

System of nonlinear heat equation and Navier-Stokes equations

相転移現象を記述する非線形熱方程式と ナビエーストークス方程式の連立系について

岐阜高専 一般(自然) 深尾 武史 (Takesi FUKAO)
Gifu National College of Technology,

Abstract

In this paper we survey two existence results of weak solutions for the nonlinear heat equation with the convection. The first one is the system coupled with the Navier-Stokes equations in some unknown liquid region, so the problem is a free boundary problem. We find the weak solution by the regularization of the interface. The second one is the transmission problem between the solid-liquid and gas regions, here the convective vector is given in this problem. We can apply the abstract theory of the doubly nonlinear evolution equations.

1 チョクラルスキー結晶成長モデルと数値計算

チョコラルスキー (Czochralski) 法はシリコンやゲルマニウムなどの金属性物質の単結晶を精製する方法として広く用いられています。温度制御装置のついた坩堝に精製したい単結晶の物質 (この段階では多結晶) を入れ, 坩堝の内部温度を物質の融点以上まで上げ液体状にしておきます。この坩堝の温度は内部にある種のガスを入れることでうまくコントロールすることができるようになってきました。物質の温度を融点付近に保ち液体状の物質の表面に種結晶と呼ばれる単結晶を接着させ, さらにこの種結晶を回転させながら引き上げると, 液状物質が種結晶に付着固化し単結晶が成長していくというものです。結晶の向きがそろっているものほど良く, また固体の形状もできるだけ大きな半径の柱状のものが良いとされています。実際の精製現場では, 数値計算を応用しながら最終的には経験則を元に, 温度調節や引き上げ・回転速度を決定しています (例えば沢田-岡澤-高尾-田中-築島 [30], Vizman-Gräbner-Müller [36]). この Cz 法は数多くの複雑な現象を伴っており, それらに注目した様々な数理モデルが研究されています (例えば Crowley [6], Pawlow [26] など). 特にこれらモデルの中で熱伝導に注目すると, 熱の分布は固体-液体の相を決定する一つの要因であると考えられるため偏微分方程式によって領域の温度分布の時間発展をとらえることができます。そして結晶成長の様子を有限要素法などの数値シミュレーションの手法で再現することが可能となります。数理モデルが構築されれば数値計算を行うことができる可能が出てきますが, 理論的な可解性の保証は数値計算結果に対してある意味での裏付けとなります。

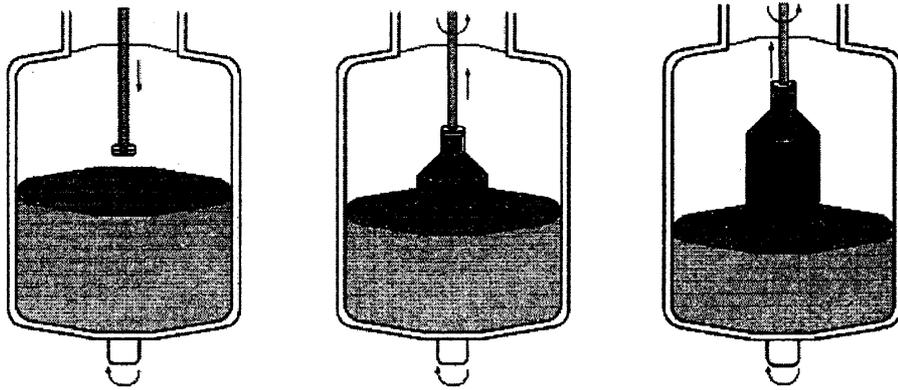


Fig.1 チョクラスキー法のイメージ

2 非線形熱方程式による相転移モデル

相転移現象と呼ばれる現象は工学の分野でしばしば登場する非常に興味深い現象です。特に温度0度を境に凝固融解する水と氷の振る舞いは固体液体間に見られる相転移現象の代表的な例です。ある温度を境にして劇的に状況が異なるこの現象の時間発展を記述するために、通常の数方程式を改良して様々な非線形偏微分方程式による記述が研究されてきました。一般的に強い非線形性を含んだ方程式ほど解の存在を通常の意味で証明するのは難しく、そこで方程式を弱形式で考えることで、ある意味での解の存在を保証するという手法が取られることがあります。また有限要素法は偏微分方程式を積分形式で、つまり弱形式で捉えて解析しているため、弱解の解釈が適合します。相転移現象に見られる強い非線形性を偏微分方程式で記述するために、連立系を含めて様々なモデルが提唱されていますが、ここでは「エンタルピー形式によるステファン問題」と呼ばれるモデルに注目します。

任意の時間区間 $[0, T]$, $0 < T < +\infty$ に対して, $\Omega_m(t) \subset \mathbb{R}^3$ を物質 (material) を意味する時間依存3次元有界領域とし, その境界 $\Gamma_m(t) := \partial\Omega_m(t)$ は十分なめらかとします。いま領域 $\Omega_m(t)$ は物性の異なる液体と固体という2種類の物質で満たされており, $\Omega_l(t)$ を液体 (liquid), $\Omega_s(t)$ を固体 (solid) と表現すれば, それらの境界面 $S(t)$ によって物質領域は $\Omega_m(t) = \Omega_l(t) \cup S(t) \cup \Omega_s(t)$ となりますが, この境界面 $S(t)$ は温度 $\theta := \theta(t, x)$ によって決定されることに注意が必要です。ステファン問題の詳しい説明は例えば Visintin [34] などにあります。さらに, 液体領域 $\Omega_l(t)$ では対流運動が熱伝導に影響すると考えられ, また固体領域 $\Omega_s(t)$ も物質領域の変形に伴い, 熱伝導を記述する方程式には移流項と呼ばれる1階の微分の項が未知関数 $\mathbf{v} := \mathbf{v}(t, x) = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))$ によって入ってきます。次節以降で偏微分方程式系の初期値境界値問題に対して弱い意味での解の存在を考えますが, 以下で2種類のモデルの導出について解説します。

2.1 非柱状領域内でのステファン問題とナビエーストークス方程式

Cz法において気体領域を考えないで固体・液体領域内のみで考察をすると, 問題は固体・液体領域が時間と共に変化するという状況での相転移問題と, とらえることができます。

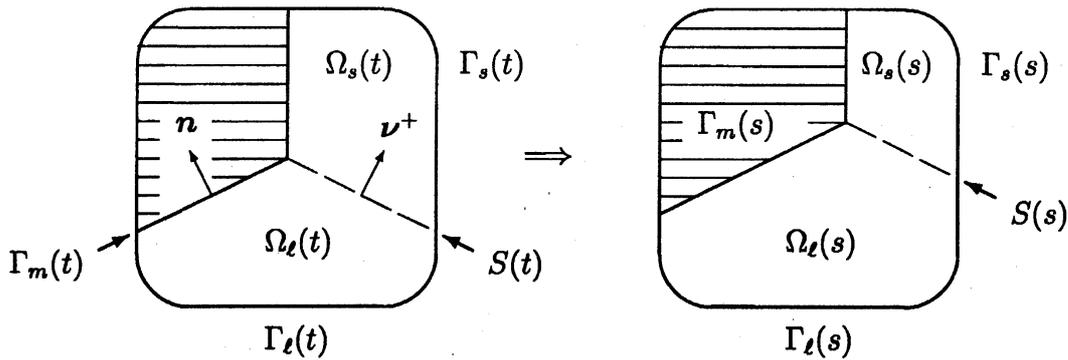


Fig.2 形式化した領域の時間依存のイメージ

ここで $p_\ell := p_\ell(t, x)$ を液体領域内の圧力とし、液体領域内ではナビエーストークス方程式により移流 \mathbf{v} の決定を行うことにします。液体領域 $\Omega_\ell(t)$ は温度によって決定される未知領域であるため、ここに数学的な難しさが出てきます。領域 $\Omega_m(t)$ の変形そのものもある種の問題を解くことで解として決定すべきですが自由境界値問題として難しさが増すために、今後モデル1では以下の条件を満たすように時間に関してなめらかな変形が与えられていると仮定します。

(A1) ある固定された領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ が存在し、その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は十分なめらかで常に $\Omega_m(t) \subset \Omega$ とする。さらにある変換 $\mathbf{y} \in C^3(\bar{Q}) := C^3(\bar{Q})^3$ が存在し、任意の時間 $t \in [0, T]$ に対して $\mathbf{y}(t, \cdot) := (y_1(t, \cdot), y_2(t, \cdot), y_3(t, \cdot))$ は $\bar{\Omega}$ から自分自身への C^3 -微分同相写像とする。そして

$$\mathbf{y}(t, \overline{\Omega_m(t)}) = \overline{\Omega_{m0}} \quad \text{for all } t \in [0, T], \quad \mathbf{y}(0, \cdot) = I \text{ on } \overline{\Omega_{m0}}.$$

