい invariant を定義した.

Definition. $\sigma \in J_F$, $\mathfrak{c} \in C_\mathfrak{f}$ に対し

(15)

$$X^\sigma(\mathfrak{c}) := X^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\}) = \sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) - \log(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})\zeta_F(0,\mathfrak{c}) + \sum_{i\in I} a_i^\sigma \log(b_i^\sigma),$$

また $X(\mathfrak{c}) := X^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})$ と略記することにする.

Remark. [Yo2,3] において吉田氏は $X(\mathfrak{c}) := G(\mathfrak{c}) + W(\mathfrak{c}) + V(\mathfrak{c})$ と三つに分け, その内 $W(\mathfrak{c}) := -\frac{1}{n}\log\left(N(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})\right)\zeta_F(0,\mathfrak{c})$ と定義している. ここではこの部分を修正して $W(\mathfrak{c}) := -\log(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})\zeta_F(0,\mathfrak{c})$ と定めることにする. これは我々の主予想 (26) の定式化を単純にするためである.

p 進での類似は以下の様になる. 正イデアル $(p)_0$ を次の様に定める.

$$(p)_0 := \begin{cases} \prod_{\text{prime ideals } \mathfrak{p}\subset O_F,\ \mathfrak{p}|(p)} \mathfrak{p} & \text{if } p \neq 2, \\ (2)\prod_{\text{prime ideals } \mathfrak{p}\subset O_F,\ \mathfrak{p}|(2)} \mathfrak{p} & \text{if } p = 2. \end{cases} \tag{16}$$

以下 $(p)_0$ が $\mathfrak{f}$ を割ると仮定する. この時イデアル類 $\mathfrak{c} \in C_\mathfrak{f}$ に対して p-adic partial ζ function $\zeta_{p,F}(s,\mathfrak{c})$ を p 進補完: $\zeta_{p,F}(-k,\mathfrak{c}) = \omega(\mathfrak{c})^{-k}\zeta_F(-k,\mathfrak{c})$ for $0 \leq k \in \mathbf{Z}$ によって定めることができる. ここで ω は Teichmüller character と ideal norm map の合成写像として定義される指標とした. すると $\zeta_{p,F}(s,\mathfrak{c})$ は $s=0$ で p 進解析的であることが示される. Cassou-Noguès の p 進解析的手法 [Ca2,3] を用いる事により次の p-adic analogue of Shintani's formula を得る.

Theorem. (Kashio [Ka1,2].) $(p)_0$ が $\mathfrak{f}$ を割ると仮定する. p-adic partial ζ function の $s=0$ での微分は式 (13), (14) 中と全く同じ値, 集合を用いて次の様に表せる.

(17)

$$\zeta'_{p,F}(0,\mathfrak{c}) = \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) - \log_p\left(N(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})\right)\zeta_{p,F}(0,\mathfrak{c}) + \sum_{\sigma\in J_F}\sum_{i\in I} a_i^\sigma \log_p(b_i^\sigma).$$

よって次の様に p 進での invariant を定める.

Definition. $\sigma \in J_F$, $\mathfrak{c} \in C_\mathfrak{f}$ に対し

(18)

$$X_p^\sigma(\mathfrak{c}) := X_p^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\}) = \sum_{j\in J}\sum_{z\in R(\mathfrak{c},j)} L\Gamma_{p,r(j)}(z^\sigma, v_j^\sigma) - \log_p(\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{f})\zeta_{p,F}(0,\mathfrak{c}) + \sum_{i\in I} a_i^\sigma \log_p(b_i^\sigma),$$

また $X_p(\mathfrak{c}) := X_p^{\mathrm{id}}(\mathfrak{c})$ と略記することとする.

なお Theorem (17) より直ちに次の結果を得る事ができる.

Corollary. $(\mathfrak{f},(p))=1$ とする. 任意の $C_{\mathfrak{f}}$ の指標 χ に対して

(19) $$r(\chi):=\#\{\mathfrak{p}|(p),\ \chi(\mathfrak{p})=1\}\geq 2 \text{ であれば } \mathrm{ord}_{s=0}L_p(s,\chi\omega)\geq 2.$$

ここで $L_p(s,\chi\omega):=\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}(p)_0}}\chi(\mathfrak{c})\zeta_{p,F}(s,\mathfrak{c})$ は p-adic L function.

