数理解析研究所講究録
1524巻 2006年 56-70

Heisenberg描像における場の量子論の解法

京都大学・数理解析研究所　阿部 光雄 (Mitsuo Abe)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

1. 序

Heisenberg描像において場の量子論を解くとは，場の演算子 (Heisenberg演算子) とその表現(又は，期待値汎関数，Wightman関数)を求めることである．ただし，場の演算子は場の方程式 (一般に連立非線形偏微分方程式) と同時刻での正準 (反) 交換関係を満たすものとする．ここで,「場の演算子を求める」とは具体的に何をすることなのかが問題である．従来からある方法は，場の演算子を自由場 (便宜的なもの，若しくは漸近場) を用いた具体的な表式として構成することであり，それが出来れば場の演算子の表現も自由場の表現から自動的に得られる．例えば，Thirringモデルや Schwinger モデルなどがそうであった．それに対し，我々が提案する方法は，場の演算子は，それらが満たす代数 (一般時刻での (反) 交換関係全体) を与えることで抽象的に決まると考え, その表現は代数との整合性と物理的要請から構成しようというものである [1]．ここで，一般時刻での (反) 交換関係は，場の方程式から導かれる連立線形偏微分方程式と，正準 (反) 交換関係から得られる同時刻 (反) 交換関係を初期条件とする Cauchy問題 (初期値問題) の解として与えられる．ただし，解くべき連立線形偏微分方程式の係数と未知関数が一般に非可換であることが問題を複雑にしているが，そのような Cauchy問題でも解の存在と一意性は認めるものとする．

このような方法でこれまでに厳密解が構成された例はいずれも不定計量の場の量子論のモデルで，次のようなものがある．

1) N次元Glaser モデル

解くべき連立線形偏微分方程式の係数と未知関数が (結果的に) 可換な場合で，摂動論的には Feynman図は内線を全く含まないもののみ有効．例えば，2次元 Dilaton 重力 (共形ゲージ)，など．

2) N次元1ループモデル

解くべき連立線形偏微分方程式の係数と未知関数が非可換だが扱いやすい場合で，摂動論的には Feynman図は treeまたは1ループのみ．例えば，2次元重力 (共変ゲージ), 2次元BF理論 (共変ゲージ), 2次元誘導重力の局所版 (光錐ゲージ)，など．

2次元誘導重力の局所版 (共変ゲージ) は2次元重力 (共変ゲージ) から指数関数的な場の再定義によって得られるが，Feynman図は無限個の多重ループを含む．

3) 非線形な場の方程式が本質的に代数方程式になり，実質的に自由場に非線形な拘束条件がついたものに相当する．例えば，2次元重力(共形ゲージ), 2次元BF(YM)理論+カイラルDirac場(光錐ゲージ)，など．

この解法で得られた新たな知見として，場の方程式アノマリーがある．これは，2次元重力と光錐ゲージの2次元BF(YM)理論において場の方程式の一部が表現レベルで破れる現象である．これらの理論でNoetherカレントから定義したBRSチャージにアノマリーがある(冪零性が破れる)のは，場の方程式アノマリーが背後にあるためである．しかし，アノマリーのないBRSチャージも存在するのでBRS対称性自体に破れがあるわけではない．

以下の節では，演算子解の構成，Wightman関数の構成，場の方程式アノマリーについて，上に述べた具体的なモデルを使って解説する．

2. 演算子解の構成

2.1. 自由スカラー場

まず自明な例として，$(3+1)$次元の自由(中性)スカラー場について復習する．ラグランジュアン密度とそれから得られる場の方程式，正準共役は次の通りである：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\cdot\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} \text{場の方程式：} & (\Box + m^2)\phi = 0, \\ \text{正準共役：} & \pi = \partial_0\phi. \end{cases} \tag{2.2}$$

これより，一般時刻の場の交換関係に対して次のCauchy問題が設定出来る($|_0 \equiv |_{x^0=y^0}$)：

$$\begin{aligned} (\Box^x + m^2)[\phi(x),\, \phi(y)] &= 0, \\ [\phi(x),\, \phi(y)]|_0 &= 0, \\ \partial_0{}^x[\phi(x),\, \phi(y)]|_0 &= -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで，次のCauchy問題の解として定義される不変デルタ関数$\Delta(x;\, m^2)$を導入する：

$$\begin{aligned} (\Box^x + m^2)\Delta(x;\, m^2) &= 0, \\ \Delta(x;\, m^2)|_{x^0=0} &= 0, \\ \partial_0{}^x\Delta(x;\, m^2)|_{x^0=0} &= -\delta(\boldsymbol{x}); \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\Delta(x;\, m^2) = \frac{1}{(2\pi)^3 i}\int d^4p\, \epsilon(p_0)\delta(p^2 - m^2)e^{-ipx}. \tag{2.5}$$

式(2.3)と(2.4)を比較して，Cauchy問題の解の一意性を用いれば，次の演算子解が得られる：

$$[\phi(x),\, \phi(y)] = i\,\Delta(x-y;\, m^2). \tag{2.6}$$

この演算子解は，下記の保存カレント $J_\mu(x,z)$ を用いて $\phi(x)$ を時刻 y^0 の演算子で非局所的に表すことにより，2次元交換関係を同時刻交換関係に帰着させて計算する通常の方法で得たものと，もちろん一致する．

$$J_\mu(x,z) \equiv \partial_\mu^z \Delta(x-z;\, m^2)\cdot\phi(z) - \Delta(x-z;\, m^2)\partial_\mu\phi(z), \quad \partial_z^\mu J_\mu(x,z) = 0, \tag{2.7}$$

$$\phi(x) = \int d^3z\, J_0(x,z)|_{z^0=x^0} = \int d^3z\, J_0(x,z)|_{z^0=y^0}. \tag{2.8}$$

2.2. Glaser モデル

一般に，スピンと質量が等しく計量が互いに逆符号の2種類の場があり，相互作用項が2種の場の和だけで表される場合がすべてこれに該当する [2]．ここでは最も簡単なスカラー場 (N 次元) について考え，ラグランジュアン密度を次のようにとる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_1\cdot\partial_\mu\phi_1 - m^2\phi_1^2) - \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi_2\cdot\partial_\mu\phi_2 - m^2\phi_2^2) + F(\phi_1+\phi_2). \tag{2.9}$$