ここで

$$Q_m := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_m(t), \quad Q_T := (0, T) \times \Omega_{m0}, \quad Q := (0, T) \times \Omega,$$

$$\Omega_\ell(t) := \{x \in \Omega_m(t); \theta(t, x) > 0\}, \quad \Omega_s(t) := \{x \in \Omega_m(t); \theta(t, x) < 0\},$$

とおき、各領域 $\Omega_\ell(t)$, $\Omega_s(t)$ では次の熱方程式によって温度分布が決定されるとします。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - k_\ell \Delta \theta = f \quad \text{in } Q_\ell := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_\ell(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - k_s \Delta \theta = f \quad \text{in } Q_s := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_s(t), \quad (2)$$

さらに境界 $S(t)$ 上では次の温度の釣り合い条件にあたるステファン条件を満たすとします。

$$\theta = 0, \quad k_\ell \frac{\partial \theta}{\partial \nu^-} + k_s \frac{\partial \theta}{\partial \nu^+} = L(\mathbf{v} \cdot \nu^- - v_\nu) \quad \text{on } S := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times S(t), \quad (3)$$

ここで $\nabla\theta := (\partial\theta/\partial x_1, \partial\theta/\partial x_2, \partial\theta/\partial x_3)$, $\Delta\theta := \sum_{i=1}^3 (\partial^2\theta/\partial x_i^2)$. $\nu^+ = \nu^+(t, x) := (\nu_1(t, x)^+, \nu_2(t, x)^+, \nu_3(t, x)^+)$ は $x \in S(t)$ における $S(t)$ 上 3次元単位法線で $\Omega_\ell(t)$ の向きに正; $\nu^- := -\nu^+$; k_ℓ, k_s , そして L は正定数, f は Q_m 上で与えられた関数とします. また v_ν は $S(t)$ の法線方向への速度です. 一方, 液体領域 Q_ℓ では, 非圧縮のナビエーストークス方程式によって移流が決定されるとします.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \Delta v = g(\theta) - \nabla p_\ell \quad \text{in } Q_\ell, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{in } Q_\ell, \quad (5)$$

ここで $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ は与えられたリプシッツ連続な関数とする. 例えばマラゴニーによる浮力の近似 $g(\theta) := (0, 0, g(1-\theta))$ などを考えます. ここでは g は正定数です. 一般化して g は非線形な関数とします. 液体領域と境界面では v は与えられた $v_D := (v_{D1}, v_{D2}, v_{D3})$ と一致するとします. すなわち

$$v = v_D \quad \text{in } Q_s \cup S. \quad (6)$$

そして, 次の境界値及び初期値を与えて初期値境界値問題を考えます.

$$k_\ell \frac{\partial \theta}{\partial n} + n_0 k_\ell \theta = q \quad \text{on } \Sigma_{m\ell} := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_{m\ell}(t), \quad (7)$$

$$k_s \frac{\partial \theta}{\partial n} + n_0 k_s \theta = q \quad \text{on } \Sigma_{ms} := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_{ms}(t), \quad (8)$$

$$v = v_D \quad \text{on } \Sigma_m := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_m(t), \quad (9)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad S(0) = S_0 \quad \text{on } \Omega_{m0} := \Omega_m(0), \quad (10)$$

$$v(0) = v_0 \quad \text{on } \Omega_{m0}, \quad (11)$$

ここで $i = \ell, s$ に対して $\Gamma_{mi}(t) := \partial\Omega_i(t) \cap \Gamma_m(t)$; $n = n(t, x) := (n_1(t, x), n_2(t, x), n_3(t, x))$ $x \in \Gamma_m(t)$ における 3次元外向き単位法線; n_0 は正定数; q, θ_0 と v_0 は与えられた関数; S_0 は初期の境界面 $S(t)$ の位置とします. ここで与えられた関数 v_D に対する仮定をします.

(A2) $v_D \in C^2(\bar{Q})$ は以下を満たす.

$$\operatorname{div} v_D(t, \cdot) = 0 \quad \text{in } \Omega_m(t) \quad \text{for all } t \in [0, T],$$

$$v_D \cdot n = v_n \quad \text{on } \Sigma_m,$$

ここで $v_n(t, \cdot)$ は $\Gamma_m(t)$ の法線方向への速度です.

仮定 (A1) によって与えられた変形速度 $\partial x / \partial t(t, y(t, x))$ は, この仮定を満たす v_D としての一例です. ここで, $x(t, \cdot) := y^{-1}(t, \cdot)$. 問題 (1)-(3) は古典的ステファン問題と呼ばれていて, θ に加え境界面 S もある滑らかさを持った解として見つける問題です. 境界面 S をも解として得るためには v に十分ななめらかさを要求することになり, 可解性の議論は

非常に難しくなることが予想されます。そこでエンタルピー形式によるステファン問題を考えます。今、新しく変数 $u := u(t, x)$ と関数 $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように導入します。

$$u := \begin{cases} \theta & \text{if } \theta < 0, \\ r \in [0, L] & \text{if } \theta = 0, \\ \theta + L & \text{if } \theta > 0, \end{cases} \quad \beta(r) := \begin{cases} k_s r & \text{if } r < 0, \\ 0 & \text{if } 0 \leq r \leq L, \\ k_\ell(r - L) & \text{if } r > L. \end{cases}$$

これらを用いれば先の古典的ステファン問題は非柱状領域 Q_m 上の退化放物型方程式に書き換えることができます(深尾-剣持-Pawłow [7])。また、新しい変数 u によって液体領域と固体領域を次のように定義します:

$$Q_\ell(u) := \left\{ (t, x) \in Q_m; u(t, x) > \frac{L}{2} \right\}, \quad Q_s(u) := \left\{ (t, x) \in Q_m; u(t, x) < \frac{L}{2} \right\}.$$

実際に u の定義からこれら領域は、温度が正の領域と負の領域として意味を持っていることが分かります。以上より初期値境界値問題 (1)-(11) は次の退化放物型方程式とナビエ-ストークス方程式の連立系となります。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \Delta \beta(u) = f \quad \text{in } Q_m, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}(\beta(u)) - \nabla p_\ell \quad \text{in } Q_\ell(u), \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } Q_\ell(u), \quad (14)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D \quad \text{in } Q_s(u), \quad (15)$$

$$\frac{\partial \beta(u)}{\partial \mathbf{n}} + n_0 \beta(u) = q, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_D \quad \text{on } \Sigma_m, \quad (16)$$

$$u(0) = u_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad \text{in } \Omega_{m0}, \quad (17)$$

ここで $u_0 := \theta_0 \chi_{\Omega_s(0)} + (\theta_0 + L) \chi_{\Omega_\ell(0)}$ で、 $i = \ell, s$ に対して $\chi_{\Omega_i(0)}$ は $\Omega_i(0)$ の特性関数です。仮定 (A1), (A2) のもとでの偏微分方程式系に対する初期値境界値問題 (12)-(17) をモデル 1 と呼ぶことにします。モデル 1 の可解性は第 3 節で取り扱います。

ステファン問題の研究は 1889 年に Josef Stefan がこの問題を提唱して以来数多くの研究がなされてきました。特にその弱形式についての可解性の議論において、領域が時間に関して変化しないときは Damlamian [7] によって時間依存劣微分作用素を用いる方法により弱解の一意存在が証明されています。またモデリングの立場から大きな前進のあった研究として、DiBenedetto-O'Leary [8] があります。それまでのステファン問題では最も単純化されたタイプの非線形熱方程式を解析することを主にしていたのに対し、彼らは液体、固体領域の本質的な違いの一つである移流の存在に注目しました。液体領域ではストークス方程式で与えられる移流項を含んだ方程式を構成し、そのシステムに対する弱解の存在を証明しました。また、Rodrigues [28] により、与えられた移流項を含む様々なタイプの Stefan 問題の可解性が議論されています。また、対流・移流項の付いた問題は Rodrigues-Yi [29] や Rodrigues [28] で金属の鑄造問題として弱解の一意存在が議論されています。一方、領域が時間に関して変化するステファン問題は対流・移流項を無視した形で剣持-Pawłow [20] によって Cz 法の問題として取り扱われています。深尾-剣持-Pawłow [13] では、領域の変形と移流を十分滑らかに与えて弱解の存在と一意性が取り扱われました。さらにその