この corollary は後に説明するように次の Gross' conjecture の部分解となっている (§6). これは Stark-Tate の結果の p 進類似であり大まかには次のように定式化できる.

Conjecture. (Gross. [Gr]) $(\mathfrak{f},(p))=1$ で指標 χ は primitive であるとする. この時

(20) $$L_p(s,\chi\omega)\sim \text{"algebraic number"} * \text{"p-adic regulator"} * s^{r(\chi)}+O(s^{r(\chi)+1})\ (s\mapsto 0).$$

3. The p-adic absolute CM-period symbol.

吉田氏の元の予想 [Yo2,3] は次の様なものであった.

Definition. K は CM 体, F は総実体で K/F は abelian extension であるとする. $\tau\in G:=\mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

(21)
$$g_{K/F}(\mathrm{id},\tau):=g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\}):=\pi^{-\mu(\tau)/2}\exp\left(\frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi}}\chi(\mathfrak{c})X(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)}\right)$$

と置き $g_{K/F}$ を absolute CM-period symbol と呼ぶ事にする. ここで $\hat{G}_-$ は G の odd character の全体, $\mathfrak{f}_\chi$ は指標 χ の法とし $\tau=\mathrm{id},\rho$ (complex conjugate), その他に対して $\mu(\tau):=1,-1,0$ と定義する. この時 $g_{K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod O_F^\times\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ は $\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\}$ の選び方によらない事が示せる. ただし $O_F^\times\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$ は $\overline{\mathbf{Q}}^\times$ の部分群 $\{\epsilon\in\overline{\mathbf{Q}}^\times|$ 自然数 n が存在し $\epsilon^n\in O_F^\times\}$ を表す事とする.

Conjecture. (Yoshida [Yo2,3].) $\tau\in G:=\mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

(22) $$p_K(\mathrm{id},\tau)\equiv g_{K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod \overline{\mathbf{Q}}^\times.$$

ここで p_K は Shimura's CM-period symbol であり, これは K による虚数乗法を持つ Abelian variety の幾何的周期を分解することにより定義される. 詳しくは [S].

この予想の p 進類似が我々の主予想である.

Definition. $\tau \in G := \mathrm{Gal}(K/F)$ に対し

$$lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau) := lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\})$$
$$= \frac{-\mu(\tau)}{2}\log_p(\mathfrak{p}_F) + \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}_-}\frac{\chi(\tau)\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_{p,\chi}}}\chi(\mathfrak{c})X_p(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)} \tag{23}$$

と置き $lg_{p,K/F}$ を (logarithmic) p-adic absolute CM-period symbol と呼ぶことにする．ただし $\mathfrak{p}_F$ が $\mathfrak{f}_\chi$ を割るときは $\mathfrak{f}_{p,\chi} := \mathfrak{f}_\chi$ としそれ以外なら $\mathfrak{f}_{p,\chi} := \mathfrak{f}_\chi\mathfrak{p}_F$ と置く．$lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau)$ mod $\mathbf{Q}\log_p(O_F^\times)$ は unique に定まる値である．

4. A generalization of the Gross-Koblitz formula.

ここでは我々の主予想をある条件付きで定式化する．K が虚二次体である時，これは Gross-Koblitz formula と一致する．まずこの公式を思い出しておこう．

Theorem. (Gross-Koblitz [GK].) K は虚二次体で conductor が $-d$ となるものとする．対応する Dirichlet character を χ と置く．素数 p が K で分解する時

$$\log_p\left(\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K}\right) = \frac{w_K}{2h_K}\sum_{a=1}^{d-1}\chi(a)\log_p\left(\Gamma(\frac{a}{d})\right). \tag{24}$$