ただし，F は適当な任意関数とする．摂動論的には，容易に分かるように，ϕ_1-ϕ_1 プロパゲータと ϕ_2-ϕ_2 プロパゲータの符号だけの違いにより，内線を持つ Feynman グラフからの寄与は完全にキャンセルし，外線のみからなる Feynman グラフだけが残る．最終的にキャンセルしてしまうものは最初から現れないように場の変数を再定義した方が見通しが良いので，ϕ_1, ϕ_2 から $\varphi \equiv \phi_1+\phi_2$, $\tilde\varphi \equiv \phi_1-\phi_2$ に変数変換し，ラグランジュアン密度を次のように書き換える [3]：

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\tilde\varphi\cdot\partial_\mu\varphi - m^2\tilde\varphi\varphi + F(\varphi). \tag{2.10}$$

こうすれば，φ-φ プロパゲータが存在しないことから Feynman グラフに内線が現れないことは自明である．

場の方程式

$$(\Box+m^2)\varphi = 0, \qquad (\Box+m^2)\tilde\varphi = F'(\varphi) \tag{2.11}$$

と同時刻交換関係から，一般時刻の場の交換関係に対して次の Cauchy 問題が設定出来る：

$$\left\{\begin{aligned} (\Box+m^2)^x[\varphi(x),\,\varphi(y)] &= 0,\\ [\varphi(x),\,\varphi(y)]|_0 &= 0,\\ \partial_0{}^x[\varphi(x),\,\varphi(y)]|_0 &= 0; \end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

$$\left\{\begin{aligned} (\Box+m^2)^x[\varphi(x),\,\tilde\varphi(y)] &= 0,\\ [\varphi(x),\,\tilde\varphi(y)]|_0 &= 0,\\ \partial_0{}^x[\varphi(x),\,\tilde\varphi(y)]|_0 &= -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}); \end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

$$\left\{\begin{aligned} (\Box+m^2)^x[\tilde\varphi(x),\,\tilde\varphi(y)] &= F''(\varphi(x))[\varphi(x),\,\tilde\varphi(y)],\\ [\tilde\varphi(x),\,\varphi(y)]|_0 &= 0,\\ \partial_0{}^x[\tilde\varphi(x),\,\tilde\varphi(y)]|_0 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

ただし，式 (2.14) の右辺で $F''(\varphi(x))$ に含まれる $\varphi(x)$ と $[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)]$ の順序は，$F'(\varphi(x))$ と $\tilde{\varphi}(y)$ の交換関係をとる際にライプニッツ則に従って対称化してあるものとする．

解の一意性より，Cauchy 問題 (2.12)，(2.13) の解はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
[\varphi(x),\, \varphi(y)] &= 0, && (2.15)\\
[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)] &= i\Delta(x-y;\, m^2) && (2.16)
\end{aligned}
$$

となる．式 (2.16) の右辺が c-数であることから，結果的に式 (2.14) における順序の問題は解消する．Cauchy 問題 (2.14) の解については，式 (2.16) と恒等式 (解の公式)

$$
\begin{aligned}
X(x,y) &= -\int d^N u\, \epsilon(x,y;u)\Delta(x-u;\, m^2)\,(\Box+m^2)^u X(u,y)\\
&\quad -\int d^{N-1}u\,[\Delta(x,u)\partial_0{}^u X(u,y) - \partial_0{}^u\Delta(x,u)\cdot X(u,y)]|_{u^0=y^0}, \qquad (2.17)\\
\epsilon(x,y;u) &\equiv \theta(x^0-u^0)-\theta(y^0-u^0)
\end{aligned}
$$

を用いることにより，次のように与えられる：

$$
[\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(y)] = -i\int d^N u\, \epsilon(x,y;u)\Delta(x-u;\, m^2)F''(\varphi(u))\Delta(u-y;\, m^2). \qquad (2.18)
$$

Glaser モデルの一例として，2 次元 Dilaton 重力 [4] があげられる．ラグランジュアン密度は，重力場を $g_{\mu\nu}$，Dilaton 場を ϕ，宇宙定数を Λ として次式で与えられる：

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{Dilaton}} = \sqrt{-g}\exp(-2\phi)\,[4g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\cdot\partial_\nu\phi + R + 4\Lambda]. \qquad (2.19)
$$

ここで，共形ゲージのもとで場の再定義 $(g_{\mu\nu},\, \phi) \to (\varphi,\, \tilde{\varphi})$ を次のようにとる：

$$
\exp(-2\phi) \equiv \tilde{\varphi}, \qquad g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu}\exp(2\phi+\varphi). \qquad (2.20)
$$

すると，ラグランジュアン密度は

$$
\mathcal{L}_{\mathrm{Dilaton}} = \partial^\mu\tilde{\varphi}\cdot\partial_\mu\varphi + 4\Lambda\,\exp(\varphi) + (\text{total divergence}) \qquad (2.21)
$$

と書き表され，指数関数型の相互作用項をもつ Glaser モデルに帰着する．その演算子解は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
[\varphi(x),\, \varphi(y)] &= 0,\\
[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)] &= iD(x-y),\\
[\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(y)] &= -4i\Lambda\int d^2u\ \epsilon(x,y;u)D(x-u)\exp(\varphi(u))D(u-y), \qquad (2.22)\\
D(x) &\equiv \Delta(x;\, m^2)|_{m=0}\ :\ \text{Pauli-Jordan } D\ \text{関数}.
\end{aligned}
$$

2.3. 1ループモデル

Glaser モデルのラグランジュアン密度 (2.10) に $\tilde{\varphi}$ に関して1次の相互作用項を追加したものが1ループモデルである [3]. このモデルでは，摂動論的にループ数が高々1個であることは容易に示される．以下では質量ゼロの場合を考え，ラグランジュアン密度を次のようにとる：

$$\mathcal{L} \;=\; \partial^\mu \tilde{\varphi} \cdot \partial_\mu \varphi + \tilde{\varphi} F_1(\varphi) + F_0(\varphi). \tag{2.23}$$

