数理解析研究所講究録
1523 巻 2006 年 79-94

Hasse invariants for some unitary Shimura varieties and applications

京都大学大学院理学研究科数学教室
伊藤 哲史 (Tetsushi Ito)[1]
Department of Mathematics, Kyoto University

1. Abstract

古典的な **Hasse** 不変量(Hasse invariant) は，標数 $p>0$ のモジュラー曲線上に定義された重さ $p-1$ の保型形式である．これは，保型形式の合同性や定値四元数環の類数とも関係する整数論的にも幾何学的にも重要な対象である．本稿では，Hasse 不変量のユニタリ群 $\mathrm{U}(1,n)$ に伴う高次元志村多様体への一般化について，筆者によって得られた結果を紹介する．幾何学的には，Ekedahl-Oort 理論の一般化に現れるある種の直線束の切断を，「高次元版 Hasse 不変量」としてとらえることがポイントである．また，このようにして得られた「高次元版 Hasse 不変量」のユニタリ型志村多様体の幾何学や，ℓ 進コホモロジーへの応用についても述べる．

2. 古典的 Hasse 不変量

本節では，古典的な楕円曲線の Hasse 不変量について復習する．まず Hasse 不変量の離散的な定義を与え，次に微分形式を用いた幾何学的解釈を説明する．以下，k を標数 $p>0$ の代数閉体とする．k 上の楕円曲線 E に対し，E の p 等分点のなす群スキーム $E[p]$ を考える．この群スキームはエタールではなく各点が重複度を持った幾何的対象であることに注意しよう．$E[p]$ の k-有理点のなす群 $E[p](k)$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 又は 0 と同形であることが知られている．前者の時 E は通常(ordinary) であるといい，後者の時 E は超特異(supersingular) であるという．E の離散的 Hasse 不変量を次のように定義する (詳しくは [Sil] 等を参照).

定義 2.1.

$$E\text{ の離散的 Hasse 不変量} := \begin{cases} 1 & E:\text{通常} \\ 0 & E:\text{超特異} \end{cases}$$

[1] `tetsushi@math.kyoto-u.ac.jp` 日本学術振興会特別研究員 (SPD)

RIMS 研究集会「保型表現 ・L 函数 ・周期の研究」2006 年 1 月 26 日 (木) 11:00-12:00

標数 $p>0$ の代数閉体上で楕円曲線の p 等分点を考えるのがポイントである．もし k の標数が p と異なる場合は，常に $E[p](k) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ となり，意味のある不変量が定義できない．

次に，楕円曲線の Hasse 不変量が，個々の楕円曲線に対する離散的な不変量であるのみならず，楕円曲線のモジュライ空間 (モジュラー曲線) 上の微分形式として幾何学的に解釈することができることを説明する．微分形式版 Hasse 不変量を定義する方法としては，層係数コホモロジーや，de Rham コホモロジー，Hasse-Witt 行列を使う方法がある．例えば，

『Hasse 不変量とは，Hasse-Witt 行列の行列式のことである』

という定義はてっとり早いが，そうすると今度は Hasse-Witt 行列とは何かを説明しなければならなくなる．そこで，以下では，p 可除群の変形空間や，Ekedahl-Oort 理論との比較を容易にするため，有限群スキームの Verschiebung 射を使う方法を説明する (Dieudonné 理論により，これらの定義は同値である)．

X を k 上のモジュラー曲線とする．p の外のレベル構造を適当に付けることで，X は楕円曲線の fine モジュライ空間であると仮定する．$\pi\colon \mathscr{E} \to X$ を X 上の普遍楕円曲線とし，$e\colon X \to \mathscr{E}$ を単位元とする．$\mathscr{E}/X$ の相対微分形式の層 $\Omega^1_{\mathscr{E}/X}$ を e によって引き戻すことで，X 上の直線束

$$\omega := e^*\Omega^1_{\mathscr{E}/X}$$

を得る．ω を **Hodge バンドル**(Hodge bundle) という．X の絶対 Frobenius 射 $F_{\mathrm{abs}}\colon X \to X$ による $\mathscr{E}$ の引き戻しを $\mathscr{E}^{(p)}$ とおく．このとき，X 上の相対 Frobenius 射 $F\colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{(p)}$ の核

$$G := \operatorname{Ker}\left(F\colon \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}^{(p)}\right)$$

は位数 p の X 上の有限群スキームである．G の Cartier 双対 G^D の Frobenius 射を $F^D\colon G^D \to (G^D)^{(p)} = (G^{(p)})^D$ とおく．F^D の Cartier 双対を $V\colon G^{(p)} \to G$ で表し，G の **Verschiebung 射**(Verschiebung morphism) という．V は Lie 環に写像 $\operatorname{Lie} G^{(p)} \to \operatorname{Lie} G$ を誘導する．自然な同一視

$$\operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie} \mathscr{E} = \omega^\vee, \qquad \operatorname{Lie} G^{(p)} = (\omega^\vee)^{\otimes p}$$

により ($\omega^\vee$ は ω の双対束である)，X 上の直線束間の写像 $(\omega^\vee)^{\otimes p} \to \omega^\vee$ が得られる．さらに，

$$\operatorname{Hom}\left((\omega^\vee)^{\otimes p}, \omega^\vee\right) = \operatorname{Hom}\left(\omega^{\otimes(-p)}, \omega^{\otimes(-1)}\right) = H^0(X, \omega^{\otimes(p-1)})$$

により，$H^0(X, \omega^{\otimes(p-1)})$ の元が得られる．こうして得られた元を

$$H \in H^0(X, \omega^{\otimes(p-1)})$$

と書き，離散的 Hasse 不変量と区別するために，ここではこれを微分形式版 **Hasse** 不変量と呼ぶことにしよう．

一般に，$H^0(X,\omega^{\otimes k})$ の元を標数 p, 重さ k の保型形式(automorphic form) という (実際には X のコンパクト化の境界での条件を課すことが多い)．従って，H は標数 p, 重さ $p-1$ の保型形式である．各点のファイバーでの G の様子を調べることで，次が分かる：

> 微分形式版 Hasse 不変量 H が $x\in X$ で消えない (resp. 消える) ことと，
> 楕円曲線 $\mathscr{E}_x$ が通常である (resp. 超特異である) ことは同値である．