解の有界性の議論が深尾-剣持 [11] で報告されています. また Casella-Giangi [5] では液体領域内での移流の決定にナビエ-ストークス方程式を制限付きで考察し, その解による移流項を含むステファン問題の弱解の存在が議論されました. その制限は端的に言って, 領域すべてをいわゆる液体領域と見て, ナビエ-ストークス方程式を考察しています. ただし, 温度に依存して摂動項の係数を劇的に変化させ, 数値計算的な意味でいわゆる固体領域では液体領域に比べ移流の数値が限りなく 0 に近くなるようなモデルでした. 実際, 彼らの論文では 2 次元の数値計算結果も報告されています. 一般にステファン問題の弱解からのアプローチでは, 自由境界の滑らかさが議論できないため, 流体領域を開集合として決定することができません. そのため [5] では前述のような制限を加えた問題が考察されていました. 第 3 節ではモデル 1 に対して, ある種の近似解を定義しその極限でオリジナルの問題の弱解を定義することで, この制限の入れ方とは異なる手法でステファン問題とナビエ-ストークス方程式のシステムを考察します.

2.2 接合条件を課したステファン問題

次に Cz 法を固体・液体そして気体領域の 3 相問題として考察したモデルを紹介します. 前節の表記に加えて $\Omega_g(t)$ を気体 (gas) の領域とし,

$$Q_g := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Omega_g(t),$$

とおく. このとき, 坩堝の領域を Ω とし, $\Omega := \Omega_m(t) \cup \Omega_g(t) \cup \Gamma_{gl}(t) \cup \Gamma_{gs}(t)$ と表現しておきます. 境界それぞれ次の表記を用います. $\Gamma := \partial\Omega = \Gamma_\ell(t) \cup \Gamma_s(t) \cup \Gamma_g(t)$; $\partial\Omega_i(t) := \Gamma_i(t) \cup \Gamma_{gi}(t) \cup S(t)$ for $i = \ell, s$; $\partial\Omega_g(t) := \Gamma_g(t) \cup \Gamma_{gl}(t) \cup \Gamma_{gs}(t)$;

$$\Sigma_i := \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_i(t), \quad i = \ell, s, g, gl, gs.$$

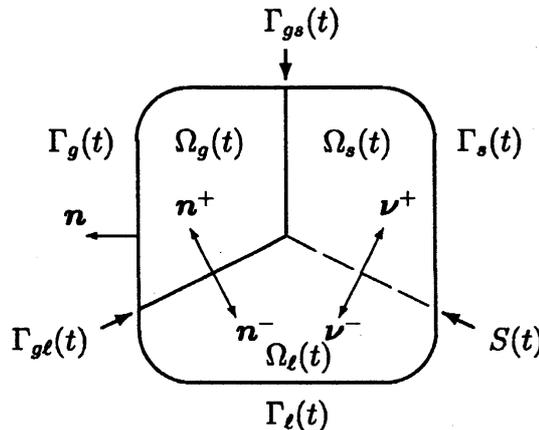


Fig.3 形式化した 3 相問題の領域のイメージ

このとき, $\Omega_g(t)$ 上では (1) や (2) と同じ方程式を考え, さらに $\Gamma_{gl}(t)$ と $\Gamma_{gs}(t)$ 上での条件として接合条件 (18) を課す.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta - k_i \Delta \theta = f \quad \text{in } Q_i, \quad i = \ell, s, g,$$

$$\begin{aligned}
\theta_\ell = \theta_s = 0, \quad & \left(k_\ell \frac{\partial \theta_\ell}{\partial \nu^-} + k_s \frac{\partial \theta_s}{\partial \nu^+} \right) = L(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}^- - v_\nu) \quad \text{on } S, \\
\theta_i = \theta_g, \quad & k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \mathbf{n}^-} + k_g \frac{\partial \theta_g}{\partial \mathbf{n}^+} = 0 \quad \text{on } \Sigma_{gi}, \quad i = \ell, s, \\
k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial \mathbf{n}} + n_0 \theta_i = p \quad & \text{on } \Sigma_i, \quad i = \ell, s, g, \\
\theta(0, \cdot) = \theta_0 \quad & \text{on } \Omega(0), \quad S(0) = S_0.
\end{aligned} \tag{18}$$

この初期値境界値問題の弱解の存在はタイプ M 作用素, 擬単調作用素の理論を用いて得られる, 阿曾-深尾-剣持 [2] による二重非線形発展方程式の一般論によって弱解の存在が証明できます.

3 モデル1の可解性について

本節ではモデル1に対して近似解の極限によって弱解を定義して, その存在定理を証明します. 一般的に, 連立の偏微分方程式系に対して可解性を証明とき, 不動点定理が有効である場合が多いですが, 3次元のナビエ-ストークス方程式に対する弱解の一意性の欠落から, 今回の問題では不動点定理を応用することはできません. そこで, まずは時間区間の離散化と時間遅れの方法により, 近似解の構成を行います. そして, Aubin [1] のコンパクト性の定理, [31] を参照, を応用し極限移行を行う手順で証明を行います.

以下 Q_m 上の関数 u や $\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3)$ に対して $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ への 0-拡張も同じ表記を用いることにします. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\rho_\varepsilon := \rho_\varepsilon(x)$ を空間変数 $x \in \mathbb{R}^3$ に対する軟化子とし, $\rho_\varepsilon * u$ を定義します. 一方

$$H := L^2(\Omega_{m0}), \quad V := H^1(\Omega_{m0}) \quad (:= W^{1,2}(\Omega_{m0})),$$

で V^* は V の共役空間とします. また,

$$\mathcal{D}_\sigma(\Omega) := \left\{ z \in C_0^\infty(\Omega); \operatorname{div} z = 0 \text{ in } \Omega \right\},$$

$$H := L_\sigma^2(\Omega), \quad Y := L_\sigma^4(\Omega), \quad V := H_\sigma^1(\Omega), \quad X := W_\sigma^{1,4}(\Omega),$$

とおき, ここで $L_\sigma^2(\Omega)$, $L_\sigma^4(\Omega)$, $H_\sigma^1(\Omega)$, そして $W_\sigma^{1,4}(\Omega)$ は $\mathcal{D}_\sigma(\Omega)$ の $L^2(\Omega)$, $L^4(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, そして $W^{1,4}(\Omega)$ に対する閉包とします. このときこれら空間には

$$X \subset V \hookrightarrow Y \subset H \subset Y^* \hookrightarrow V^* \subset X^*.$$

なる埋め込みがあります. ここで \hookrightarrow は埋め込みがコンパクトであることを意味しています. 一般に非柱状領域の問題では境界条件によって証明のアプローチが異なります. ナビエ-ストークス方程式は非斉次ディリクレ境界条件を課しているので斉次ディリクレ問題に書き換えることで柱状領域への 0-拡張ができます. そこで $\mathbf{w} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_D$ でさらに $\mathbf{w}_0 := \mathbf{v} - \mathbf{v}_D(0)$ とおくと

$$\mathbf{w} = 0 \quad \text{on } Q_\sigma(u) \cup S \text{ and on } \Sigma_m. \tag{19}$$

ここで w に対するナビエーストクス方程式の弱形式を用意します.