ただし，F_0, F_1 は適当な任意関数とする．場の方程式

$$\Box \varphi - F_1(\varphi) = 0, \qquad (\Box - F_1{}'(\varphi))\tilde{\varphi} = F_0{}'(\varphi) \tag{2.24}$$

と同時刻交換関係から，一般時刻の場の交換関係に対して Cauchy 問題が設定出来る．まず，$[\varphi(x),\, \varphi(y)]$ については，

$$\begin{aligned} (\Box - F_1{}'(\varphi))^x[\varphi(x),\, \varphi(y)] &= 0, \\ [\varphi(x),\, \varphi(x)]|_0 &= 0, \\ \partial_0{}^x[\varphi(x),\, \varphi(y)]|_0 &= 0, \end{aligned} \tag{2.25}$$

となる．ただし，$F_1{}'(\varphi(x))$ に含まれる $\varphi(x)$ と $[\varphi(x),\, \varphi(y)]$ の順序は対称化されてあるものとする．解の一意性により，

$$[\varphi(x),\, \varphi(y)] \;=\; 0 \tag{2.26}$$

を得る．次に，$[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)]$ に関する Cauchy 問題は，

$$\begin{aligned} (\Box - F_1{}'(\varphi))^x[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)] &= 0, \\ [\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(x)]|_0 &= 0, \\ \partial_0{}^x[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)]|_0 &= -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{2.27}$$

のように設定される．上と同様，$F_1{}'(\varphi(x))$ に含まれる $\varphi(x)$ と $[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)]$ の順序は対称化されてあるものとする．この解は，演算子 $\mathcal{D}(x,y)$ を Cauchy 問題の解によって定義することにより

$$[\varphi(x),\, \tilde{\varphi}(y)] \;=\; i\mathcal{D}(x,y) \tag{2.28}$$

のように表すことにする．式 (2.26) と適当な Cauchy 問題の解の一意性を用いることにより，$\mathcal{D}(x,y)$ に関する次の性質が得られる：

$$[\mathcal{D}(x,y),\, \varphi(z)] \;=\; 0, \tag{2.29}$$

$$\mathcal{D}(x,y) \;=\; -\mathcal{D}(y,x). \tag{2.30}$$

元々 $\mathcal{D}(x,y)$ は偏微分方程式における係数と未知関数の可換性を仮定しない Cauchy 問題の解として定義されていたが，式 (2.29) により結果的に可換性を仮定した解と一致する．

更に，恒等式 (解の公式；演算子の順序は記されてる通りとする)

$$X(x,y) = -\int d^N u\, \epsilon(x,y;u)\mathcal{D}(x,u)(\Box - F_1{}'(\varphi))^u X(u,y)$$
$$\qquad - \int d^{N-1}u\, [\mathcal{D}(x,u)\partial_0{}^u X(u,y) - \partial_0{}^u \mathcal{D}(x,u)\cdot X(u,y)]|_{u^0=y^0} \quad (2.31)$$

を用いることにより，

$$[\mathcal{D}(x,y),\, \tilde{\varphi}(z)] \;=\; -i\int d^N u\, \epsilon(x,y;u)\mathcal{D}(x,u)F_1{}''(\varphi(u))\mathcal{D}(u,y)\mathcal{D}(u,z) \quad (2.32)$$

が得られる．

最後に，$[\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(y)]$ に対する Cauchy 問題は，式 (2.28) を用いて

$$\begin{aligned}(\Box - F_1{}'(\varphi))^x[\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(y)] &= i[F_1{}''(\varphi(x))\mathcal{D}(x,y)\tilde{\varphi}(x) + F_0{}''(\varphi(x))\mathcal{D}(x,y)],\\ [\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(x)]|_0 &= 0, \qquad (2.33)\\ \partial_0{}^x[\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(y)]|_0 &= 0\end{aligned}$$

と設定され (演算子の順序は記されている通り)，その解は

$$[\tilde{\varphi}(x),\, \tilde{\varphi}(y)] = -i\int d^N u\, \epsilon(x,y;u)\mathcal{D}(x,u)[F_1{}''(\varphi(u))\mathcal{D}(u,y)\tilde{\varphi}(u) + F_0{}''(\varphi(u))\mathcal{D}(u,y)] \quad (2.34)$$

で与えられる．

1ループモデルの例として，2次元 BF 理論 (共変ゲージ)[5] と 2次元重力 (共変ゲージ)[6] があげられる．これらのモデルを簡単に紹介する．

2次元 BF 理論 (共変ゲージ) のラグランジュアン密度は，ゲージ場を A_μ，補助場を $\tilde{B}$，B 場を B，FP ゴースト・反ゴーストを $C, \bar{C}$ として，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{BF}} \;=\; \frac{1}{2}\tilde{B}\,\epsilon^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}, \quad (2.35)$$
$$F_{\mu\nu} \;\equiv\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu \times A_\nu, \quad \mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}} \equiv B\partial^\mu A_\mu - i\partial^\mu \bar{C}\cdot D_\mu C \quad (2.36)$$

で与えられる．ゲージ場と極小相互作用する物質場を導入することも可能である．1ループモデルにおける φ と $\tilde{\varphi}$ に対応するのはそれぞれ A_μ と $B, \tilde{B}$ であり，ゲージ場自身は一般時刻で可換になる：

$$[A_\mu(x),\, A_\nu(y)] \;=\; 0. \quad (2.37)$$

1ループモデルにおける $\mathcal{D}(x,y)$ に対応する演算子を用いることにより，基本場のすべての 2次元 (反) 交換関係が得られるが，式 (2.34) のような積分による表示のため一般の多重 (反) 交換関係の計算は複雑になる．

2次元重力 (共変ゲージ) のラグランジュアン密度は，重力場を $g_{\mu\nu}$, Weyl B 場を $\tilde{b}$, 重力 B 場を b_λ，重力 FP ゴースト・反ゴーストを c^σ, $\bar{c}_\tau$，スカラー場を ϕ として，

$$\mathcal{L}_{\mathrm{2G}} \;=\; \sqrt{-g}R\,\tilde{b} + \partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}\cdot b_\nu - i\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu \bar{c}_\rho \cdot \partial_\nu c^\rho + \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\cdot\partial_\nu\phi \quad (2.38)$$