この意味で，微分形式版 Hasse 不変量 H は，離散的 Hasse 不変量 (定義 2.1) の幾何学的解釈を与えている．なお，次節に述べる「井草の定理」(定理 3.1) により，H は各超特異点で 1 位の零を持つ．

ここに述べた微分形式版 Hasse 不変量は，高次元アーベル多様体に対しても一般化することができる．すなわち，p の外に適当にレベル構造を付けた g 次元アーベル多様体の fine モジュライ空間 X に対し，普遍アーベル多様体を $\pi\colon \mathscr{A}\to X$，単位元を $e\colon X\to\mathscr{A}$ とおき，Hodge バンドルを

$$\omega := \det\bigl(e^*\Omega^1_{\mathscr{A}/X}\bigr)$$

で定める (楕円曲線の場合は $\Omega^1_{\mathscr{E}/X}$ が階数 1 なので，行列式をとる必要がなかった)．楕円曲線の場合 ($g=1$) と同様に，$\mathrm{Ker}\bigl(F\colon \mathscr{A}\to\mathscr{A}^{(p)}\bigr)$ の Verschiebung 射が Lie 環に誘導する写像を用いて，微分形式版 Hasse 不変量が $H^0(X,\omega^{\otimes(p-1)})$ の元として定まる．これを

$$H\in H^0(X,\omega^{\otimes(p-1)})$$

とおく．標数 p の代数閉体 k 上の g 次元アーベル多様体 A は，$A[p](k)\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus g}$ をみたすとき通常であるという．また，A が超特異楕円曲線の直積と同種であるとき，すなわち核が有限の全射準同形 $E^g\to A$ が存在するとき (E は超特異楕円曲線)，A は超特異であるという (これは “$A[p](k)=0$” よりもかなり強い条件である．k 上の超特異楕円曲線は互いに同種なので，この定義は E のとり方によらない．これ以外にも多くの同値な定義がある．詳しくは [LO] を参照)．H が $x\in X$ で消えない (resp. 消える) ことと，$\mathscr{A}_x$ が通常である (resp. 通常でない) ことは同値である．H は標数 p, 重さ $p-1$ の **Siegel** 保型形式(Siegel automorphic form) である (標数 p の Siegel 保型形式については，例えば [FC] を参照)．

$g\geq 2$ の場合は，上で定めた微分形式版 Hasse 不変量は「通常であるか・ないか」を判定するだけであり，アーベル多様体のモジュライ空間の幾何学を調べる道具としては不十分である．楕円曲線の場合は「通常でない」ことと「超特異である」ことが

同値であるが，$g \geq 2$ の場合はこれは成り立たない．また，本稿では詳しくは述べないが，2次元以上の超特異アーベル多様体には様々な同形類があり，その違いによってモジュライ空間に様々な階層(stratification) が入り，その幾何学を調べることが重要な問題となっている ([LO], [O1]).

従って，ここで定義した H は，高次元の場合は「最初の Hasse 不変量」とでも呼ぶべきものである．本稿の目標は，あるクラスの高次元ユニタリ型志村多様体に対して,「最初の Hasse 不変量」のさらなる「精密化」を与えることにある．

注意 2.2. 定義2.1では，[Sil] に倣って離散的 Hasse 不変量を，集合 $\{0,1\}$ に値をとる関数として定義したが，微分形式版 Hasse 不変量を考慮すると，k 上の1次元ベクトル空間 $\mathrm{Lie}(E)^{\otimes(1-p)}$ の元として定義するのが “自然” であると言える．もし $\mathrm{Lie}(E)$ の基底をとるのであれば，基底の自由度で割った商集合 $k/k^{\times}$ に値をとる関数として，Hasse 不変量を定義するのが “自然” なのかもしれない．もちろん，集合としては自然に $k/k^{\times} = \{0,1\}$ ではあるが．

3. モジュラー曲線の超特異点と井草の定理

3.1. 超特異楕円曲線と四元数環の類数. 以下，素数 p と標数 $p>0$ の代数閉体 k を固定する．D_p を $\mathbb{Q}$ 上の定値四元数環で p と ∞ でのみ分岐するものとする．このような四元数環は同形を除いて唯一定まる．k 上の超特異楕円曲線 E に対し，$\mathrm{End}(E) := \mathrm{Hom}_k(E,E)$ を E の自己準同形環する．$\mathrm{End}^0(E) := \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ は D_p と同形であることが知られている．この条件で超特異楕円曲線を特徴付けることもできる ([Sil]). Deuring は 1941 年の論文で，k 上の超特異楕円曲線の同形類の個数が，四元数環 D_p の類数 $h(D_p)$ と等しいことを示した ([Deu]). 一方，Eichler は 1938 年の論文で $h(D_p)$ を解析的手法により計算し，

$$h(D_p) = \frac{p-1}{12} + \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{-3}{p}\right)\right\} + \frac{1}{4}\left\{1 - \left(\frac{-4}{p}\right)\right\}$$

を示した ([Ei]). ここで $(\frac{\cdot}{p})$ は Legendre 記号を表す．Deuring の結果とあわせることで，上式の右辺は，k 上の超特異楕円曲線の同形類の個数を与えていることが分かる．

3.2. 井草の定理. さて，k 上の楕円曲線の同形類は，その j-不変量(j-invariant) で分類できることを思い出そう．すなわち，k 上の楕円曲線 E, E' が同形であることと，j-不変量が等しい $j(E) = j(E')$ ことは同値である．モジュラー曲線 $X(1)$(レベル構造を付けない楕円曲線のモジュライ空間のコンパクト化) は j-不変量により射影直線 $\mathbb{P}^1$ と同形である．超特異楕円曲線に対応するモジュラー曲線上の点を超特異点(supersingular point) という．従って，Eichler の類数公式は，モジュラー曲線上の超特異点の個数に関する公式と解釈できる．