ただし $w_K := \#\{\text{roots of unity } \in K\}$ と置いた．

Gross-Koblitz formula 中の"素数 p が K で分解する"という条件は"$\mathfrak{p}_F$ が K/F で完全分解する"と言う条件に一般化される．これは p-ordinarity と呼ばれる条件に非常に近い．この条件下で我々の主予想は次の通りである．

Conjecture. (Kashio-Yoshida.) F, K を総実体と CM 体の組で K/F が abelian extension であるものとし，$\mathfrak{p}_F$ が K/F で完全分解すると仮定しておく．この時

$$\frac{1}{2}\log_p\left(\left(\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K}\right)^{\tau^{-1}}\right) \equiv lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod \mathbf{Q}\log_p(O_F^\times). \tag{25}$$

更に精密に

$$\frac{1}{2}\log_p\left(\left(\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K}\right)^{\tau^{-1}}\right) = lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\}) + \log_p\left(\frac{g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\})}{g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{p}_F\})}\right). \tag{26}$$

Remark. absolute CM-period symbol $g_{K/F}$ は modulo $O_F^\times \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ で一意に定まる．即ち $\frac{g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\})}{g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{p}_F\})} = \epsilon^x$ となる単元 $\epsilon \in O_F^\times$ と有理数 $x \in \mathbf{Q}$ が取れる．よって

$\log_p(\frac{g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\})}{g_{K/F}(\mathrm{id},\tau;\{v_j\},\{\mathfrak{a}_\mu\mathfrak{p}_F\})}) = x\log_p(\epsilon)$ と置けば well-defined である．また式 (26) の右辺は $\{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\}$ の選び方や $\{\Pi_\mathfrak{a}\}$ (Notation の所で log, $\log_p$ の定義の為に選んだ) の取り方によらない事が示せる．

Remark. 実は予想式の左辺 ($= \frac{1}{2}\log_p((\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K})^{\tau^{-1}})$) は cohomology の comparison isomorphism から定まる p-adic period と呼ばれる値を用いて書き表すことができる．これは CM-period の p 進類似物である．この表現を用いることにより我々の主予想は p-adic period と p-adic absolute CM-period の関係式だと見ることができ，吉田氏の予想 (22) の p 進類似を得たことになる．なお p-adic period との関係式だと見ると"$\mathfrak{p}_F$ が K/F で完全分解する"という条件なしに定式化できる．実際 $p_{p,K}$ を CM-period symbol と同様に p-adic period を分解して定めたものとする (値域は B_{cris} と書かれるある巨大な環である)．この時，虚数乗法論を用いることにより $\tau \in J_K$ に対して次を示せる．

$$\log_p\left(p_{p,K}(\mathrm{id},\tau)^{1-\varphi_{\mathrm{cris}}^{f_{\mathfrak{p}_K}}}\right) = \frac{1}{2}\log_p\left(\left(\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K}\right)^{\tau^{-1}}\right). \tag{27}$$

ただし $f_{素イデアル}$ は素イデアルの次数を表し φ_{cris} は B_{cris} へ作用する絶対フロベニウスである．よって主予想 (26) は次の形へ拡張されることを期待する．$\mathfrak{p}_F$ が K で完全分解しない時は

$$\log_p\left(p_{p,K}(\mathrm{id},\tau)^{1-\varphi_{\mathrm{cris}}^{f_{\mathfrak{p}_F}}}\right) \equiv lg_{p,K/F}(\mathrm{id},\tau) \mod \mathbf{Q}\log_p(\widetilde{K}^\times)\ ? \tag{28}$$

この式こそが本当の意味での吉田予想の p 進類似である．

5. Stark's conjecture in the first order zero case.

K/F は abelian extension とし $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ と置く．S を F の place の有限集合とし，$|S| \geq 2$ で S は全ての infinite place 及び全ての ramified place を含んでいると仮定しておく．更に一つ place $v_0 \in S$ を取り，これが K/F で完全分解しているとする．この場合 Stark conjecture は次の様にかける．

Conjecture. (Stark. [St3]) v_0 を割る任意の K の place ω に対して次の性質を満たす単元 $\epsilon \in K$ が存在する．

$$\epsilon は \begin{cases} S\text{-unit} & |S| = 2 \text{ の時,} \\ v_0\text{-unit} & |S| > 2 \text{ の時.} \end{cases} \tag{29}$$