で与えられる．ここでは，$g_{\mu\nu}$ の3自由度すべてを考慮するために Weyl B 場を導入して Weyl ゲージ固定をしているが，スカラー場と結合する $\tilde{g}^{\mu\nu}$ の2自由度だけに着目して Weyl の自由度を最初から消去 (Weyl B 場も不要) しても同様に議論できる．1ループモデルにおける φ と $\tilde{\varphi}$ に対応するのはそれぞれ $g_{\mu\nu}$ と b_λ, $\tilde{b}$ となり，重力場自身は一般時刻で可換である：

$$[g_{\mu\nu}(x),\, g_{\lambda\rho}(y)] \;=\; 0. \tag{2.39}$$

2次元重力 (共変ゲージ) の演算子解の著しい特徴は，式 (2.34) に相当する積分がすべて実行可能であることである．このことにより，多重 (反) 交換関係についても直ちに計算出来る．

場の方程式と演算子解をまとめておく [6]：

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv 2(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\nabla_\lambda)\tilde{b} - E_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}E + T_{\mu\nu} = 0, \tag{2.40}$$

$$E_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu b_\nu + i\partial_\mu\bar{c}_\rho\cdot\partial_\nu c^\rho + (\mu\leftrightarrow\nu), \quad T_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu\phi\cdot\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\phi\cdot\partial_\rho\phi, \tag{2.41}$$

$$R = 0, \qquad \partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \tag{2.42}$$

$$\partial_\mu\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu X = 0, \qquad X = b_\lambda,\ c^\sigma,\ \bar{c}_\tau,\ \tilde{b},\ \phi; \tag{2.43}$$

$$[g_{\mu\nu}(x),\, \Phi(y)] = 0, \qquad \Phi = g_{\lambda\rho},\ c^\sigma,\ \bar{c}_\tau,\ \phi, \tag{2.44}$$

$$[\phi(x),\, \phi(y)] = i\mathcal{D}(x,y), \tag{2.45}$$

$$[g_{\mu\nu}(x),\, b_\lambda(y)] = i\big[g_{\mu\lambda}\partial_\nu + g_{\lambda\nu}\partial_\mu + (\partial_\lambda g_{\mu\nu})\big]^x\mathcal{D}(x,y), \tag{2.46}$$

$$[g_{\mu\nu}(x),\, \tilde{b}(y)] = -ig_{\mu\nu}(x)\mathcal{D}(x,y), \tag{2.47}$$

$$[\Phi(x),\, b_\lambda(y)] = i\partial_\lambda\Phi(x)\cdot\mathcal{D}(x,y), \qquad \Phi = c^\sigma,\ \bar{c}_\tau,\ \tilde{b},\ \phi, \tag{2.48}$$

$$\{c^\sigma(x),\, \bar{c}_\tau(y)\} = -\delta^\sigma{}_\tau\mathcal{D}(x,y), \tag{2.49}$$

$$[b_\rho(x),\, b_\lambda(y)] = i\big[\partial_\lambda b_\rho(x) + \partial_\rho b_\lambda(y)\big]\cdot\mathcal{D}(x,y), \tag{2.50}$$

$$[\mathcal{D}(x,y),\, b_\lambda(z)] = i\big[\partial_\lambda{}^x\mathcal{D}(x,y)\cdot\mathcal{D}(x,z) + \partial_\lambda{}^y\mathcal{D}(x,y)\cdot\mathcal{D}(y,z)\big]. \tag{2.51}$$

これら以外の2次元 (反) 交換関係はすべてゼロである．ここで，$\mathcal{D}(x,y)$ は次の Cauchy 問題の解として定義される2次元重力 Pauli-Jordan D 関数の演算子版である：

$$\begin{aligned}\partial_\mu{}^x\tilde{g}^{\mu\nu}(x)\partial_\nu{}^x\mathcal{D}(x,y) &= 0,\\ \mathcal{D}(x,y)|_{x^0=y^0} &= 0,\\ \partial_0{}^x\mathcal{D}(x,y)|_{x^0=y^0} &= -(\tilde{g}^{00}(x))^{-1}\delta(x^1-y^1).\end{aligned} \tag{2.52}$$

上記の演算子解は，その明白な共変性により量子 Einstein 重力の $\kappa\to 0$ 極限の演算子解と次元数を度外視して同じ形になる ($\tilde{b}$ は除く)[7]．また，$\mathcal{D}(x,y)$ の具体的な表式については，二脚場形式に拡張すれすることで二脚場を用いて構成することが出来る [8]．

2.4. 2次元 BF 理論 (光錐ゲージ)

Glaser モデルや1ループモデルでないもので厳密に解ける例として，2次元重力 (共形ゲージ)[9] と2次元 BF 理論 (光錐ゲージ)[10] があげられる．ここでは，特に簡単な後者について紹介する．

光錐座標を $x^{\pm} = (x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$ とし，カイラル Dirac 場を ψ_M $(M = 1, \ldots, D)$，カイラルゲージ対称性の Lie 環 $\mathfrak{g}$ の構造定数を f^{abc}，$\mathfrak{g}$ の適当な表現行列を T^a，$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ として，ラグランジュアン密度を次のようにとる：

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \widetilde{B}^a(\partial_- A_+{}^a - \partial_+ A_-{}^a - f^{abc} A_+{}^b A_-{}^c) + B^a A_-{}^a \\ &\quad + i\bar{C}^a(\delta^{ab}\partial_- + f^{acb} A_-{}^c) C^b + i\psi_M{}^\dagger(\partial_- - iA_-{}^a T^a)\psi_M. \end{aligned} \tag{2.53}$$

場の方程式は

$$\mathcal{F}^a \equiv B^a + \partial_+ \widetilde{B}^a + f^{abc}(A_+{}^b \widetilde{B}^c - i\bar{C}^b C^c) + \psi_M{}^\dagger T^a \psi_M = 0, \tag{2.54}$$

$$A_-{}^a = 0, \tag{2.55}$$

$$\partial_- \Phi = 0, \qquad \Phi = A_+{}^a,\ \widetilde{B}^a,\ C^a,\ \bar{C}^a,\ \psi_M,\ B^a \tag{2.56}$$