ここで，逆に，次のように考えてみよう：『モジュラー曲線上の超特異点の個数を"直接"数えることで，Eichler の類数公式を代数的に証明できないか?』

この問題に関連して，井草は 1958 年に次の定理を示した．

定理 3.1 ([Ig]). 微分形式版 Hasse 不変量 H は，モジュラー曲線上の各超特異点において 1 位の零を持つ．

この定理を用いることで，モジュラー曲線上の超特異点の個数を代数的に"直接"数えることができる．定理 3.1 により

$$
\begin{aligned}
(p-1)\cdot \text{“}\deg\,\omega\text{”} &= \text{“}\deg\bigl(\omega^{\otimes(p-1)}\bigr)\text{”} \\
&= (\text{モジュラー曲線 } X(1) \text{ 上の超特異点の個数})
\end{aligned}
$$

であるから，モジュラー曲線上の Hodge バンドルの degree "deg ω" を計算すればよい (ただし，モジュラー曲線 $X(1)$ は coarse モジュライ空間なので，スタックとしての degree を考える等の方法で "deg" を正当化しておく必要がある)．

[Ig] の証明の方針は次の通りである．$p=2$ は直接証明する．$p>2$ に対し，$\mathbb{A}^1\backslash\{0,1\}$ 上の楕円曲線の族 $Y^2=X(X-1)(X-\lambda)$ を考える．そして，この上で直線束 ω の degree を計算することで，超特異楕円曲線に対応する λ の個数を数える．その個数は $(p-1)/2$ である．自然な写像

$$
\mathbb{A}^1\backslash\{0,1\} \longrightarrow (j\text{-直線}), \qquad \lambda \mapsto 2^8\frac{(1-\lambda(1-\lambda))^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}
$$

は $j=0,1728$ で分岐する 6 次の被覆である．従って，求める値は「$(p-1)/12+$(誤差項)」となる．「誤差項」は $j=0,1728$ の楕円曲線からの寄与である．$\mathbb{C}$ 上の $j=0,1728$ の楕円曲線は虚数乗法を持つので，虚数乗法論により「$p \pmod{12}$」で場合分けすれば計算できる．

以上により，モジュラー曲線上の超特異点の個数の公式が得られ，従って，Eichler の類数公式の代数的証明も得られたことになる．これに関して，[Ig] に "Deuring thought that such a direct computation was nicht leicht (not easy)." とあるのは興味深い．

注意 3.2. [Ig] によって与えられた定理 3.1 の証明は，微分形式版 Hasse 不変量が Gauss-Legendre 型の微分方程式

$$
\lambda(1-\lambda)\frac{d^2f}{d\lambda^2}+(1-2\lambda)\frac{df}{d\lambda}-\frac{f}{4}=0
$$

をみたすことを用いた「大域的」なものであった．モジュラー曲線の幾何学の理解が進み，楕円曲線・形式群の変形理論が整備された今日では，定理 3.1 にいくつかの (見かけ上) 異なる証明を与えることができる．定理 3.1 の「局所的」な「現代的証明」は，

[DR] や [KM] 等を参照．また，Th. Zink による display 理論を用いて超特異楕円曲線の変形空間を具体的に計算して定理 3.1 を証明することもできる ([Zi]).

注意 3.3. Eichler の公式により，判別式 p の四元数環の類数が p に関する多項式と Legendre 記号で表されることが分かる．これが「類数」に関するどの程度一般的な数論的現象なのかは，私は知らない (しかしながら，$\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$ や $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の類数が p に関する簡単な式で書ける，ということは無いと思われる．四元数環の類数には，何か特殊事情があるのだろうか?). [Ig] の証明から，四元数環の場合のこの現象に，一つの「説明」を与えることができる：

> 「誤差項」が「$p \pmod{12}$」にしかよらないことの「理由」は，$j = 0, 1728$ の楕円曲線が ($\mathbb{C}$ 上で) 虚数乗法を持つからである．

もちろんこれが唯一の「説明」ではない．Eichler の原証明をたどれば別の「説明」が得られるだろう．また，四元数環の類数と $\Gamma_0(p)$ 上の重さ 2 の保型形式の次元の関係 (Eichler の Basis Problem, テータ対応) を考慮すれば，上半空間への $\Gamma_0(p)$ の作用の楕円点を数えることにより,「違う説明」を与えることができる．($\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の上半空間への作用の楕円点は，$j = 0, 1728$ の楕円曲線に対応している．λ-直線は $X(2)$ と同形なので，もちろんこれは偶然の一致ではない．ここに挙げた 2 つの「説明」は，本当に「違う」のだろうか? それとも,「同じ」ものを 2 つの方向から眺めたに過ぎないのであろうか?)

ところで，仮に [Ig] の証明に現れた分岐点が虚数乗法を持たない楕円曲線に対応していたとすると，どうなっていたであろうか．この場合,「誤差項」が「$p \pmod{N}$」のみに依存する形で計算できることは，もはや期待できない．例えば，もし仮に分岐点に虚数乗法を持たない $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E が対応していたとすると，Elkies の定理により E が超特異還元を持つ素数の集合は密度 0 の無限集合であり ([El])，そのような E からの寄与を Legendre 記号のみを用いて表すことはできない．(このようなことが起こらない，ということには，何か根源的な「理由」があるのだろうか? それとも,「類数」とはそもそも代数多様体やモチーフに伴う Galois 表現を用いて説明されるべきものであって，四元数環の場合はそれが「たまたま」虚数乗法を持つ楕円曲線 (対応する Galois 表現は本質的にアーベルであり，従って類体論的な記述が可能である) に対応していたために，Legendre 記号を用いた簡明な記述が得られたに過ぎない —のであろうか?)

4. ユニタリ型志村多様体

ここでは標数 p の代数閉体上で，虚 2 次体上の第 2 種対合を持つ中心的斜体から構成したユニタリ群 (“fake unitary group” とも呼ばれる) に伴う志村多様体を考察す

る．以下に述べるように，このクラスの志村多様体は数論的にも幾何的にも表現論的にも，大変扱いやすいものである．

- 付加構造付きアーベル多様体のモジュライ空間であり，PEL(polarization, endomorphism, level structure) 型志村多様体と呼ばれるクラスに属する．従って，代数体やその整数環上のモデルが比較的容易に構成できる．
- モジュライ空間がコンパクトである．また，本稿で扱う素点において良い還元を持ち，局所構造が1次元 p 可除群の変形でとらえられる．従って，代数幾何・数論幾何的にとても扱いやすい．
- 斜体から構成されたユニタリ群に対しては，保型表現や Arthur-Selberg 跡公式に関する様々な問題が解決されている．その結果，それに伴う志村多様体のゼータ関数を保型的 L 関数を用いて記述することができる ([C], [Ko1], [Ko2], [HT]).