$\sigma \in G$ に対して

$$\log(\| \epsilon^\sigma \|_\omega) = -w_K\zeta_S'(0,\sigma). \tag{30}$$

ここで $w_K := \#\{$ roots of unity $\in K\}$. また $\zeta_S(s,\sigma) := \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}$, ただし $\mathfrak{a}$ についての和は S に含まれる finite place 全てと互いに素な正イデアル $\mathfrak{a}$ で, Artin map での像が σ と一致するもの全体を走る. また complex, real, finite place ω に対してそれぞれ $\| x \|_\omega := |x|_\infty^2, |x|_\infty, N(\omega)^{-\mathrm{ord}_\omega(x)}$ と置いた.

6. Gross' conjecture.

記号は§5と同じとする. 更に F は総実体, K はCM体, S は (p) を割る全ての place を含んでいるとし, $v_0 = \mathfrak{p}_F$ と仮定しておく. この状況で v_0-unit $\epsilon \in K$ と正整数 M が存在し, 任意の $\sigma \in G$ に対して次を満たす.

$$\log(\| \epsilon^\sigma \|_{\mathfrak{p}_K}) = -M\zeta_S'(0,\sigma). \tag{31}$$

つまり Stark conjecture はこの場合は $M = w_K$ を言うのみである. 今 M を固定すると条件 (31) を満たす v_0-unit ϵ は 1 のべき乗根倍を除いて一意に定まる.

Conjecture. (Gross [Gr].) F, K, S, ϵ, M は上と同じとする. この時 $\sigma \in G = \mathrm{Gal}(K/F)$ に対して

$$\log_p \left(N_{K_{\mathfrak{p}_K}/\mathbf{Q}_p}(\epsilon^\sigma)\right) = -M\zeta_{p,S}'(0,\sigma). \tag{32}$$

ただし $\zeta_{p,S}(s,\sigma)$ は p-adic partial ζ-function であり $\zeta_S(s,\sigma)$ の p 進補完函数として定められる. これは $s=0$ で p 進解析的である. また $K_{\mathfrak{p}_K}$ は K の $\mathfrak{p}_K$ における完備化とした.

実は我々の予想 (26) は Gross conjecture (32) を細分したものだと見れる. 即ち次が成り立つ.

Theorem. (Kashio-Yoshida.) 我々の予想 (26) が正しければ Gross conjecture (32) は正しい.

Proof. S は最小の集合として示せば十分である. つまり S は ramified place, infinite place, (p) 上の place 全体の和集合とする. この時 Gross conjecture は次と同値.

$$\begin{aligned}{}^\forall\chi \in \hat{G}_-, \quad \frac{\sum_{\sigma\in J_F}\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_{\chi}(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})X_p^\sigma(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)} &= \frac{\prod_{\mathfrak{p}|(p),\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_F}(1-\chi(\mathfrak{p}))}{2} \\ &\quad \times \sum_{\tau\in G}\chi(\tau)\log_p\left(N_{K_{\mathfrak{p}_K}/\mathbf{Q}_p}\left(\left(\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K}\right)^\tau\right)\right).\end{aligned} \tag{33}$$

また我々の予想は次と同値.

(34)

$${}^\forall\chi \in \hat{G}_-, \quad \frac{\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi\mathfrak{p}_F}}\chi(\mathfrak{c})X_p(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)} = \frac{[\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi\mathfrak{p}_F}}\chi(\mathfrak{c})X(\mathfrak{c})]_p}{L(0,\chi)} + \frac{1}{2}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)\log_p\left(\left(\frac{\mathfrak{p}_K^\rho}{\mathfrak{p}_K}\right)^\tau\right).$$

ただし記号$[\ ]_p$の定義は次の通り. $\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi \mathfrak{p}_F}} \chi(\mathfrak{c})X(\mathfrak{c}) = \sum_i \alpha_i \log(\beta_i)$となる代数的数$\alpha_i, \beta_i$が取れることが示せる. よって$[\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_{p,\chi}}} \chi(\mathfrak{c})X(\mathfrak{c})]_p := \sum_i \alpha_i \log_p(\beta_i)$と定義する. これは$\alpha_i, \beta_i$の取り方によらない. 2式(33, 34)を比べた時, イデアル類群の法が異なることに注目しよう. 次のLemmaを準備する.