で与えられ，非線形なものは式 (2.54) のみであり，B と他の場を結びつけている．場の方程式と同時刻 (反) 交換関係から演算子解が次のように得られる：

$$[\widetilde{B}^a(x),\ A_+{}^b(y)] = -i\delta^{ab}\delta(x^+ - y^+), \tag{2.57}$$

$$\{\bar{C}^a(x),\ C^b(y)\} = \delta^{ab}\delta(x^+ - y^+), \tag{2.58}$$

$$\{\psi_M(x),\ \psi_N{}^\dagger(y)\} = \delta_{MN}\delta(x^+ - y^+); \tag{2.59}$$

$$[B^a(x),\ A_+{}^b(y)] = i(\delta^{ab}\partial_+ + f^{acb} A_+{}^c(x))\delta(x^+ - y^+), \tag{2.60}$$

$$[B^a(x),\ \Phi^b(y)] = -if^{abc}\Phi^c(x)\delta(x^+ - y^+), \qquad \Phi^a = \widetilde{B}^a,\ C^a,\ \bar{C}^a,\ B^a, \tag{2.61}$$

$$[B^a(x),\ \psi_M(y)] = T^a \psi_M(x)\delta(x^+ - y^+). \tag{2.62}$$

上記以外の 2 次元 (反) 交換関係はすべてゼロである．

場の再定義：$B'^a \equiv B^a + \partial_+ \widetilde{B}^a$ によって，式 (2.60) の δ' 項は取り除けることに注意：

$$[\Phi^a(x),\ B'^b(y)] = -if^{abc}\Phi^c(y)\delta(x^+ - y^+), \qquad \Phi^a = A_+{}^a,\ \widetilde{B}^a,\ C^a,\ \bar{C}^a,\ B'^a, \tag{2.63}$$

$$[\psi_M(x),\ B'^b(y)] = -T^b \psi_M(y)\delta(x^+ - y^+). \tag{2.64}$$

多重 (反) 交換関係もこれから直ちに計算出来る：

$$[\,[A_+{}^a(x),\ B'^b(y)],\ \widetilde{B}^c(z)] = f^{abc}\delta(x^+ - y^+)\delta(y^+ - z^+),\ \text{etc.} \tag{2.65}$$

Yang-Mills 理論は BF 理論のラグランジュアン密度 (2.53) に $\widetilde{B}^2$ 項：$-g^2/2\,\widetilde{B}^a\widetilde{B}^a$ (g は結合定数) を付け加えることによって得られ，これも同様に解くことが出来る．BF 理論の演算子解からの変更点は，ゲージ場自身が非可換になること：

$$[A_+{}^a(x),\ A_+{}^b(y)] = -ig^2\delta^{ab}(x^- - y^-)\delta(x^+ - y^+) \tag{2.66}$$

と，(2.60) が次式に置き換えられることである：

$$\begin{aligned}[B^a(x),\ A_+{}^b(y)] &= i\big(\delta^{ab}\partial_+ + f^{acb} A_+{}^c(x) - g^2 f^{acb}\widetilde{B}^c(x)(x^- - y^-)\big)\delta(x^+ - y^+) \\ &= i(\delta^{ab}\partial_+ + f^{acb} A_+{}^c(y))\delta(x^+ - y^+). \end{aligned} \tag{2.67}$$

ただし，この2番目の等号では，場の方程式 $\partial_- A_+{}^a - g^2 \widetilde{B}^a = 0$, $\partial_- \widetilde{B}^a = 0$ から得られる恒等式

$$\big(A_+{}^a(x) - A_+{}^a(y) - g^2 \widetilde{B}^a(x)(x^- - y^-)\big)\delta(x^+ - y^+) = 0 \tag{2.68}$$

を用いた．

3. Wightman 関数の構成

3.1. 一般的な処方箋

演算子解に基づいて Wightman 関数を構成する方法は次のようにまとめられる [11].

1) 1点関数を与える：1点関数は Wightman 関数の初期データであり，場の方程式，対称性等に従って適宜与える．

2) 演算子解 [多重 (反) 交換子] との整合性を要請する．

3) エネルギーの正値性を (物理的条件として) 要請する．

4) 複合場 (同時空点での場の演算子の積) を定義する．

ここで，$\{\varphi_1(x_1), \ldots, \Phi_n(x_n)\}$ からなる $(n-1)$ 重の多重 (反) 交換子

$$[\,[\,[\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2)]_\mp, \Phi_3(x_3)]_\mp,\ \ldots,\ \Phi_n(x_n)\,]_\mp \tag{3.1}$$

について，Jacobi 恒等式から1次独立なものは全部で $(n-1)!$ 個ある．一方，同じ組み合わせの場からなる截端 (truncated) 関数 $\langle\, \Phi_1(x_1) \cdots \Phi_n(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}}$ 等は $n!$ 個あるので，これらを $(n-1)!$ 個の多重 (反) 交換子の期待値をすべて再現し，尚かつ，エネルギーの正値性も同時に満たすように決めるのである．ここで，エネルギーの正値性を満たすとは，解析関数の $x_i^0 - x_j^0$ [ただし，Wightman 関数中で $\Phi_i(x_i)$ は $\Phi_j(x_j)$ より左側にあるとする] の下半面からの境界値で与えられることである．また，截端関数とは摂動論的には連結な Green 関数に対応するもので，次のように帰納的に定義される：

$$\langle\, \Phi_1(x_1)\,\rangle = \langle\, \Phi_1(x_1)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,, \tag{3.2}$$

$$\langle\, \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\,\rangle = \langle\, \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} + \langle\, \Phi_1(x_1)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,\langle\, \Phi_2(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,, \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\langle\, \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)\,\rangle &= \langle\, \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\Phi_2(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} \\ &\quad + \langle\, \Phi_1(x_1)\Phi_2(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,\langle\, \Phi_2(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} + (2\,\text{項}) \\ &\quad + \langle\, \Phi_1(x_1)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,\langle\, \Phi_2(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,\langle\, \Phi_3(x_3)\,\rangle_{\mathrm{T}}\,, \quad \text{etc.}\end{aligned} \tag{3.4}$$