このクラスの志村多様体は Rapoport-Zink, Clozel, Kottwitz, Harris-Taylor 等によって考察されたもの (の一部) であり，文献では "単純志村多様体" あるいは "Kottwitz 型" と呼ばれることもある ([RZ1], [C], [Ko1], [Ko2], [HT])．このクラスの志村多様体を用いて CM 体上の GL(n) の (ある条件をみたす) 保型表現に伴う ℓ 進 Galois 表現が構成され (大域 Langlands 対応の一部)，Harris-Taylor により p 進体上の GL(n) の局所 Langlands 対応が証明されたことは記憶に新しい．局所 Langlands 対応については，その後，Henniart により簡略化された証明が得られたが，このクラスの志村多様体を用いない「局所的証明」は未だに得られていない．

4.1. **代数群 G の定義．** 以下では，虚二次体 $F/\mathbb{Q}$ と，F で分裂する素数 p を固定する．p の分解を $p = v \cdot v^c$ とおく ($c \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ は非自明な元)．B を F 上の n^2 次元の中心的斜体で $B \otimes_F F_v \cong M_n(F_v)$ となるものとする (F_v は F の v における完備化)．$*\colon B \to B$ を第2種対合 (involution of 2nd kind) とする．すなわち，$*$ は $\mathbb{Q}$-線形写像であり，$x, y \in B$ に対し $(xy)^* = y^*x^*$ をみたし，$a \in F$ に対し $a^* = a^c$ をみたす．また，$*$ は正 (positive) であると仮定する．すなわち，$x \in B^\times$ に対し $\mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(x \cdot x^*) > 0$ をみたす．V を階数1の自由 B 加群とする．$\mathbb{Q}$ 上の非退化交代形式 $\langle , \rangle\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ であって，$b \in B$, $v, w \in V$ に対し $\langle bv, w \rangle = \langle v, b^*w \rangle$ をみたすものをとる．ユニタリ相似変換のなす $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を，$\mathbb{Q}$-代数 R に対し，

$$G(R) := \left\{ (g, \lambda) \in \mathrm{End}_B(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) \times R^\times \;\middle|\; \langle gv, gw \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \ (\forall v, w \in V) \right\}$$

で定める．

4.2. **志村多様体 Sh の定義．** $\mathbb{A}$ を $\mathbb{Q}$ のアデール環，$\mathbb{A}^p$ を $\mathbb{A}$ から p 成分を除いた因子とする．$K_\infty \subset G(\mathbb{R})$ を mod 中心で極大コンパクトな部分群，$K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ を極大コン

パクト部分群，$K^p \subset G(\mathbb{A}^p)$ を十分小さい開コンパクト部分群とする．このとき，

$$\mathrm{Sh}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K^p K_p$$

は $\mathbb{C}$ 上の滑らかな $n-1$ 次元射影的代数多様体の構造を持つ．$\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の付加構造付きアーベル多様体のモジュライ空間として解釈することができる．$K^p \subset G(\mathbb{A}^p)$ を十分小さくとれば，これは fine モジュライ空間になる．これを利用して Sh の F 上のモデルが構成できる．さらに，$\mathscr{O}_F$ を F の整数環，$\mathscr{O}_{F,v}$ を v における $\mathscr{O}_F$ の完備化とすると，Sh は $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{F,v}$ 上のモデルを持つ．すなわち，$\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{F,v}$ 上の相対次元 $n-1$ の射影的で滑らかなスキーム Sh が存在し，$\mathbb{C}$-有理点の集合 $\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ が上で与えたものに一致する (詳しくは [Ko1] を参照).

最後に，ユニタリ群の符号に関する条件を仮定する．G' を G の導来群とし，

$$G'(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(1, n-1)$$

を仮定する．このとき，$\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ は $\mathrm{U}(1,n-1)$ の対称空間 ($\mathbb{C}^{n-1}$ の単位超球) のコンパクトな数論的商の有限個の直和となる．

注意 4.1. p におけるレベル構造 $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ が極大コンパクトであると仮定したことに注意．K_p を小さくすると，一般に $\mathrm{Sh}/\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{F,v}$ は滑らかではなくなる．[HT] では小さなレベル K_p に対するモデルが調べられている．また，[TY] では，K_p が岩堀部分群の場合のモデル (半安定還元を持つ) が調べられている．

注意 4.2. ここでは簡単のため虚 2 次体上で考察したが，CM 体上で考えることもできる．この場合，無限素点における符号の条件は，一つの無限素点で $(1, n-1)$，それ以外の無限素点で $(0, n)$ とする：

$$G'(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(1, n-1) \times \mathrm{U}(0,n) \times \cdots \times \mathrm{U}(0,n).$$

これは [HT] と同じ条件であり，この条件の下で，モジュライ空間の局所構造を 1 次元 p 可除群の変形理論を用いて調べることができる．[Ko2] では，より一般の符号を持つユニタリ群に伴う志村多様体のゼータ関数を扱っている (ただし斜体に伴うユニタリ群に限る．そうでない場合はコンパクト化の問題や endoscopy 等の表現論的な問題が発生してしまう)．しかし，一般符号のユニタリ群に伴う志村多様体の幾何学はとても難しい (cf. [Fa], [Ma]).