Lemma. $\mathfrak{f}$を整イデアル, $\mathfrak{p}$素イデアル, χを$C_\mathfrak{f}$の指標とし, $\sigma \in J_F$とする. 更に$(\mathfrak{f}, \mathfrak{p}) = 1$を仮定しておく. すると次が成り立つ.

(35)
$$\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}} \chi(\mathfrak{c})X^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\}) = \sum_{\mathfrak{c}\in C_\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{c})X^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{p}\}) - \chi(\mathfrak{p}) \sum_{\mathfrak{c}\in C_\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{c})X^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\})$$
$$+ \chi(\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1 - \chi(\mathfrak{q}))L(0, \chi).$$

更に$\mathfrak{p}_{F^\sigma}$が$\mathfrak{f}^\sigma$を割ると仮定すると

(36)
$$\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}} \chi(\mathfrak{c})X_p^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\}) = \sum_{\mathfrak{c}\in C_\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{c})X_p^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu \mathfrak{p}\}) - \chi(\mathfrak{p}) \sum_{\mathfrak{c}\in C_\mathfrak{f}} \chi(\mathfrak{c})X_p^\sigma(\mathfrak{c}; \{v_j\}, \{\mathfrak{a}_\mu\})$$
$$+ \chi(\mathfrak{p}) \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{f}} (1 - \chi(\mathfrak{q}))L(0, \chi).$$

定理の証明に戻る. このLemmaと仮定(34)により, $(\mathfrak{p}_F)^\sigma = \mathfrak{p}_{F^\sigma}$を満たす$\sigma \in G$に対して

$$\frac{\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})X_p^\sigma(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)} = \frac{[\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})X^\sigma(\mathfrak{c})]_p}{L(0,\chi)} + \frac{\prod_{\mathfrak{p}|(p),\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_F}(1-\chi(\mathfrak{p}))}{2} \sum_{\tau\in G} \chi(\tau) \log_p \left(\left(\frac{\mathfrak{p}^\rho}{\mathfrak{p}} \right)^{\tau\sigma} \right). \tag{37}$$

$(\mathfrak{p}_F)^\sigma \neq \mathfrak{p}_{F^\sigma}$の場合には

$$\frac{\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})X_p^\sigma(\mathfrak{c})}{L(0,\chi)} = \frac{[\sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})X^\sigma(\mathfrak{c})]_p}{L(0,\chi)}. \tag{38}$$

また

$$\frac{[\sum_{\sigma\in J_F} \sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_\chi(p)_0}} \chi(\mathfrak{c})X^\sigma(\mathfrak{c})]_p}{L(0,\chi)} = \frac{\left(\prod_{\mathfrak{p}|(p),\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}_F}(1-\chi(\mathfrak{p}))\right) L(0,\chi)\log_p(p)}{L(0,\chi)} = 0 \tag{39}$$

が成り立つのでGross予想の式を導ける. □

Remark. 証明中の式(33, 34)を見比べる事により, Gross予想と我々の予想が同値であるのは$r(\chi) := \#\{\mathfrak{p}|(p), \chi(\mathfrak{p}) = 1\} = 1$かつ$K_{\mathfrak{p}_K} = \mathbb{Q}_p$が成り立つときのみであること

が分かる．更に $r(\chi) > 1$ の場合は Gross 予想は $L'_p(0, \chi\omega) = 0$ を言うのみであり (これは corollary (19) で既に示してある)，$X_p(\mathfrak{c})$ や $lg_{p,K/F}(\mathrm{id}, \tau)$ の値に対してはなんら言及していない．もちろん我々の予想式はこれらの場合にも適用される．.