多重 (反) 交換子の期待値は自動的に截端 (truncate) されていることに注意：

$$\langle\,[\,[\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2)]_\mp, \ldots,\ \Phi_n(x_n)\,]_\mp\,\rangle = \langle\,[\,[\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_2)]_\mp, \ldots,\ \Phi_n(x_n)\,]_\mp\,\rangle_{\mathrm{T}}\,. \tag{3.5}$$

従って，特に多重 (反) 交換子がゼロのときは対応するすべての截端関数もゼロとする．

複合場を含む Wightman 関数については，一般化された正規積を用いて構成する．すなわち，$\langle \Phi_1(x_1)\cdots\Phi_n(x_n)\rangle$ $(x_i = x_{i+1} = \cdots = x_j)$ は，同時空点の積を一切含まない Wightman 関数 $\langle \Phi_1(x_1)\cdots\Phi_n(x_n)\rangle$ に $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_j$ を代入して，その結果生じた発散因子をすべて消去することにより定義する．

3.2. 2次元重力 (共変ゲージ)

2次元重力 (共変ゲージ) の Wightman 関数の構成について具体的に紹介する．

まず1点関数について．式 (2.39) より

$$\langle g_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots g_{\mu_n\nu_n}(x_n)\rangle_{\mathrm{T}} = 0 \quad (n \geqq 2) \tag{3.6}$$

が得られるので，$g_{\mu\nu}(x)$ の任意関数 f の期待値は，$g_{\mu\nu}(x)$ の期待値の関数に等しい：

$$\langle f(g_{\mu\nu}(x))\rangle = f(\boldsymbol{g}_{\mu\nu}(x)), \qquad \boldsymbol{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \langle g_{\mu\nu}(x)\rangle_{\mathrm{T}}. \tag{3.7}$$

従って，場の方程式 (2.42) から $\boldsymbol{g}_{\mu\nu}(x)$ は

$$\boldsymbol{R}(x) = 0, \quad \partial_\mu \tilde{\boldsymbol{g}}^{\mu\nu}(x) = 0. \tag{3.8}$$

を満たさなければならない．特に簡単な解として，ここでは $\boldsymbol{g}_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu}$ を採用する．他の1点関数はすべてゼロとおく：

$$\langle \Phi(x)\rangle_{\mathrm{T}} \equiv 0, \qquad \Phi = b_\lambda,\ c^\sigma,\ \bar{c}_\tau,\ \tilde{b},\ \phi. \tag{3.9}$$

これは，$\boldsymbol{g}_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ のみを仮定して得られる下記のような2点関数以上と一般化された正規積を用いて場の方程式から導かれる1点関数 $\langle \Phi(x)\rangle_{\mathrm{T}}$ に関する方程式と整合することも確かめられる．

次に，$\mathcal{D}(x,y)$ と $g_{\mu\nu}(z)$ の可換性から $\mathcal{D}(x,y)$ の期待値に対する Cauchy 問題は2次元 Pauli-Jordan D 関数 $D(x-y)$ に対する Cauchy 問題に一致し，

$$\langle \mathcal{D}(x,y)\rangle = D(x-y) \equiv -i(D^{(+)}(x-y) - D^{(+)}(y-x)) \tag{3.10}$$

が得られる．ここで，$D^{(+)}(x)$ は $D(x)$ の正エネルギー部分である．これを用いると，式 (2.45)，(2.49) と正エネルギー条件により截端2点関数

$$\langle \phi(x_1)\phi(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = D^{(+)}(x_1-x_2), \tag{3.11}$$

$$\langle c^\sigma(x_1)\bar{c}_\tau(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = i\delta^\sigma{}_\tau D^{(+)}(x_1-x_2) \tag{3.12}$$

が得られる．同様に式 (2.46)，(2.47) の期待値と正エネルギー条件から次式を得る：

$$\langle g_{\mu\nu}(x_1)b_\lambda(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = \left[\eta_{\mu\lambda}\partial_\nu + \eta_{\lambda\nu}\partial_\mu\right]^{x_1} D^{(+)}(x_1-x_2), \tag{3.13}$$

$$\langle g_{\mu\nu}(x_1)\tilde{b}(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = \eta_{\mu\nu}D^{(+)}(x_1-x_2). \tag{3.14}$$

更に，式 (2.51) の期待値から

$$\begin{aligned}\langle\, b_\lambda(x_3)\mathcal{D}(x_1,x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} &= D^{(+)}(x_3-x_1)\partial_\lambda{}^{x_1}D(x_1-x_2)\\ &\quad +D^{(+)}(x_3-x_2)\partial_\lambda{}^{x_2}D(x_1-x_2), \qquad (3.15)\\ \langle\, b_\lambda(x_3)\phi(x_1)\phi(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} &= D^{(+)}(x_3-x_1)\partial_\lambda{}^{x_1}D^{(+)}(x_1-x_2)\\ &\quad +D^{(+)}(x_3-x_2)\partial_\lambda{}^{x_2}D^{(+)}(x_1-x_2), \qquad (3.16)\\ \langle\, b_\lambda(x_3)c^\sigma(x_1)\bar{c}_\tau(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} &= i\delta^\sigma{}_\tau\big(D^{(+)}(x_3-x_1)\partial_\lambda{}^{x_1}D^{(+)}(x_1-x_2)\\ &\quad +D^{(+)}(x_3-x_2)\partial_\lambda{}^{x_2}D^{(+)}(x_1-x_2)\big) \qquad (3.17)\end{aligned}$$

が得られ，これと式 (2.50) の期待値から

$$\langle\, b_\rho(x_1)b_\lambda(x_2)\,\rangle_{\mathrm{T}} = \partial_\lambda{}^{x_1}D^{(+)}(x_1-x_2)\cdot\partial_\rho{}^{x_2}D^{(+)}(x_1-x_2) \qquad (3.18)$$

が得られる．

一般に，次の截端 n 点関数がノンゼロである：

- $g_{\mu\nu}$ と $(n-1)$ 個の ($\tilde{b}$ or b_λ),
- $(\phi(x_1)\phi(x_2)$ or $c^\sigma(x_1)\bar{c}_\tau(x_2))$ と $(n-2)$ 個の b_λ,
- n 個の b_λ.