4.3. **整数環上の志村多様体.** $\mathrm{Sh}/\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{F,v}$ はアーベル多様体の fine モジュライ空間なので，普遍アーベル多様体 $\mathscr{A} \longrightarrow \mathrm{Sh}/\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_{F,v}$ が存在する．$\mathscr{A}/\mathrm{Sh}$ の相対次元は $n^2 = \dim_F B$ である．

$\mathscr{A}/\mathrm{Sh}$ の p 可除群を $\mathscr{A}[p^\infty]$ とおく．$\mathscr{A}[p^\infty]$ は高さ(height)が $2n^2$，次元が n^2 の p 可除群の Sh 上の族である．$\mathscr{A}[p^\infty]$ には $\mathscr{O}_B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = M_n(\mathscr{O}_{F,v}) \times M_n(\mathscr{O}_{F,v^c})$ が作用する

ので，この作用により $\mathscr{A}[p^\infty]$ を分解する：$\mathscr{A}[p^\infty] = \mathscr{A}[v^\infty] \oplus \mathscr{A}[(v^c)^\infty]$．$\mathscr{A}[(v^c)^\infty]$ は $\mathscr{A}[v^\infty]$ の Serre 双対である (各 m に対し，有限群スキーム $\mathscr{A}[(v^c)^m]$ は，$\mathscr{A}[v^m]$ の Cartier 双対と同形)．従って，(偏極のない)p 可除群 $\mathscr{A}[v^\infty]$ から，偏極を込めた p 可除群 $\mathscr{A}[p^\infty]$ が一意的に復元できる．さらに，$e = \mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$ とおけば，対応 $\mathscr{A}[v^\infty] \longleftrightarrow \mathscr{G} := e \cdot \mathscr{A}[v^\infty]$ によって，$M_n(\mathscr{O}_{F,v})$-作用付きの $\mathscr{A}[v^\infty]$ が，p 可除群 $\mathscr{G}$ から一意的に復元できる (森田同値)．

符号の条件 "$G'(\mathbb{R}) \cong \mathrm{U}(1, n-1)$" から，$\mathscr{G}$ は高さ n の 1 次元 p 可除群となる．また，$\mathscr{A}[v^\infty]$ は高さ n^2，次元 n であり，$\mathscr{A}[(v^c)^\infty]$ は高さ n^2，次元 $n(n-1)$ である．すでに述べたように，$\mathscr{A}[p^\infty]$ は高さ $2n^2$, 次元 n^2 の p 可除群である．

Sh の標数 p の幾何学的点 x を固定する．x 上の $\mathscr{A}, \mathscr{G}$ のファイバーをそれぞれ $\mathscr{A}_x, \mathscr{G}_x$ で表す．アーベル多様体 $\mathscr{A}_x$ の変形に対し，p 可除群 $\mathscr{A}_x[p^\infty]$ の変形を対応させる関手は圏同値である (Serre-Tate 理論)．

以上をあわせて，

n^2 次元アーベル多様体 $\mathscr{A}_x$ の変形 ($\mathscr{O}_B$ の作用込み，偏極込み)
$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ n^2 次元 p 可除群 $\mathscr{A}_x[p^\infty]$ の変形 ($M_n(\mathscr{O}_{F,v}) \times M_n(\mathscr{O}_{F,v^c})$ の作用込み，偏極込み)
$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ n 次元 p 可除群 $\mathscr{A}_x[v^\infty]$ の変形 ($M_n(\mathscr{O}_{F,v})$ の作用込み, 偏極なし)
$\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ 1 次元 p 可除群 $\mathscr{G}_x$ の変形 (準同形環なし, 偏極なし)

という 1 対 1 の対応が得られる．志村多様体 Sh の x における完備化は $\mathscr{A}_x$ の変形空間と同形であるから，この対応により，志村多様体 Sh の局所構造を 1 次元 p 可除群 $\mathscr{G}_x$ の変形理論を用いて調べることができる．

注意 4.3. ここでは虚二次体で分解する素数 p をとっていたため，$\mathscr{O}_{F,v} = \mathbb{Z}_p$ となり，$\mathscr{G}_x$ の変形に準同形環を込めて考える必要が無かった．もし，CM 体上で類似の考察する際には，$\mathscr{G}_x$ の変形として $\mathscr{O}_{F,v}$ の作用を込めたものを考える必要がある．

4.4. **標数 p の志村多様体．** 以下では簡単のため，$\mathscr{O}_{F,v}$ の剰余体 $k(v)$ の代数閉包を $k := \overline{k(v)}$ とおく．また，$X := \mathrm{Sh} \otimes_{\mathscr{O}_{F,v}} k$ とおく．X 上には高さ n の 1 次元 p 可除群 $\mathscr{G} \to X$ が構成されている．X には，次のようにして，$\mathscr{G}$ の p 等分点の k-有理点の個数による階層 (stratification) が入る．ここで述べることは，モジュラー曲線に対する超特異点の高次元版である．

$x \in X(k)$ に対し，$\mathscr{G}_x$ の p 等分点の k-有理点のなす群 $\mathscr{G}_x[p](k)$ の $\mathbb{F}_p$ 上のベクトル空間としての次元は 0 以上 $n-1$ 以下である．この値により X を直和に分割する：

$$X = \coprod_{h=0}^{n-1} X^{(h)}.$$

記述を簡単にするため，$h=-1$ に対しては $X^{[-1]}=X^{(-1)}=\emptyset$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

- 標数 p の代数閉体上の 1 次元 p 可除群の分類により，

  $x \in X^{(h)}(k) \iff \mathscr{G}_x[p](k) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\oplus h} \iff \mathscr{G}_x \cong \Sigma_{n-h} \oplus (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{\oplus h}$

  である．ここで Σ_{n-h} は高さ $n-h$ の 1 次元形式群 ($\mathbb{Q}_p$ 上の高さ $n-h$ の Lubin-Tate 群) であり，$\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ はエタールな p 可除群である．
- 1 次元 p 可除群の変形理論により，$X^{(h)}$ は h 次元の滑らかな代数多様体であることが分かる．また，

  $$X^{[h]} := \coprod_{0 \le i \le h} X^{(i)}$$

  は h 次元の滑らかで射影的な代数多様体であり，境界 $X^{[h]} \backslash X^{(h)} = X^{[h-1]} \subset X^{[h]}$ は滑らかな因子である ([HT])．
- $x \in X^{(n-1)}(k)$ であること，$\mathscr{A}_x$ が通常アーベル多様体であること，$\mathscr{G}_x$ が形式乗法群 $\widehat{\mathbb{G}}_m$ と同形であることは同値である ($\widehat{\mathbb{G}}_m$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の高さ 1 の Lubin-Tate であることに注意)．