Remark. 式 (34) を更に変形して我々の予想は次のように言い換えられる．$\tau \in G$ に対して

$$(40) \qquad -\frac{1}{w_K}\log_p\left(\left(\mathfrak{p}_K^{\sum_{\sigma\in G} w_K\zeta(0,\sigma)\sigma^{-1}}\right)^{\tau}\right) = X_p(\tau, \mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F) - [X(\tau, \mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F)]_p.$$

但し $\mathfrak{f}_{K/F}$ はアーベル拡大 K/F の conductor とし，$\sigma_{\mathfrak{c}}$ は $\mathfrak{c}$ の Artin 写像による G での像とし，$X(\tau, \mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F)$ (resp. $X_p(\tau, \mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F)$) $:= \sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F}, \sigma_{\mathfrak{c}}=\tau} X(\mathfrak{c})$ (resp. $X_p(\mathfrak{c})$)，$\zeta(s,\tau) = \sum_{\mathfrak{c}\in C_{\mathfrak{f}_{K/F}}, \sigma_{\mathfrak{c}}=\tau} N(\mathfrak{a})^{-s}$ と定義した．なお Brumer-Stark conjecture [Ta] によれば正イデアル $\mathfrak{p}_K^{\sum_{\sigma\in G} w_K\zeta(0,\sigma)\sigma^{-1}}$ は単項イデアルとなっているはずである．

7. The construction of class fields.

類体論により，代数体 F の情報から任意のアーベル拡大体 (類体)K に対して Galois group $G := \mathrm{Gal}(K/F)$ やその拡大における素イデアルの分解の様子などを調べることが出来る．しかし"類体 K それ自身を構成することが出来るのか?" という問題が発生する．もしくは"拡大 K/F を定義する多項式 $f(X) \in F[X]$ を構成できるか?"と言い直してもよい．実は我々の予想を仮定すると，この問題は総実代数体 F 及びその類体 K で CM 体であるものに対して是定的に解ける．以下この章では我々の予想式を仮定した上で拡大 K/F を定義する多項式 $f(X)$ の構成方法を紹介する．F を総実体，K をその類体で CM 体となるものとする．以下の手順でこの拡大を定義する多項式 $f(X)$ を得ることが出来る．

1. 素イデアル $\mathfrak{p} \subset O_F$ で K/F において完全分解するものを一つ選び素数 p をイデアル $\mathfrak{p}\cap\mathbf{Z}$ の正の生成元とする．更に F の埋め込みを $\mathfrak{p}_F = \mathfrak{p}$ となるように固定しておく．
2. 予想式 (40) により，正整数 N が存在し

$$(41) \qquad z_0 := \exp_p\left(N\left(X_p(\mathrm{id}, \mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F) - [X(\mathrm{id}, \mathfrak{f}_{K/F}\mathfrak{p}_F)]_p\right)\right) = \Pi_{\mathfrak{p}_K}^{-\sum_{\sigma\in G}\frac{N}{h_K}\zeta(0,\sigma)\sigma^{-1}} \in K.$$

ここで $\Pi_{\mathfrak{p}_K}$ は単項イデアル $(\mathfrak{p}_K)^{h_K}$ の生成元，h_K は K の類数とした．元 z_0 は $\mathbf{C}_p$ の中で数値的に近似計算できる．更に正整数 M を

$$(42) \qquad z := p^M z_0 \in O_K$$

となるように取る．この時 $K = F(z)$．なお各 z^τ $(\tau \in G)$ も式 (40) により計算できる．よって多項式

$$(43) \qquad f(X) := X^{|G|} + \alpha_{|G|-1}X^{|G|-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 := \prod_{\tau\in G}(X - z^\tau) \in O_F[X]$$

を定義すると, これが我々の求めるものである.

3. 近似的に各係数 α_i は計算でき, $f(X)$ を表すことができる. しかしこれだけでは正確に類体を構成したことにはならない. 例えば X^2+1 と X^2+1-p^{1000} は p 進位相で非常に近いものであるが, それぞれの定義する拡大体は $\mathbf{Q}(i) \neq \mathbf{Q}(\sqrt{p^{1000}-1}) \subset \mathbf{R}$ となり一致しない. しかしこの問題は次のように解決できる. 任意の $\sigma \in J_K$ に対して $|z^\sigma|_\infty = p^M$ なので α_i の各無限素点での絶対値は上から押さえられる. そのような O_F の元は有限個なので我々は $\alpha_i \in O_F$ を確定させることが出来る. 即ち $f(X)$ を得ることができた.