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\eta', w)_H dt + \int_0^T a(w, \eta) dt + \int_0^T b(t; w, w, \eta) dt + \int_0^T c(t; w, \eta) dt \\ & = \int_0^T (g_L(\beta(u)), \eta)_H dt + (w_0, \eta(0))_H \quad \forall \eta \in W(u), \end{aligned} \quad (20)$$

同時に $w = 0$ a.e. on $Q_s(u)$ を満たすことを要請します. ここで

$$W(u) := \left\{ \eta \in L^4(0, T; \mathbf{X}); \quad \eta' \in L^2(0, T; \mathbf{H}), \quad \eta(T, \cdot) = 0 \text{ a.e. on } \Omega, \quad \eta = 0 \text{ a.e. on } Q \setminus Q_\ell(u) \right\};$$

で, $\eta' := \partial\eta/\partial t$ を意味します. さらに任意の $t \in [0, T]$ に対して, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b(t; \cdot, \cdot, \cdot) : Y \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, そして $c(t; \cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$a(z, \eta) := \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \nabla z_i \cdot \nabla \eta_i dx \quad \forall z, \eta \in V,$$

$$b(t; z, \bar{z}, \eta) := \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} ((z + v_D(t)) \cdot \nabla \bar{z}_i) \eta_i dx \quad \forall z, \bar{z}, \eta \in V,$$

$$c(t; z, \eta) := \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} (z \cdot \nabla v_{D_i}(t)) \eta_i dx \quad \forall z, \eta \in H,$$

で定義します. ここで任意の $z \in L^2(Q)$ に対して $g_L(z) \in L^2(0, T; \mathbf{H})$ はルレイ射影 $P_L : L^2(\Omega) \rightarrow H$ を用いて

$$g_L(z) := \begin{cases} P_L \left[g(z) - \frac{\partial v_D}{\partial t} - (v_D \cdot \nabla) v_D + \nu_t \Delta v_D \right] & \text{on } Q_m, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で定義します. 一方, ステファン問題はノイマン境界条件を課しているため 0-拡張による柱状領域の問題への変換はできませんが, その弱形式は

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_m} u \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt - \int_{Q_m} (v \cdot \nabla \eta) u dx dt + \int_{Q_m} \nabla \beta(u) \cdot \nabla \eta dx dt + n_0 \int_{\Sigma_m} \beta(u) \eta d\Gamma_m(t) dt \\ & = \int_{Q_m} f \eta dx dt + \int_{\Sigma_m} q \eta d\Gamma_m(t) dt + \int_{\Omega_{m_0}} u_0 \eta(0) dx \quad \forall \eta \in W, \end{aligned} \quad (21)$$

となります ([13] を参照). ここで, $W := \{\eta \in H^1(Q_m); \eta(T) = 0\}$ でテスト関数のクラスを定義しておきます.

これら弱形式の個々の可解性, すなわち与えられた $\beta(\bar{u})$ に対する非柱状領域内でのナビエーストクス方程式の可解性や, 与えられた移流 \bar{u} に対するステファン問題の可解性はすでに数多くの弱解の存在に関する結果があります. 非柱状領域内でのナビエーストクス方程式の可解性は藤田-Sauer [9], 井上-脇本 [15], 井上-大谷 [16], 剣持 [18], 森本 [23],

大谷-山田 [25], 山田 [35] などがあります. 例えば剣持 [18] の方法では Aubin [1] による埋め込みの方法を拡張して弱解の存在を証明しています. 一方, 移流項を含んだステファン問題に関しては, Rodrigues [28] や Rodrigues-Yi [29] によって可解性が取り扱われました. そして深尾-剣持-Pawlow [13] によって非柱状領域内での問題へ拡張されています. これらの連立系に対しては近年, Casella-Giangi [5] により 2 次元で, ある近似方程式の問題において弱解の存在が証明されました. そこでは未知な液体領域と固体領域を区別せず, 固体領域を粘性の大きい液体と見なして全体領域でのナビエ-ストークス方程式を考察するという, 近似の項を加えたモデルでした. その理由はステファン問題の弱解 u の連続性の欠如にあります. 自由境界値問題として固体液体領域の境界を表現するのに十分な滑らかさ, 例えば $u \in C(\overline{Q_m})$ を得るには, 問題を古典的な意味で捉え, 例えばヘルダー連続な強解をとらえるしかありません. エンタルピー形式によるステファン問題は, その非線形性から十分ななめらかさを確保することはとても難しいことが容易に分かります. そこでここでは [5] の方法とは異なる形で近似問題を考察することにします. 今, 液体領域 $Q_\ell(u)$ と固体領域 $Q_s(u)$ を $Q_\ell(\rho_\varepsilon * u)$, $Q_s(\rho_\varepsilon * u)$ によって, さらにテスト関数のクラス $W(u)$ を $W(\rho_\varepsilon * u)$ によって置き換えた問題を考えます.

定義 3.1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $u_\varepsilon \in L^\infty(Q_m)$ そして $v_\varepsilon \in L^2(Q)$ なる関数の対 $\{u_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon\}$ が以下の (D1)-(D3) を満たすとき, $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ をモデル 1 の近似解と呼ぶ.

(D1) $\beta(u_\varepsilon) \in L^\infty(Q_m)$, $\int_0^T |\beta(u_\varepsilon(t))|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 dt < +\infty$ でさらに

$$t \mapsto \int_{\Omega_m(t)} u_\varepsilon(t, x) \xi(x) dx \text{ は } [0, T] \text{ 上連続 } \forall \xi \in H.$$

(D2) $w_\varepsilon := v_\varepsilon - v_D \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, w_ε は $[0, T]$ 上 H に値を持つ関数として連続で, $w_\varepsilon = 0$ a.e. on $Q_s(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)$.

(D3) u_ε と v_ε は以下の弱形式を満たす

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_m} u_\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt - \int_{Q_m} (\tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \eta) u_\varepsilon dx dt + \int_{Q_m} \nabla \beta(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta dx dt + n_0 \int_{\Sigma_m} \beta(u_\varepsilon) \eta d\Gamma_m(t) dt \\ & = \int_{Q_m} f \eta dx dt + \int_{\Sigma_m} q \eta d\Gamma_m(t) dt + \int_{\Omega_{m_0}} u_0 \eta(0) dx \quad \forall \eta \in W, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\eta', w_\varepsilon)_H dt + \int_0^T a(w_\varepsilon, \eta) dt + \int_0^T b(t; w_\varepsilon, w_\varepsilon, \eta) dt + \int_0^T c(t; w_\varepsilon, \eta) dt \\ & = \int_0^T (g_L(\beta(u_\varepsilon)), \eta)_H dt + (w_0, \eta(0))_H \quad \forall \eta \in W(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

ここで $w_\varepsilon = v_\varepsilon - v_D$.

定理 3.2. [深尾-剣持 [11]] (A1) と (A2) を仮定し, さらに $f \in L^\infty(Q_m)$, $q \in L^\infty(\Sigma_m)$, $g \in C^{0,1}(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\Omega_{m_0})$, そして $v_0 \in L^2(\Omega_{m_0})$ で Ω_{m_0} 上 $\operatorname{div} v_0 = 0$ を満たすとする. このとき任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ に対して, モデル 1 の近似解 $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ が少なくとも一つ存在し

$$|u_\varepsilon|_{L^\infty(Q_m)} + \int_0^T |\nabla \beta(u_\varepsilon(t))|_{L^2(\Omega_m(t))}^2 dt \leq R, \quad (24)$$

そして

$$|w_\varepsilon|_{L^\infty(0,T;H)} + |w_\varepsilon|_{L^2(0,T;V)} \leq R, \quad (25)$$

を満たす. ここで R は $|u_0|_{L^\infty(\Omega_{m_0})}$, $|f|_{L^\infty(Q_m)}$, $|q|_{L^\infty(\Sigma_m)}$, そして $|v_D|_{C^2(\bar{Q})}$ に依存し $\varepsilon \in (0, 1]$ には依存しない正定数である.

さらに $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ の極限として次のステファン問題の弱解の存在定理を得ることができます.

定理 3.3. [深尾-剣持 [11]] 定理 3.2 と同様の仮定の下, $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を定理 3.2 で構成された近似解とする. このときある部分列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在して $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $(n \rightarrow +\infty)$ を満たし

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u \quad \text{weakly in } L^2(Q_m),$$

$$w_{\varepsilon_n} := v_{\varepsilon_n} - v_D \rightarrow w \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty,$$

で, さらに移流 $v := w + v_D$ に対して u はステファン問題の弱形式 (22) を満たす.

定理 3.3 で $\{v_{\varepsilon_n}\}$ の極限として得られた v がナビエ-ストークス方程式の弱形式 (23) を満たすかどうかは確認することができません. なぜなら u の連続性の欠如から, ナビエ-ストークス方程式を考察する液体領域 $Q_\ell(u)$ がそもそも開集合かどうか確認できないからです. 注として, この点を改良するためには見方を変えて, モデルを再構築するという手法も考えられます. 特に, ステファン問題と強い関連を持つ, 偏微分方程式系であるフェイズフィールド方程式において領域決定をする未知関数の連続性を獲得する方法も Planas-Boldrini [27] などにより研究されています.