注意 4.4. 標数 p の Siegel モジュラー多様体にはアーベル多様体の p 等分点に注目した Ekedahl-Oort 階層が定義されているが ([O1])，上で定義した階層はこの類似である．本稿で扱っている志村多様体においては，Ekedahl-Oort 階層と Newton 多角形階層が一致し，Oort の意味での “葉層構造” が自明になっている ([O2])．これは，志村多様体の局所構造が 1 次元 p 可除群の変形によって統制されていることの現われであり，「Hasse 不変量」がうまく定義できることにも対応していると考えられる．

5. 主結果 — Hasse 不変量の一般化

記号は全て前節の通りとする．1 次元 p 可除群 $\mathscr{G}/X$ の相対的 Lie 環の双対を

$$\mathscr{L} := (\mathrm{Lie}\,\mathscr{G})^{\vee}$$

とおく．X の幾何学においては，この直線束が Hodge バンドルの類似の役割を果たす (Hodge バンドルより細かい情報を与えてくれる)．

定理 5.1. $\mathscr{L}^{\otimes 2n} \cong \omega$ である．特に，$\mathscr{L}$ は X 上の豊富な直線束である．

後半の主張は ω が豊富である ([MB]. また [FC] も参照) ことから従う．

定理 5.2. $0 \le h \le n-1$ に対し，

$$H_h \in H^0\big(X^{[h]}, \mathscr{L}^{\otimes(p^{n-h}-1)}\big)$$

が存在し，次をみたす．

(1) H_h は $X^{(h)} \subset X^{[h]}$ において可逆であり，$X^{[h-1]} \subset X^{[h]}$ で一位の零を持つ．
(2) 直線束の同形 $\mathscr{L}^{\otimes 2n} \cong \omega$ を通して，第 2 節で定義した古典的な微分形式版 Hasse 不変量 H と H_{n-1} の間には，$H_{n-1}^{\otimes 2n} = H$ の関係がある．

この定理で与えられた H_h を一般化された **Hasse 不変量**(generalized Hasse invariant) と呼ぶことにしよう．(1) が「井草の定理」(定理 3.1) の高次元類似である (本来は "高余次元類似" というべきかもしれない)．(2) から，特に，X 上では古典的 Hasse 不変量 H は $X^{[n-2]}$ に沿って $2n$ 位の零を持つことが分かる．すなわち，X 上では H は「井草の定理」の類似をみたさない (X は Siegel モジュラー多様体の特殊な部分多様体であるから，これは何も驚くべきことではない)．このことから，H_{n-1} は古典的 Hasse 不変量 H の「精密化」を与えているといえる．

注意 5.3. モジュラー曲線は $\mathbb{Q}$ 上の GL(2) に伴う志村多様体であるから，厳密に言えば，ここで扱っているユニタリ型志村多様体はモジュラー曲線の "一般化" ではない ("高次元類似" と言うべきである)．ただし，p 可除群の変形空間のレベルでは，次のような関係がある．$n = 2$ の場合，すなわちユニタリ群 $\mathrm{U}(1,1)$ に伴う志村多様体の場合は，$\mathscr{G}$ がモジュラー曲線上の普遍楕円曲線の p 可除群 $\mathscr{E}[p^\infty]$ に対応し，$\mathscr{A}[p^\infty]$ が $\mathscr{E}[p^\infty]^{\oplus 4}$ に対応する．$n = 2$ の場合に，微分形式版 Hasse 不変量が $2n = 4$ 位の零を持つことは，このようにして説明・証明することができる．

H_h の構成の方針は以下の通りである．第 2 節で定義した古典的な Hasse 不変量の場合と同様に，$\mathscr{G}/X$ の相対 Frobenius 射 $F\colon \mathscr{G}[p] \to \mathscr{G}[p]$ を考えるのだが，問題は $h < n-1$ の場合は $\mathrm{Ker}\, F$ 上で $F = V = 0$ となってしまうことである．そこで Ekedahl-Oort 理論のテクニックを用いる ([O1])．すなわち，$\mathrm{Ker}\, F$ だけでなく，F の作用による kernel filtration

$$0 \subset \mathrm{Ker}\, F \subset \mathrm{Ker}\, F^2 \subset \mathrm{Ker}\, F^3 \subset \cdots \subset \mathscr{G}[p]$$

を考え，その部分商への V の作用を見る．

$$G_i := \mathrm{Ker}\, F^i / \mathrm{Ker}\, F^{i-1} \qquad (1 \le i \le n-h)$$

とおく．このとき，$n-h-1$ 個の F の列

$$F^{n-h-1}\colon G_{n-h}^{(p)} \xrightarrow{\cong} G_{n-h-1}^{(p^2)} \xrightarrow{\cong} G_{n-h-2}^{(p^3)} \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} G_1^{(p^{n-h})}$$

は全て同形である．さらに，$X^{[h]}$ 上で $\mathrm{Ker}\, F^{n-h-1} \subset \mathrm{Ker}\, V$ となるので，

$$V\colon G_{n-h}^{(p)} \longrightarrow G_1$$

が誘導される．この射は $X^{(h)} \subset X^{[h]}$ 上で同形であり，境界 $X^{[h-1]} \subset X^{[h]}$ 上では消える．これを合成して，

$$V \circ (F^{n-h-1})^{-1}\colon G_1^{(p^{n-h})} \longrightarrow G_1$$

を得る．$\mathrm{Lie}\, G_1 = \mathrm{Lie}\, \mathscr{G} = \mathscr{L}^{\vee}$ であるから，

$$\mathrm{Hom}\big(\mathscr{L}^{\otimes(-p^{n-h})}, \mathscr{L}^{\otimes(-1)}\big) = H^0\big(X^{[h]}, \mathscr{L}^{\otimes(p^{n-h}-1)}\big)$$

の元が得られる．これが求める H_h である．群スキームに関するこれらの事実は，Dieudonné 加群を具体的に計算して証明できる．また，H_h が $X^{[h-1]}$ において 1 位の零を持つことは，p 可除群の普遍変形空間を Th. Zink の display 理論を用いて計算して証明することができる ([Zi])．

6. 定理 5.1, 定理 5.2 のいくつかの応用例

系 6.1. $X^{[h-1]} \subset X^{[h]}$ は豊富な因子である．従って，$X^{(h)} = X^{[h]} \backslash X^{[h-1]}$ はアフィン多様体である．特に，$X^{(h)}$ は次元が 1 以上の射影的代数多様体を含まない．