Examples. $F := \mathbf{Q}(\sqrt{35})$ とする. この時, 類数 $h_F = 2$, 狭義類数 $h_{F,0} = 4$ なので F 上 4 次の類体 K で Galois group $\mathrm{Gal}(K/F)$ が狭義イデアル類群 $C_{(1)}$ と一致するのものが取れる. この K は CM 体となる. この F, K に対して上記の手法を試してみる. $p=3$ を取ると, F まで remain prime であり K/F で完全分解している. この時

$$f(X) = X^4 - 2X^3 - 3^2 * 149X^2 + 3^6 * 2X + 3^{12} \tag{44}$$

を得る. $f(X)$ が K/F を定義する多項式であることは分岐を調べれば簡単に分かる.

次に $F := \mathbf{Q}(\sqrt{79})$ としよう. すると $h_F = 3$, $h_{F,0} = 6$. 同様に類体 K で $\mathrm{Gal}(K/F) \cong C_{(1)}$ となるものを構成する. $p = 11$ とする. これも F まで remain prime であり K/F では完全分解している. 得られる多項式は

$$\begin{aligned} f(X) = {} & X^6 + 23684126X^5 + 11^6 * 38858607X^4 - 11^{12} * 1575649852X^3 \\ & + 11^{20} * 38858607X^2 + 11^{28} * 23684126X + 11^{42}. \end{aligned} \tag{45}$$

多少複雑ではあるが, $f(X)$ が K/F を定義している事も示せる.

Remark. よく知られているように, Stark 予想や Gross 予想を用いても同様の手法で類体の構成へ応用することができる. 総実体 F を固定し, これらの手法による類体構成を比較しておこう.

1. 我々の予想式を用いた構成方法は F の類体で CM 体であるもの全てを構成できる.

2. Stark 予想を仮定する. この場合, F の類体 K で, F の real place が一つだけが完全分解している場合にのみ, その単元を得ることができる. つまり K が CM 体であればこの手法は上手く働かない. (ただし幾つかの類体の合成を用いることにより CM 体の構成が可能な場合もある.)

3. Gross 予想を仮定する. $\zeta'_{p,S}(0,\sigma)$ が消えると自明な元しか得られないので"素数 p を割る O_F の素イデアルの内ただ一つが K/F で完全分解する"という条件が, 体 K の構成に必要となる. この様な p は常に取れるわけではない. 例えば

$$F := \mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{29}), K := \mathbf{Q}(\sqrt{4 \pm \sqrt{5}i}, \sqrt{6 \pm \sqrt{29}i}) \tag{46}$$

としてみる. すると K は F の真の部分体 $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}(\sqrt{5}), \mathbf{Q}(\sqrt{29}), \mathbf{Q}(\sqrt{5*29}))$ 上はアーベル拡大ではなく, それらの体上では類体として構成することは出来ない. また K は $\mathbf{Q}$ 上

normal であるので素数 p で上記の条件を満たすものは $F/\mathbf{Q}$ で分解してはならない. 更に $F/\mathbf{Q}$ は cyclic では無いので F で remain prime ではあり得ない. つまり p は分岐しているはずであり, $p=5$ か 29 しか取れない. (5) は $\mathbf{Q}(\sqrt{29})/\mathbf{Q}$ で分解し, (29) は $\mathbf{Q}(\sqrt{5})/\mathbf{Q}$ で分解している. よって条件を満たす素数は存在せず, Gross 予想を用いた場合 K は構成できない.

これらの比較から, 総実体上の類体構成という観点において, 我々の手法の優位性が見受けられる.

References.

[An] G. W. Anderson, Logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions and the periods of abelian varieties, Comp. Math. 45 (1982), 315-332.