定理 3.2 と 3.3 の証明では以下の点が重要になります. それぞれの方程式に対して, ある種の評価が得られることがすでに分かっています. しかしそれらの評価は方程式が連立であるため, u や $\beta(u)$ の評価には w が, 逆に w の評価には u や $\beta(u)$ が依存することが容易に予想できます. しかしある位相に関しては, 連立であるにもかかわらず, 相手の関数に依存しない評価が得られます. そしてどの様な位相に関して相手に依存しない評価が得られるかが重要になります. また, それは一意性なしに解を構成する方法にも重要な意味を持ってきます.

以後, 任意の $s_0, s \in [0, T]$ で $0 \leq s_0 \leq s \leq T$ なるものに対して,

$$Q(s_0, s) := (s_0, s) \times \Omega, \quad Q_m(s_0, s) := \bigcup_{t \in (s_0, s)} \{t\} \times \Omega_m(t),$$

$$\Sigma(s_0, s) := (s_0, s) \times \Gamma, \quad \Sigma_m(s_0, s) := \bigcup_{t \in (s_0, s)} \{t\} \times \Gamma_m(t),$$

とおきます.

性質 3.4 (cf. [11], [12]) \tilde{v} を Q 上で定義された関数で $\tilde{v} \in L^\infty(s_0, s; H) \cap L^2(s_0, s; V)$ で, さらに $\tilde{v} = v_D$ a.e. on $Q(s_0, s) \setminus Q_m(s_0, s)$ とする. 任意の $s_0, s \in [0, T]$ と $\tilde{u}_0 \in L^\infty(\Omega_m(s_0))$ に対して少なくとも一つ $Q_m(s_0, s)$ 上の関数 \tilde{u} が存在して,

(i) $\tilde{u} \in L^\infty(Q_m(s_0, s))$, $\beta(\tilde{u}(t)) \in H^1(\Omega_m(t))$ for a.e. $t \in (s_0, s)$ で

$$\int_{s_0}^s |\beta(\tilde{u}(t))|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 dt < +\infty,$$

さらに \tilde{u} は $[s_0, s]$ 上 H に値を持つ関数として弱連続である.

(ii) \tilde{u} は弱形式 (22) を (s_0, s) 上で満たす. ただし, このとき $\eta \in H^1(Q_m(s_0, s))$ で $\eta(s) = 0$ を満たすものとする.

(iii) 正定数 R_1 を

$$R_1 := \max \left\{ L, |f|_{L^\infty(Q_m(s_0, s))}, \left| \frac{q}{n_0} \right|_{L^\infty(\Sigma_m(s_0, s))}, |\beta(\tilde{u}_0)|_{L^\infty(\Omega_m(s_0))} \right\},$$

とすれば, 次の \tilde{v} に依存しない評価 $|\beta(\tilde{u})|_{L^\infty(Q_m(s_0, s))} \leq R_1(1 + s - s_0)$ が得られる. すなわち

$$|\tilde{u}|_{L^\infty(Q_m(s_0, s))} \leq \max \left\{ \frac{R_1}{k_s}, \frac{R_1}{k_\ell} + L \right\} (1 + s - s_0) =: R_2.$$

(iv) 次の \tilde{v} に依存しない評価が得られる.

$$\int_{\Omega_m(s)} \hat{\beta}(\tilde{u}(s)) dx + c_1 \int_{s_0}^s |\beta(\tilde{u})|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 dt \leq \int_{\Omega_m(s_0)} \hat{\beta}(\tilde{u}_0) dx + R_3(s - s_0), \quad (26)$$

ここで, R_3 は $R_1, R_2, \text{vol } \Omega$ のみに依存する正定数, また $\hat{\beta}$ は $\hat{\beta}(0) = 0$ を満たす β の原始関数, c_1 は

$$c_1 |z|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 \leq |\nabla z|_{L^2(\Omega_m(t))}^2 + n_0 |z|_{L^2(\Gamma_m(t))}^2 \quad \forall z \in H^1(\Omega_m(t)), \quad \forall t \in [0, T].$$

を満たす正定数.

注 3.5 (cf. [11]) 上の性質で得られる \tilde{u} と与えられた移流 \tilde{v} との連続依存性について述べておきます. $\{\tilde{v}_n\}$ が $L^\infty(s_0, s; \mathbf{H})$, そして $L^2(s_0, s; \mathbf{V})$ の位相で有界でさらに

$$\tilde{v}_n = v_D \quad \text{a.e. on } Q(s_0, s) \setminus Q_m(s_0, s) \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

$$\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{v} \quad \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty(s_0, s; \mathbf{H}) \quad \text{weakly in } L^2(s_0, s; \mathbf{V}) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty,$$

とします. \tilde{u}_n を性質 3.4 による関数族, \tilde{u} を $\{\tilde{u}_{n_k}\}$ の $L^\infty(Q_m(s_0, s))$ での weak-* 極限とする. このとき \tilde{u} は移流 \tilde{v} に対する性質 3.4 の (i) から (iv) を満たす関数となっていて, さらに

$$\tilde{u}_{n_k}(t) \rightarrow \tilde{u}(t) \quad \text{weakly in } L^2(\mathbb{R}^3) \quad \text{and uniformly in } t \in [s_0, s],$$

$$\beta(\tilde{u}_{n_k}) \rightarrow \beta(\tilde{u}) \quad \text{in } L^2((s_0, s) \times \mathbb{R}^3) \quad \text{as } k \rightarrow +\infty.$$

性質 3.6. (cf. [9], [19]) $\tilde{p} \in L^\infty(Q(s_0, s))$ で $\tilde{p} \geq 0$ a.e. on $Q(s_0, s)$, $\tilde{g}_L \in L^2(s_0, s; \mathbf{H})$ で $\tilde{w}_0 \in \mathbf{H}$ とする. このとき少なくとも一つ \tilde{w} が存在して

(i) $\tilde{w} \in L^\infty(s_0, s; \mathbf{H}) \cap L^2(s_0, s; \mathbf{V})$ で, さらに $\tilde{w} = 0$ a.e. on $Q(s_0, s) \setminus Q_m(s_0, s)$, そして \tilde{w} は $[s_0, s]$ 上 \mathbf{H} に値を持つ関数として弱連続.

(ii) \tilde{w} は以下の弱形式を満たす.

$$\begin{aligned} & - \int_{s_0}^s (\eta', \tilde{w})_H d\tau + \int_{s_0}^s a(\tilde{w}, \eta) d\tau + \int_{s_0}^s b(\tau; \tilde{w}, \tilde{w}, \eta) d\tau \\ & + \int_{s_0}^s c(\tau; \tilde{w}, \eta) d\tau + \int_{s_0}^s (P_L(\tilde{p}\tilde{w}), \eta)_H d\tau = \int_{s_0}^s (\tilde{g}_L, \eta)_H d\tau + (\tilde{w}_0, \eta(0))_H \quad (27) \\ & \quad \forall \eta \in W_0(s_0, s), \end{aligned}$$

ここで任意の $s_0, s \in [0, T]$ に対して

$$W_0(s_0, s) := \left\{ \begin{array}{l} \eta' \in L^2(s_0, s; H), \\ \eta \in L^4(s_0, s; X); \\ \eta(s, \cdot) = 0 \text{ a.e. on } \Omega, \\ \eta = 0 \text{ a.e. on} \\ Q(s_0, s) \setminus Q_m(s_0, s) \end{array} \right\}.$$

(iii) 任意の $t \in [s_0, s]$ に対して, \tilde{w} は以下の評価を満たす.

$$\frac{1}{2} |\tilde{w}(t)|_H^2 + c_2 \int_{s_0}^t |\tilde{w}(\tau)|_V^2 d\tau + \int_{Q(s_0, t)} \tilde{p} |\tilde{w}|^2 dx d\tau \leq \frac{1}{2} |\tilde{w}_0|_H^2 + \int_{s_0}^t (\tilde{g}_L, \tilde{w})_H d\tau, \quad (28)$$

ここで c_2 は $\tilde{w}_0, \tilde{g}_L, \tilde{p}$ と区間 $[s_0, s]$ に依存しない正定数.

今 (28) の右辺は最終的には \tilde{g}_L のリプシッツ連続性から $\beta(u)$ の評価に依存することになります. 性質 3.4 から連立系においても $\beta(u)$ の最大値が v に依存しない形で得られること, 性質 3.6 から処罰法を用いて領域 $Q_\varepsilon(\rho_\varepsilon * u)$ の依存性を処理できることが期待できます. よって一意性がなくとも以下のような時間遅れの方法が利用できます.