証明. 定理 5.2, (1) より因子 $X^{[h-1]} \subset X^{[h]}$ に伴う直線束が $\mathscr{L}^{\otimes(p^{n-h}-1)}$ と同形であることが分かる．$\mathscr{L}$ は豊富なので，$\mathscr{L}^{\otimes(p^{n-h}-1)}$ も豊富．従って，$X^{[h-1]}$ は豊富な因子である． □

注意 6.2. これは，いわゆる "**Raynaud のトリック**" のユニタリ型志村多様体類似である．Siegel モジュラー多様体に対する "Raynaud のトリック" については，[O1] を参照．Siegel モジュラー多様体上では，現在のところ Ekedahl-Oort 階層が "quasi-affine" であることしか知られていないと思われる (これについては Oort の予想がある ([O1]))．アフィンであることを示すには，Siegel モジュラー多様体上で「Hasse 不変量」のようなものをうまく構成する必要があると思われるのだが，どうだろうか? ([EvdG] も参照)

弱 Lefschetz 定理やアフィン多様体のエタールコホモロジーの消滅定理を用いることで，次の系が得られる．

系 6.3. $h \geq 1$ ならば，$\pi_0(X^{(h)}) = \pi_0(X^{[h]}) = \pi_0(X) = \pi_0(\mathrm{Sh}(\mathbb{C}))$ である．

これにより，正標数の代数多様体 $X^{(h)}$, $X^{[h]}$ の連結成分の個数が，$\mathbb{C}$ 上の不変量で計算できることになる．また，同様の方法で，ある種の「高次元井草多様体」の既約性を示すこともできる (cf. [HT])．

系 6.4. $i > h$ に対し，$H^i_{\text{ét},c}\big(X^{(h)}, \Lambda\big) = 0$ である ($\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_\ell, \mathbb{Q}_\ell$)．

同様の消滅定理は，Harris-Taylor により，保型表現を駆使した大域的手法により示されている ([HT])．この系により，彼等の消滅定理 (の一部) を "一般化された Hasse 不変量" を用いて幾何学的に証明・説明することができる．ただし，彼等の消滅定理

が，全てこの方法により幾何学的に説明できるわけではない (幾何学では説明できない「表現論的」な消滅定理も存在すると思われる).

$X^{(0)}$ は 0 次元なので，弱 Lefschetz 定理を使うことはできないが，点の個数 $\#X^{(0)}$ と $\mathscr{L}$ を直線束 $\mathscr{L}$ の degree を使って "数える" ことができる．以下の系は，モジュラー曲線の場合の公式

$$(\text{超特異点の個数}) = (p-1)\cdot\deg\omega$$

の高次元ユニタリ型志村多様体類似である.

系 6.5.

$$\#X^{(0)} = \left(\prod_{i=1}^{n-1}(p^i-1)\right)\cdot\deg\mathscr{L}$$

左辺の $\#X^{(0)}$ はある種の「類数」と解釈できる数論的な量である．また，右辺の $\deg\mathscr{L}$ は Hodge バンドル ω の degree を使って計算することもできるので，$\mathrm{Sh}(\mathbb{C})$ の代数幾何・微分幾何的な不変量である．従って，系 6.5 は，標数 p の志村多様体 X とは関係無く定義できる 2 つの不変量を繋いでいる．これは，モジュラー曲線に対する Deuring の定理の一般化である (第 3 節を参照).

ここでは p の外のレベル構造をつけて fine モジュライ空間で考えているので，第 3 節に述べたような「誤差項」は存在しない．もちろん，レベル構造を全て外して，「Eichler の類数公式」の一般化を得ようとするならば,「誤差項」が出てくることになるだろう．(ただし，ユニタリ型志村多様体には，j-直線や λ-直線のような簡単な具体的表示が無い (たぶん知られていない) ので，実際に計算を実行して具体的な「類数公式」を得るのは難しいかもしれない)

一方，次のような幾何学的な系も得られる.

系 6.6. 射影的代数曲線 $X^{[1]}$ の各連結成分の種数は 2 以上である.

証明. 代数的基本群を用いた証明を与える．連結成分毎に考える．適当に基点を固定すると，$X^{[h-1]}\subset X^{[h]}$ は豊富な因子であるから，エタール基本群に対する Lefschetz 型定理を繰り返し用いることにより，全射

$$\pi_1(X^{[1]})\longrightarrow\pi_1(X)$$

が得られる．一方，pro-p 部分に関しては $\pi_1(X)$ は $\pi_1(\mathrm{Sh}(\mathbb{C}))$ と同形である．従って $\pi_1(X)$ は非可換群であり，特に $\pi_1(X^{[1]})$ は非可換群である．これより $X^{[1]}$ の各連結成分の種数は 2 以上であることが分かる. □

一方，標数pのアーベル曲面のモジュライ空間 (Siegel 3-fold) は，超特異部分が多くの$\mathbb{P}^1$を含むことが知られている (Moret-Bailly 族．[LO] 等を参照)．これは比較してみるとなかなか興味深い現象であると思われる．

7. 今後の課題

本稿で定義した"一般化されたHasse不変量"には，これ以外にも様々な応用が期待される．モジュラー曲線の場合は，Eisenstein 級数E_{p-1}がHasse不変量の標数0への持ち上げを与えており，これはモジュラー形式の合同性，標数p保型形式・p進保型形式，重さ1の保型形式に伴うGalois表現の構成等に様々な応用を持つ．このことの「高次元版」を考察することは，面白い問題である (本稿で考察した志村多様体にはカスプが無いので"Eisenstein 級数"は存在しない．何か，その代わりになるものはあるのだろうか?)．また，Harris-Taylor, Taylor-吉田の結果 ([HT], [TY]) と組み合わせて，大域・局所 Langlands 対応への応用を与えることは，極めて重要な問題である．(いくつかの応用は [I1], [I2] で与えられる予定である)