b_λ のみからなるものは 1 ループグラフに対応し，他はすべて tree グラフに対応する．

2 次元重力 (共変ゲージ) において場の再定義：

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv \exp\left(\frac{\alpha}{2}\tilde{b}(x)\right)g'_{\mu\nu}(x), \qquad (\alpha = 定数 \neq 0) \qquad (3.19)$$

を行うと，Polyakov の 2 次元誘導重力 [12] の局所版 (共変ゲージ)：

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}R\tilde{b} &= \sqrt{-g'}R'\tilde{b} - \frac{\alpha}{2}\tilde{g}^{\mu\nu\prime}\partial_\mu\tilde{b}\cdot\partial_\nu\tilde{b} + (\text{total divergence})\\ &\sim \frac{1}{2\alpha}\sqrt{-g'}R'\frac{1}{\sqrt{-g'}\Box'}\sqrt{-g'}R' = \mathcal{L}_{\text{Polyakov}} \qquad (3.20)\end{aligned}$$

に対する厳密解を構成することが出来る [13]．截端 n 点関数の具体的な表式

$$\langle\, g_{\mu\nu}(x_1)\tilde{b}(x_2)\cdots\tilde{b}(x_n)\,\rangle_{\mathrm{T}} = (-1)^n\eta_{\mu\nu}\prod_{j=2}^{n}D^{(+)}(x_1,x_j) \qquad (3.21)$$

を用いると

$$\langle\, g'_{\mu_1\nu_1}(x_1)\cdots g'_{\mu_n\nu_n}(x_n)\,\rangle = \eta_{\mu_1\nu_1}\cdots\eta_{\mu_n\nu_n}\exp\left[\alpha\sum_{i<j}D^{(+)}(x_i-x_j)\right]. \qquad (3.22)$$

が得られ，これは摂動論的には無限個の多重ループグラフに相当する．

3.3. 2次元BF理論(光錐ゲージ)

この理論の演算子解は非常に簡単な構造をしているので，Wightman関数の構成も容易である．以下では，B^a の代わりに $B'^a = B^a + \partial_+ \widetilde{B}^a$ を用いて表す．

まず，1点関数はすべてゼロとする．2点関数は演算子解(2.57)~(2.59)より

$$\langle A_+{}^a(x_1)\widetilde{B}^b(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2\pi}\delta^{ab}\frac{1}{x_1{}^+ - x_2{}^+ - i0}, \tag{3.23}$$

$$\langle C^a(x_1)\bar{C}^b(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = -\frac{i}{2\pi}\delta^{ab}\frac{1}{x_1{}^+ - x_2{}^+ - i0}, \tag{3.24}$$

$$\langle \psi_M(x_1)\psi_N{}^\dagger(x_2)\rangle_{\mathrm{T}} = -\frac{i}{2\pi}\delta_{MN}\frac{1}{x_1{}^+ - x_2{}^+ - i0}. \tag{3.25}$$

式(2.63),(2.62)と1点関数がゼロであることから他の2点関数はすべてゼロになる．次に3点関数については，二重(反)交換関係から

$$\langle A_+^a(x_1)B'^b(x_2)\widetilde{B}^c(x_3)\rangle_{\mathrm{T}} = -f^{abc}\varphi_3(x_1{}^+, x_2{}^+, x_3{}^+), \tag{3.26}$$

$$\langle C^a(x_1)B'^b(x_2)\bar{C}^c(x_3)\rangle_{\mathrm{T}} = if^{abc}\varphi_3(x_1{}^+, x_2{}^+, x_3{}^+), \tag{3.27}$$

$$\langle \psi_M(x_1)B'^b(x_2)\psi_N{}^\dagger(x_3)\rangle_{\mathrm{T}} = \delta_{MN}T^b\varphi_3(x_1{}^+, x_2{}^+, x_3{}^+), \tag{3.28}$$

$$\varphi_3(x_1{}^+, x_2{}^+, x_3{}^+) \equiv \frac{1}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{(x_1{}^+ - x_2{}^+ - i0)(x_2{}^+ - x_3{}^+ - i0)} \tag{3.29}$$

が得られる．一般に，截端 n 点関数は，$\{A_+{}^a(x_1)\widetilde{B}^b(x_2), C^a(x_1)\bar{C}^b(x_2), \psi_M(x_1)\psi_N{}^\dagger(x_2)\}$ の1組と $(n-2)$ 個の B' からなるもののみがノンゼロとり，摂動論的にはtreeグラフに対応する．

4. 場の方程式アノマリー

Wightman関数は(多重)(反)交換関係と整合的に構成されているが，場の方程式(非線形関係式)との整合性(2点関数以上)については非自明である．前節であげた二つの例について，いずれも場の方程式の一部が破れる現象があり，これを「場の方程式アノマリー」と呼ぶ．

2次元重力(共変ゲージ)では，場の方程式(2.40)が破れる：

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_{\mu\nu}(x)\, b_\lambda(y)\rangle &= \partial_\nu{}^x(\partial_\mu{}^x D^{(+)}(x-y)\cdot\partial_\lambda{}^x D^{(+)}(x-y)) \\ &\quad -\eta_{\mu\lambda}\partial_\sigma{}^x D^{(+)}(x-y)\cdot(\partial_\nu\partial^\sigma)^x D^{(+)}(x-y) + (\mu\leftrightarrow\nu) \\ &\neq 0.\end{aligned} \tag{4.1}$$

この破れはスカラー場 ϕ の数には無関係であることに注意．ただし，(2.40)のトレースと共変発散については問題なく，$\tilde{b}, b_\nu$ に対する場の方程式(共変ダランベール方程式)には破れがない．これは，大域的なWeyl不変性と並進不変性にアノマリーがないことに対応している．

2次元BF理論(光錐ゲージ)では，場の方程式(2.54)について

$$\begin{aligned}\langle\, \mathcal{F}^a(x)\, B^b(y)\,\rangle &= \langle\, \mathcal{F}^a(x)\, \mathcal{F}^b(y)\,\rangle \\ &= \frac{D}{2(2\pi)^2}\cdot\frac{\delta^{ab}}{(x^+ - y^+ - i0)^2}\end{aligned} \tag{4.2}$$