区間 $[0, T]$ の分割を $0 = t_0^N < t_1^N < t_2^N < \dots < t_N^N = T$ とし,

$$t_k^N = kh_N \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, N \quad \text{with } h_N = \frac{T}{N},$$

とおきます. 次の手順で区間 $[t_{k-1}^N, t_k^N]$ 上の連立系の解を構成すれば, その極限移行によって弱解の存在が保証できます. 今, f, g, u_0 , そして v_0 を与えられた関数とします. さらに任意の $s, t \in [0, T]$ に対して $\Theta_{t,s}(\cdot)$ を次で定義される Ω 上の C^3 -微分同相写像とする.

$$\Theta_{t,s}(x) = \mathbf{x}(s, \mathbf{y}(t, x)) \quad \forall x \in \Omega,$$

ここで $\mathbf{x}(s, \cdot) = \mathbf{y}^{-1}(s, \cdot)$ でした. つまり $\Theta_{t,s}$ は $\Omega_m(t)$ を $\Omega_m(s)$ へ移す写像です. 今, 任意の固定した変数 $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ に対して, $u_{\varepsilon\delta, k}^N$ と $w_{\varepsilon\delta, k}^N$ の $1 \leq k \leq N$ での集合族を次のように構成します:

(1) $w_{\varepsilon\delta, 1}^N$ は, 区間 $[0, t_1^N]$ 上の性質 3.6 から構成される関数とする. ここで $\tilde{w}_0, \tilde{p}, \tilde{g}_L$ は

$$\tilde{w}_0 := v_0 - v_D(0) \quad \text{on } \Omega,$$

$$p_{\varepsilon\delta, 0}^N(t, x) := \left[\rho_\varepsilon * \left(u_0(\mathbf{y}(t, \cdot)) - \frac{L}{2} \right) \right]^- (x),$$

$$\tilde{g}_{\varepsilon\delta, 0}^N(t, x) := g_L(\beta(u_0(\mathbf{y}(t, x)))) \quad \forall (t, x) \in Q(0, t_1^N);$$

(2) $u_{\varepsilon\delta,1}^N$ は, 区間 $[0, t_1^N]$ 上の性質 3.4 から構成される関数とする. ここで \tilde{u}_0, \tilde{v} は

$$\tilde{u}_0 = u_0 \quad \text{on } \Omega_{m0},$$

$$v_{\varepsilon\delta,1}^N := w_{\varepsilon\delta,1}^N + v_D \quad \text{on } Q(0, t_1^N);$$

(3) $2 \leq k \leq N$ に対して $w_{\varepsilon\delta,k}^N$ は, 区間 $[t_{k-1}^N, t_k^N]$ 上の性質 3.6 から構成される関数とする. ここで $\tilde{w}_0, \tilde{p}, \tilde{g}_L$ は

$$\tilde{w}_0 := w_{\varepsilon\delta,k-1}^N(t_{k-1}^N) \quad \text{on } \Omega,$$

$$p_{\varepsilon\delta,k-1}^N(t, x) := \left[\rho_\varepsilon * \left(u_{\varepsilon\delta,k-1}^N(t - h_N, \Theta_{t,t-h_N}(\cdot)) - \frac{L}{2} \right) \right]^- (x),$$

$$\tilde{g}_{\varepsilon\delta,k-1}^N(t, x) := g_L \left(\beta(u_{\varepsilon\delta,k-1}^N(t - h_N, \Theta_{t,t-h_N}(x))) \right) \quad \forall (t, x) \in Q(t_{k-1}^N, t_k^N);$$

(4) $2 \leq k \leq N$ に対して $u_{\varepsilon\delta,k}^N$ は, 区間 $[t_{k-1}^N, t_k^N]$ 上の性質 3.4 から構成される関数とする. ここで \tilde{u}_0, \tilde{v} は

$$\tilde{u}_0 := u_{\varepsilon\delta,k-1}^N(t_{k-1}^N) \quad \text{on } \Omega_m(t_{k-1}^N),$$

$$v_{\varepsilon\delta,k}^N := w_{\varepsilon\delta,k}^N + v_D \quad \text{on } Q(t_{k-1}^N, t_k^N).$$

以上から構成される関数族を用いて任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して, Q_m 上の関数 $u_{\varepsilon\delta}^N$ と Q 上の関数 $w_{\varepsilon\delta}^N$ が

$$u_{\varepsilon\delta}^N(t, x) := u_{\varepsilon\delta,k}^N(t, x), \quad \text{if } t \in [t_{k-1}^N, t_k^N] \text{ and } x \in \Omega_m(t),$$

$$w_{\varepsilon\delta}^N(t, x) := w_{\varepsilon\delta,k}^N(t, x) \quad \text{if } t \in [t_{k-1}^N, t_k^N] \text{ and } x \in \Omega,$$

で構成できます.

補題 3.7. $w_{\varepsilon\delta}^N$ に依存しない正定数 R_4 を

$$R_4 := \max \left\{ L, |f|_{L^\infty(Q_m)}, \left| \frac{q}{n_0} \right|_{L^\infty(\Sigma_m)}, |\beta(u_0)|_{L^\infty(\Omega_{m0})} \right\},$$

とおけば

$$|\beta(u_{\varepsilon\delta}^N)|_{L^\infty(Q_m)} \leq R_4 \left(1 + \frac{T}{N} \right)^N < R_4 \exp(T), \quad (29)$$

$$|u_{\varepsilon\delta}^N|_{L^\infty(Q_m)} \leq \max \left\{ \frac{R_4}{k_s}, \frac{R_4}{k_l} + L \right\} \exp(T) =: R_5, \quad (30)$$

が任意の $\varepsilon \in (0, 1]$, $\delta \in (0, 1]$, そして $N \in \mathbb{N}$ で成り立ち, $w_{\varepsilon\delta}^N$ に依存しないある正定数 R_6, R_7 が存在して,

$$\int_0^T |\beta(u_{\varepsilon\delta}^N(t))|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 dt \leq R_6, \quad (31)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |w_{\varepsilon\delta}^N(t)|_H \leq R_7, \quad |w_{\varepsilon\delta}^N|_{L^2(0,T;V)} \leq R_7, \quad \frac{1}{\delta} \int_Q p_{\varepsilon\delta}^N |w_{\varepsilon\delta}^N|^2 dx dt \leq R_7, \quad (32)$$

$$\forall \varepsilon \in (0, 1], \forall \delta \in (0, 1] \text{ and } \forall N \in \mathbb{N}.$$

証明 略.

定理 3.2 の証明 補題 3.7 の評価により, ある部分列 $\{N_n\}$ が存在し $N_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) で,

$$u_{\varepsilon\delta}^{N_n} \rightarrow u_{\varepsilon\delta} \text{ weakly-}^* \text{ in } L^\infty(Q_m),$$

$$w_{\varepsilon\delta}^{N_n} \rightarrow w_{\varepsilon\delta} \text{ weakly in } L^2(0, T; \mathbf{V}), \text{ weakly-}^* \text{ in } L^\infty(0, T; \mathbf{H}) \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

今 $v_{\varepsilon\delta} := w_{\varepsilon\delta} + v_D$ とおけば, 注 3.5 の連続依存性より,

$$u_{\varepsilon\delta}^{N_n}(t) \rightarrow u_{\varepsilon\delta}(t) \text{ weakly in } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ and uniformly in } t \in [0, T], \quad (33)$$

$$\beta(u_{\varepsilon\delta}^{N_n}) \rightarrow \beta(u_{\varepsilon\delta}) \text{ in } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3) \text{ as } n \rightarrow +\infty. \quad (34)$$

補題 3.7 の評価により $\{d/dt w_{\varepsilon\delta}^{N_n}\}$ は $L^{4/3}(0, T; \mathbf{X}^*)$ で, さらに $\{w_{\varepsilon\delta}^{N_n}\}_{N \in \mathbb{N}}$ は $L^2(0, T; \mathbf{V})$ で有界であることが分かります. 今 $\mathbf{V} \hookrightarrow \mathbf{H} \subset \mathbf{X}^*$ な埋め込みがあるので Aubin のコンパクト性の定理 [22] によって, $\{w_{\varepsilon\delta}^{N_n}\}$ は $L^2(0, T; \mathbf{H})$ で相対コンパクトです. よって

$$w_{\varepsilon\delta}^{N_n} \rightarrow w_{\varepsilon\delta} \text{ in } L^2(0, T; \mathbf{H}) \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (35)$$