本稿で扱った以外の志村多様体について同様の考察をすることは，非常に興味深い問題である．$F/\mathbb{Q}$で分岐・惰性する素数の場合や，Bが分岐する素点の場合には，幾何学的な様子が全く変わってしまう (モジュライ空間が特異点を持つこともある)．コンパクトでない志村多様体を扱う場合は，コンパクト化の境界について考察する必要がある．符号$\mathrm{U}(p,q)$のユニタリ群やRapoport-Zink空間への一般化も考えられる．

もちろん，Siegelモジュラー多様体やHilbertモジュラー多様体のような，古典的なモジュラー多様体を考えることも重要である．本稿では最も古典的な場合 (楕円曲線の場合) しか述べなかったが，これについては，すでに多くの人による研究がなされている (ここに全てを挙げることはできないので，詳しくは [IKO], [KO1], [KO2], [GO], [G], [O1], [LO], [Y] やその中の文献表を参照してください)．標数pにおけるこれらの多様体の幾何学は (その定義の単純さに反して)，それほど"単純"ではない．

いずれにしろ，1次元形式群の変形で統制することはできない場合は，志村多様体の幾何学的構造が格段に難しくなると予想される．もしかしたら，一般には"Hasse不変量"のような簡単な幾何学的対象は存在せず，Rapoport-Zinkのp進一意化理論や，Oortによる"葉層構造"などのより複雑な幾何学的構造と組み合わせて理解する必要があるのかもしれない ([O2], [RZ2], [Fa], [Ma])．

また，$K3$曲面のモジュライ空間に対しては，すでに，van der Geer-桂により，本稿と同様の結果が得られていることを付記しておく ([vdGK])．そこでは超特異$K3$曲面の定めるサイクル類が計算されているが，その公式の形が系6.5と似ているのは興

味深い ([vdGK], Theorem 15.1). $K3$ 曲面のモジュライ空間は，特殊直交群 $\mathrm{SO}(2, 19)$ に伴う志村多様体とも考えることができ，数論的にも興味深い対象である.

謝辞. この研究集会での講演の機会を与えてくださった池田保先生，様々な形で著者を励ましてくださった加藤和也先生，標数 p のモジュライ空間の幾何学に関する有益な示唆・助言を与えてくださった G. van der Geer 氏, F. Oort 氏に感謝します.

参考文献

[C] Clozel, L, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de* $\mathrm{GL}(n)$, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 73 (1991), 97–145.

[DR] Deligne, P., Rapoport, M. *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, in Modular functions of one variable, II. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973, 143–316.

[Deu] Deuring, M., *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 14, (1941), 197–272.

[Ei] Eichler, M., *Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren*, Math. Z. 43 (1938), no. 1, 102–109.

[EvdG] Ekedahl, T., van der Geer, G., *Cycle Classes of the E-O Stratification on the Moduli of Abelian Varieties*, preprint (2004), math.AG/0412272.

[El] Elkies, N., *The existence of infinitely many supersingular primes for every elliptic curve over* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. 89 (1987), no. 3, 561–567.

[FC] Faltings, G., Chai, C.-L., *Degeneration of abelian varieties* (With an appendix by David Mumford), Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 22., Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[Fa] Fargues, L., *Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales*, Astérisque No. 291 (2004), 1–199.

[vdGK] van der Geer, G., Katsura, T., *On a stratification of the moduli of K3 surfaces*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 2 (2000), no. 3, 259–290.

[GO] Goren, E., Oort, F., *Stratifications of Hilbert modular varieties*, J. Algebraic Geom. 9 (2000), no. 1, 111–154.

[G] Goren, E., *Hasse invariants for Hilbert modular varieties*, Israel J. Math. 122 (2001), 157–174.

[HT] Harris, M., Taylor, R. *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties* (With an appendix by Vladimir G. Berkovich), Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[IKO] Ibukiyama, T., Katsura, T., Oort, F., *Supersingular curves of genus two and class numbers*, Compositio Math. 57 (1986), no. 2, 127–152.

[I1] Ito, T., *Hasse invariants for some unitary Shimura varieties*, in preparation.

[I2] 伊藤哲史, 『志村多様体の悪い還元について』, 2006 年度代数学シンポジウム報告集 (予定).

[Ig] Igusa, J., *Class number of a definite quaternion with prime discriminant*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 44 (1958) 312–314.

[KO1] Katsura, T., Oort, F., *Families of supersingular abelian surfaces*, Compositio Math. 62 (1987), no. 2, 107–167.

[KO2] Katsura, T., Oort, F., *Supersingular abelian varieties of dimension two or three and class numbers*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 253–281, Adv. Stud. Pure Math., 10, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[KM] Katz, N., Mazur, B., *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Annals of Mathematics Studies, 108, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[Ko1] Kottwitz, R. *Points on some Shimura varieties over finite fields*, J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 373–444.

[Ko2] Kottwitz, R. *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. 108 (1992), no. 3, 653–665.

[LO] Li, K.-Z., Oort, F., *Moduli of supersingular abelian varieties*, Lecture Notes in Mathematics, 1680. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Ma] Mantovan, E., *On certain unitary group Shimura varieties*, Astérisque No. 291 (2004), 201–331.

[MB] Moret-Bailly, L., *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque No. 129 (1985).

[O1] Oort, F., *A stratification of a moduli space of abelian varieties*, Moduli of abelian varieties (Texel Island, 1999), 345–416, Progr. Math., 195, Birkhäuser, Basel, 2001.

[O2] Oort, F., *Foliations in moduli spaces of abelian varieties*, J. Amer. Math. Soc. 17 (2004), no. 2, 267–296.

[RZ1] Rapoport, M., Zink, Th., *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. 68 (1982), no. 1, 21–101.

[RZ2] Rapoport, M., Zink, Th., *Period spaces for p-divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, 141. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Sil] Silverman, J., *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Mathematics, 106., Springer-Verlag, New York, 1992.

[TY] Taylor, R., Yoshida, T., *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, preprint (2004), math.NT/0412357, to appear in J. Amer. Math. Soc.

[Y] Yu, C.-F., *On the supersingular locus in Hilbert-Blumenthal 4-folds*, J. Algebraic Geom. 12 (2003), no. 4, 653–698.

[Zi] Zink, Th., *The display of a formal p-divisible group*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, I., Astérisque No. 278 (2002), 127–248.