[Ba] E. W. Barnes, On the theory of multiple gamma function, Trans. Cambridge Philos. Soc. 19 (1904), 374-425.

[Ca1] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques de quelques functions arithmétiques, Publ. Math. Bordeaux, 1-43 (1974-1975).

[Ca2] P. Cassou-Noguès, Analogues p-adiques des fonctions Γ-multiples, Société Math. de France Astérisque 61 (1979), 43-55.

[Ca3] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et functions zéta p-adiques, Inv. Math. 51 (1979), 29-59,

[FG] B. Ferrero, R. Greenberg, On the Behavior of p-adic L-Functions at $s = 0$, Inv. Math. 50, 91-102 (1978).

[Gr] B. H. Gross, p-adic L-series at s=0, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28(1981), 979-994.

[GK] B. H. Gross, N. Koblitz, Gauss sums and the p-adic Γ-function, Ann. Math., 109(1979), 569-581.

[Iw] KI. Iwasawa, Lectures on p-adic L-functions, Annals of Math. Studies, 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[Ka1] T. Kashio, p-adic analogue of Shintani's formula, RIMS Kokyuroku (in Japanese) 1324, Algebraic number theory and related topics, 2003, pp47-57.

[Ka2] T. Kashio, On a p-adic analogue of Shintani's formula, J. Math. Kyoto Univ. 45(2005), no. 1, 99-128.

[KY1] T.Kashio, H.Yoshida, On the p-adic absolute CM-Period symbol, RIMS Kokyuroku (in Japanese) 1451, Algebraic number theory and related topics, 2005, pp9-18.

[KY2] T. Kashio, H. Yoshida, On the p-adic absolute CM-Period symbol, Algebra and Number Theory: Proceedings of the Silver Jubilee Conference Univ. of Hyderabad, New Delhi, Hindustan Book Agency, 2005, 359-399.

[KY3] T. Kashio, H. Yoshida, On p-adic absolute CM-Periods, Proceedings of the 7-th Autumn Workshop on Number Theory, "Differential Operators on Modular Forms and Application", 2005, pp161-176.

[KY4] T. Kashio, H. Yoshida, p-adic absolute CM-Periods, Proceedings of the 8-th Autumn Workshop on Number Theory, "Periods and Modular Forms", to be appeared.

[Mo] Y. Morita, A p-adic analogue of the Γ function, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sect. IA Math. 22 (1975), no. 2, 255-266.

[Ro] A. M. Robert, A Course in p-adic Analysis, GTM 198, Springer-Verlag, 2000.

[Ro] A. M. Robert, The Gross-Koblitz Formula Revisited, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 105 (2001) pp. 157-170.

[S] G. Shimura, Abelian varieties with complex multiplication and modular functions, Princeton Math. Ser. 46, Princeton Univ. Press, 1998.

[Sh1] T. Shintani, On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 23 (1976), 393-417.

[Sh2] T. Shintani On values at $s = 1$ of certain L functions of totally real algebraic number fields, in Algebraic Number Theory, Proc. International Symp. Kyoto, 1976, 201-212, Kinokuniya, 1977.

[St1] H. M. Stark, L-functions at s=1, II, Artin L-functions with rational characters, Adv. Math. 17 (1975), no. 1, p60-92.

[St2] H. M. Stark, L-functions at s=1, III, Totally real fields and Hilbert's twelfth problem, Adv. Math. 22 (1976), no. 1, p64-84.

[St3] H. M. Stark, L-functions at s=1, IV, First derivatives at $s = 0$, Adv. Math. 35 (1980), no. 3, p197-235.

[Ta] J. Tate, Brumer-Stark-Stickelberger, Séminaire de Théorie des Nombres Univ. Bordeaux, (1980-81) exposé 24.

[Yo1] H. Yoshida, On absolute CM-Periods, Proc. Symposia Pure Math. 66, Part 1, 1999, 221-278.

[Yo2] H. Yoshida, On absolute CM-Periods II, Amer. J. Math. 120 (1998), 1199-1236.

[Yo3] H. Yoshida, Absolute CM-Periods, Mathematical surveys and Monographs vol. 106, AMS.