今,

$$\tilde{u}_{\varepsilon\delta}^{N_n}(t, x) = \begin{cases} u_0(\mathbf{y}(t, x)) & \text{if } (t, x) \in Q_m(0, t_1^{N_n}), \\ u_{\varepsilon\delta}^{N_n}(t - h_{N_n}, \Theta_{t, t-h_{N_n}}(x)) & \text{if } (t, x) \in Q_m(t_1^{N_n}, T), \end{cases}$$

とおけば

$$\rho_\varepsilon * \tilde{u}_{\varepsilon\delta}^{N_n} \rightarrow \rho_\varepsilon * u_{\varepsilon\delta} \text{ uniformly on } [0, T] \times \mathbb{R}^3, \quad (36)$$

そしてさらに

$$p_{\varepsilon\delta}^{N_n} \rightarrow p_{\varepsilon\delta} := \left[\rho_\varepsilon * \left(u_{\varepsilon\delta} - \frac{L}{2} \right) \right]^- \text{ uniformly on } [0, T] \times \mathbb{R}^3. \quad (37)$$

$$g_L(\beta(u_{\varepsilon\delta}^{N_n})) \rightarrow g_L(\beta(u_{\varepsilon\delta})) \text{ in } L^2(0, T; \mathbf{H}) \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (38)$$

この関数族に対して $\delta \rightarrow 0$ としたときの収束先が, 今求めようとしている解となります. 実際, 任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ と任意の $\delta \in (0, 1]$ に対して, $\{u_{\varepsilon\delta}, v_{\varepsilon\delta}\} \in L^\infty(Q_m) \times (L^2(0, T; \mathbf{V}) \cap L^\infty(0, T; \mathbf{H}))$ は以下の弱形式を満たしています.

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_m} u_{\varepsilon\delta} \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt - \int_{Q_m} (v_{\varepsilon\delta} \cdot \nabla \eta) u_{\varepsilon\delta} dx dt + \int_{Q_m} \nabla \beta(u_{\varepsilon\delta}) \cdot \nabla \eta dx dt \\ & + n_0 \int_{\Sigma_m} \beta(u_{\varepsilon\delta}) \eta d\Gamma_m(t) dt = \int_{Q_m} f \eta dx dt + \int_{\Sigma_m} q \eta d\Gamma_m(t) dt + \int_{\Omega_{m0}} u_0 \eta(0) dx \quad \forall \eta \in W, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\eta', w_{\varepsilon\delta})_{\mathbf{H}} dt + \int_0^T a(w_{\varepsilon\delta}, \eta) dt + \int_0^T b(t; w_{\varepsilon\delta}, w_{\varepsilon\delta}, \eta) dt + \int_0^T c(t; w_{\varepsilon\delta}, \eta) dt \\ & + \frac{1}{\delta} \int_0^T (P_L(p_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta}), \eta)_{\mathbf{H}} dt = \int_0^T (g_L(\beta(u_{\varepsilon\delta})), \eta)_{\mathbf{H}} dt + (w_0, \eta(0))_{\mathbf{H}} \quad \forall \eta \in W_0(0, T), \end{aligned} \quad (40)$$

さらに $R_8 := \max\{R_4 \exp(T), R_5, R_6, R_7\}$ とおけば R_8 は $\varepsilon \in (0, 1]$ と $\delta \in (0, 1]$ に依存しておらず以下の評価を満たす.

$$|\beta(u_{\varepsilon\delta})|_{L^\infty(Q_m)} \leq R_8, \quad |u_{\varepsilon\delta}|_{L^\infty(Q_m)} \leq R_8, \quad \int_0^T |\beta(u_{\varepsilon\delta}(t))|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 dt \leq R_8, \quad (41)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |w_{\varepsilon\delta}(t)|_H \leq R_8, \quad |w_{\varepsilon\delta}|_{L^2(0,T;V)} \leq R_8, \quad \frac{1}{\delta} \int_Q p_{\varepsilon\delta} |w_{\varepsilon\delta}|^2 dx dt \leq R_8. \quad (42)$$

よって固定された $\varepsilon \in (0, 1]$ に対して $\delta \rightarrow 0$ の極限を議論しよう. 上の評価から 0 に収束するある部分列 $\{\delta_n\} \subset (0, 1]$ と関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(Q_m)$, $w_\varepsilon \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ が存在して

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon\delta_n} &\rightarrow u_\varepsilon \quad \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty(Q_m), \\ w_{\varepsilon\delta_n} &\rightarrow w_\varepsilon \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

そして先の議論と同様に

$$u_{\varepsilon\delta_n}(t) \rightarrow u_\varepsilon(t) \quad \text{weakly in } L^2(\mathbb{R}^3) \text{ and uniformly in } t \in [0, T], \quad (43)$$

$$\beta(u_{\varepsilon\delta_n}) \rightarrow \beta(u_\varepsilon) \quad \text{in } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^3) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty, \quad (44)$$

を得ることができる. またその極限は

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_m} u_\varepsilon \frac{\partial \eta}{\partial t} dx dt - \int_{Q_m} (v_\varepsilon \cdot \nabla \eta) u_\varepsilon dx dt + \int_{Q_m} \nabla \beta(u_\varepsilon) \cdot \nabla \eta dx dt + n_0 \int_{\Sigma_m} \beta(u_\varepsilon) \eta d\Gamma_m(t) dt \\ & = \int_{Q_m} f \eta dx dt + \int_{\Sigma_m} q \eta d\Gamma_m(t) dt + \int_{\Omega_{m0}} u_0 \eta(0) dx \quad \forall \eta \in W, \end{aligned} \quad (45)$$

を $v_\varepsilon := w_\varepsilon + v_D$ に対して満たすことは, 強収束があることから分かります. 問題はナビエーストクス方程式の処罰上の取り扱いと, 極限が弱形式を満たすかどうかになります. (43) の収束から

$$\rho_\varepsilon * u_{\varepsilon\delta_n} \rightarrow \rho_\varepsilon * u_\varepsilon \quad \text{uniformly on } [0, T] \times \mathbb{R}^3,$$

よって,

$$p_{\varepsilon\delta_n} \rightarrow p_\varepsilon := \left[\rho_\varepsilon * \left(u_\varepsilon - \frac{L}{2} \right) \right]^- \quad \text{uniformly on } [0, T] \times \mathbb{R}^3 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (46)$$

今, $Q_\ell(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)$ は $\rho_\varepsilon * u_\varepsilon$ 連続性から Q_m の開部分集合であることが分かります. ここで, $(s_1, s_2) \times \omega$ を $Q_\ell(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)$ 内の任意の相対コンパクトな部分集合とします. このとき, 十分大きな n に対して $w_{\varepsilon\delta_n}$ は以下を満たすことが分かります.

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\eta', w_{\varepsilon\delta_n})_H dt + \int_0^T a(w_{\varepsilon\delta_n}, \eta) dt + \int_0^T b(t; w_{\varepsilon\delta_n}, w_{\varepsilon\delta_n}, \eta) dt \\ & + \int_0^T c(t; w_{\varepsilon\delta_n}, \eta) dt = \int_0^T (g_L(\beta(u_{\varepsilon\delta_n})), \eta)_H dt, \end{aligned} \quad (47)$$

ここでテスト関数 η は以下のように取ります.

$$\eta \in W_0(0, T) \quad \text{with } \text{supp} \eta \subset (s_1, s_2) \times \omega. \quad (48)$$

実際に, 十分大きな n に対して $p_{\varepsilon\delta_n}\eta = 0$ on $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ です. よって (40) より (47) が収束と共に導かれます. これによって $\{d/dt w_{\varepsilon\delta_n}\}$ は $L^{4/3}(s_1, s_2; W_\sigma^{-1,4/3}(\omega))$ で有界, そして $V_1(\omega)$ を $\{z \in C^\infty(\omega); \text{div} z = 0 \text{ in } \omega\}$ の $H^1(\omega)$ での閉包とすれば, $w_{\varepsilon\delta_n}$ は柱状領域 $(s_1, s_2) \times \omega$ の境界で 0 である必要はなく, $\{w_{\varepsilon\delta_n}\}$ は $L^2(s_1, s_2; V_1(\omega))$ で有界です. しかし, 埋め込みは $V_1(\omega) \hookrightarrow L_\sigma^2(\omega) \subset W_\sigma^{-1,4/3}(\omega)$ で得ることができるので, Aubin のコンパクト性の定理から $\{w_{\varepsilon\delta_n}\}$ は $L^2(s_1, s_2; L_\sigma^2(\omega))$ で相対コンパクトで, そのため強収束

$$w_{\varepsilon\delta_n} \rightarrow w_\varepsilon \quad \text{in } L^2(s_1, s_2; L_\sigma^2(\omega)) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty,$$

が得られます. すべての相対コンパクトな $Q_\ell(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)$ 内の柱状領域でこの事実は成立するので $Q_\ell(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)$ はこれら有限個の柱状領域で覆うことができ, 結果として

$$w_{\varepsilon\delta_n} \rightarrow w_\varepsilon \quad \text{in } L_{loc}^2(Q_\ell(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)) \quad \text{as } n \rightarrow +\infty. \quad (49)$$

最終的に (47) で $n \rightarrow \infty$ とすれば, 任意の $\eta \in W_0(0, T)$ で $\eta(t) \subset \Omega_\ell(t)$ なるテスト関数に対して,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\eta', w_\varepsilon)_H dt + \int_0^T a(w_\varepsilon, \eta) dt + \int_0^T b(t; w_\varepsilon, w_\varepsilon, \eta) dt + \int_0^T c(t; w_\varepsilon, \eta) dt \\ & = \int_0^T (g_L(\beta(u_\varepsilon)), \eta)_H dt + (w_0, \eta(0))_H \quad \forall \eta \in W(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon). \end{aligned}$$

最後に w_ε は $Q_s(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)$ で 0 であること, つまり固体領域では流速 v_ε は与えられた速度 v_D に一致することを示します. 今, 任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ に対して,

$$\begin{aligned} |\beta(u_\varepsilon)|_{L^\infty(Q_m)} &\leq R_8, \quad |u_\varepsilon|_{L^\infty(Q_m)} \leq R_8, \quad \int_0^T |\beta(u_\varepsilon(t))|_{H^1(\Omega_m(t))}^2 dt \leq R_8, \\ \sup_{0 \leq t \leq T} |w_\varepsilon(t)|_H &\leq R_8, \quad |w_\varepsilon|_{L^2(0, T; V)} \leq R_8, \end{aligned}$$

が成立しており, 特に (42) の一番最後の評価から

$$\left[\rho_\varepsilon * \left(u_\varepsilon - \frac{L}{2} \right) \right]^- |w_\varepsilon|^2 = 0 \quad \text{a.e. on } Q,$$

すなわち

$$w_\varepsilon = 0 \quad \text{a.e. on } Q_s(\rho_\varepsilon * u_\varepsilon),$$

が分かります. 以上により $\{u_\varepsilon, v_\varepsilon\}$ は (D1)-(D3) を $R = R_8$ として満たすことが示されます. \square

定理 3.3 の証明 略.

References

- [1] J. P. Aubin, Un théorème de compacité. C. R. Acad. Sci. Paris, **256**(1963), 5042–5044.
- [2] M. Aso, T. Fukao and N. Kenmochi, A new class of doubly nonlinear evolution equations, Taiwanese J. Math., **8**(2004), 103–124.
- [3] G. Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, Arch. Rat. Mech. Anal., **92**(1986), 205–245.
- [4] J. R. Cannon, E. DiBenedetto and G. H. Knightly, The bidimensional Stefan problem with convection: The time dependent case, Comm. Partial Differential Equations, **14**(1983), 1549–1604.
- [5] E. Casella and M. Giorgi, An analytical and numerical study of the Stefan problem with convection by means of an enthalpy method, Math. Methods Appl. Sci., **24**(2001), 623–639.
- [6] A. B. Crowley, Mathematical modelling of heat flow in Czochralski crystal pulling, IMA J. Appl. Math., **30**(1983), 173–189.
- [7] A. Damlamian, Some results on the multi-phase Stefan problem, Comm. Partial Differential Equations, **2**(1977), 1017–1044.
- [8] E. DiBenedetto and M. O’Leary, Three-dimensional conduction-convection problems with change of phase, Arch. Ration. Mech. Anal., **123**(1993), 99–116.
- [9] H. Fujita and N. Sauer, On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundaries, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math., **17**(1970), 403–420.
- [10] T. Fukao, Weak solutions for Stefan problems with convections, pp. 87–100 in *Dissipative phase transitions*, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., Vol.71, World Sci. Publishing, 2005.
- [11] T. Fukao and N. Kenmochi, Stefan problems with convection governed by Navier-Stokes equations, Adv. Math. Sci. Appl., **15**(2005), 29–48.
- [12] T. Fukao and N. Kenmochi, Degenerate parabolic equations with convection in non-cylindrical domain, Adv. Math. Sci. Appl., **14**(2004), 139–150.
- [13] T. Fukao, N. Kenmochi and I. Pawłow, Stefan problems in non-cylindrical domains arising in Czochralski process of crystal growth, Control Cybernet., **32**(2003), 201–221.
- [14] T. Fukao, N. Kenmochi and I. Pawłow, Transmission-Stefan problems arising in Czochralski process of crystal growth, pp.151–165 in *Free boundary problems, Theory and applications*, Internat. Ser. Numer. Math., Vol.147, Birkhäuser, 2003.

- [15] A. Inoue and M. Wakimoto, On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math.*, **24**(1977), 303–319.
- [16] H. Inoue and M. Ôtani, Strong solutions of initial boundary value problems for heat convection equations in noncylindrical domains, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **24**(1995), 1061–1090.
- [17] Y. Kagei, On weak solutions of nonstationary boussinesq equations, *Differential Integral Equations*, **6**(1993), 587–611.
- [18] N. Kenmochi, Résolution de problèmes variationnels paraboliques non linéaires par les méthodes de compacité et monotonie, *Theses, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6*, (1979).
- [19] N. Kenmochi, Résultats de compacité dans des espaces de Banach dépendant du temps, *Séminaire d'analyse convexe, Montpellier, Exposé 1*, (1979), 1–26.
- [20] N. Kenmochi and I. Pawłow, Controlled Czochralski crystal growth, *J. SICE*, **35**(1996), 944–950.
- [21] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, *Translations of Mathematical Monographs, Vol.23*, Amer. Math. Soc., 1968.
- [22] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, *Études Mathématiques, Dunod Gauthier-Villas*, 1968.
- [23] H. Morimoto, On existence of periodic weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math.*, **18**(1971/1972), 499–524.
- [24] M. Ôtani, Nonmonotone perturbations for nonlinear parabolic equations associated with subdifferential operators, Cauchy problems, *J. Differential Equations*, **46**(1982), 268–299.
- [25] M. Ôtani and Y. Yamada, On the Navier-Stokes equations in non-cylindrical domains: An approach by the subdifferential operator theory, *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo., Sec. IA. Math.*, **25**(1978), 185–204.
- [26] I. Pawłow, Three-phase boundary Czochralski model, pp.203-227 in *Mathematical Aspects of Modeling Structure Formation Phenomena*, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., **Vol.17**, Gakkōtoshō, 2002.
- [27] G. Planas and J. L. Boldrini, A bidimensional phase-field model with convection for change phase of an alloy, *J. Math. Anal. Appl.* **303**(2005), 669–687,
- [28] J. F. Rodrigues, Variational methods in the Stefan problem, pp.147–212 in *Phase Transitions and Hysteresis*, *Lecture Notes Math., Vol.1584*, Springer-Verlag, 1994.

- [29] J. F. Rodrigues and F. Yi, On a two-phase continuous casting Stefan problem with nonlinear flux, *European J. Appl. Math.*, **1**(1990), 259–278.
- [30] I. Sawada, K. Okazawa, S. Takao, M. Tanaka and M. Tukijima, Simulation of thermal convection in Si melt during growth of a silicon single crystal, *CAMP Iron and Steel Institute of Japan*, **1**(1988), 267.
- [31] J. Simon, Compact sets in the spaces $L^p(0, T; B)$, *Ann. Mate. Pura. Appl.*, **146** (1987), 65–96.
- [32] V. N. Strarovoitov, On the Stefan problem with different phase densities, *Z. Angew. Math. Mech.*, **80**(2000), 103–111.
- [33] R. Temam, *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*, North Holland, 1977.
- [34] A. Visintin, *Models of phase transitions*, PNLDE, Birkhäuser, 1996.
- [35] Y. Yamada, Periodic solutions of certain nonlinear parabolic differential equations in domains with periodically moving boundaries, *Nagoya Math. J.*, **70**(1978), 111–123.
- [36] D. Vizman, O. Gräbner and G. Müller, Three-dimensional numerical simulation of thermal convection in an industrial Czochralski melt: comparison to experimental results, *J. Crystal Growth*, **233**(2001), 687–698.