が得られ，D(カイラルDirac場の数)がゼロでなければアノマリーがある．ただし，(2.54)のx^-微分についてはDのよらずに常に問題ない．

次にWightman関数のBRS対称性との整合性について，2次元BF理論(光錐ゲージ)の場合に具体的に見てみる．この理論のBRS変換は次式で定義される：

$$\boldsymbol{\delta} A_\pm{}^a = \partial_\pm C^a + f^{acb} A_\pm{}^c C^b, \quad \boldsymbol{\delta}\widetilde{B}^a = -f^{abc} C^b \widetilde{B}^c, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\delta} C^a = -\frac{1}{2} f^{abc} C^b C^c, \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{\delta}\bar{C}^a = iB^a = i(B'^a - \partial_+ \widetilde{B}^a), \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\delta} B^a = 0, \qquad \boldsymbol{\delta} B'^a = -f^{abc}\partial_+(C^b \widetilde{B}^c), \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{\delta}\psi_M = iC^a T^a \psi_M, \quad \boldsymbol{\delta}\psi_M{}^\dagger = -i\psi_M{}^\dagger C^a T^a. \tag{4.7}$$

まず，2点関数については，式(3.24)，(3.23)，およびA_+, C, $\bar{C}$の3点関数がゼロであることから

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{\delta}(A_+{}^a(x_1)\bar{C}^b(x_2))\,\rangle &= \partial_+{}^{x_1}\langle\, C^a(x_1)\bar{C}^b(x_2)\,\rangle - i\partial_+{}^{x_2}\langle\, A_+{}^a(x_1)\widetilde{B}^b(x_2)\,\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

を得る．3点関数についても同様にして，

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{\delta}(A_+{}^a(x_1)\bar{C}^b(x_2)\widetilde{B}^c(x_3))\,\rangle &= f^{aed}\langle\, A_+{}^e(x_1)\widetilde{B}^c(x_3)\,\rangle\langle\, C^d(x_1)\bar{C}^b(x_2)\,\rangle \\ &\quad + i\langle\, A_+{}^a(x_1)B'^b(x_2)\widetilde{B}^c(x_3)\,\rangle \\ &\quad + f^{cde}\langle\, A_+{}^a(x_1)\widetilde{B}^e(x_3)\,\rangle\langle\, \bar{C}^b(x_2)C^d(x_3)\,\rangle \\ &= 0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{\delta}(C^a(x_1)\bar{C}^b(x_2)\bar{C}^c(x_3))\,\rangle &= \frac{1}{2} f^{ade}\Big[\langle\, C^d(x_1)\bar{C}^b(x_2)\,\rangle\langle\, C^e(x_1)\bar{C}^c(x_3)\,\rangle \\ &\qquad - (x_2 \leftrightarrow x_3,\ b \leftrightarrow c)\Big] \\ &\quad - i\langle\, C^a(x_1)B'^b(x_2)\bar{C}^c(x_3)\,\rangle + i\langle\, C^a(x_1)\bar{C}^b(x_2)B'^c(x_3)\,\rangle \\ &= 0,\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\langle\, \boldsymbol{\delta}(\psi_M(x_1)\bar{C}^b(x_2)\psi_N{}^\dagger(x_3))\,\rangle &= i\langle\, C^a(x_1)\bar{C}^b(x_2)\,\rangle T^a\langle\, \psi_M(x_1)\psi_N{}^\dagger(x_3)\,\rangle \\ &\quad + i\langle\, \psi_M(x_1)B'^b(x_2)\psi_N{}^\dagger(x_3)\,\rangle \\ &\quad + i\langle\, \bar{C}^b(x_2)C^a(x_3)\,\rangle\langle\, \psi_M(x_1)\psi_N{}^\dagger(x_3)\,\rangle T^a \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.11}$$

となり，BRS対称性との整合性が直接確かめられる．

最後に，BRS アノマリーとの関連について．BRS 対称性に関する保存カレントとして，BRS Noether カレント $j_{\mathrm{B}}{}^{\mu}$ と，これと場の方程式 (2.54) を組み合わせて得られるもうひとつの BRS カレント $\widehat{j}_{\mathrm{B}}{}^{\mu}$ がある：

$$\begin{cases} j_{\mathrm{B}}{}^{+} &=& 0, \\ j_{\mathrm{B}}{}^{-} &=& \widetilde{B}^a\partial_+C^a + f^{acb}\widetilde{B}^aA_+{}^cC^b + \frac{1}{2}if^{abc}\bar{C}^aC^bC^c - C^a\psi_M{}^{\dagger}T^a\psi_M, \end{cases} \tag{4.12}$$

$$\begin{cases} \widehat{j}_{\mathrm{B}}{}^{+} &\equiv& j_{\mathrm{B}}{}^{+} = 0, \\ \widehat{j}_{\mathrm{B}}{}^{-} &\equiv& j_{\mathrm{B}}{}^{-} + C^a\mathcal{F}^a \ = \ B^aC^a - \frac{1}{2}if^{abc}\bar{C}^aC^bC^c + \partial_+(\widetilde{B}^aC^a). \end{cases} \tag{4.13}$$

それぞれの保存チャージを次のように書く：

$$Q_{\mathrm{B}} = \int dx^+ j_{\mathrm{B}}{}^{-}, \qquad \widehat{Q}_{\mathrm{B}} = \int dx^+ \widehat{j}_{\mathrm{B}}{}^{-}. \tag{4.14}$$

ここで，Q_{B} と $\widehat{Q}_{\mathrm{B}}$ は演算子レベルでは同じであるが，表現レベルでは場の方程式アノマリーのために差異が生じる．まず，$\widehat{Q}_{\mathrm{B}}$ については，$\mathcal{F}^a = 0$ を用いずに次式が成立する：

$$i[\,\widehat{Q}_{\mathrm{B}},\,\Phi]_{\mp} = \boldsymbol{\delta}(\Phi), \quad \Phi = A_+{}^a,\ \widetilde{B}^a,\ C^a,\ \bar{C}^a,\ B^a,\ \psi. \tag{4.15}$$

一方，Q_{B} については次のようになる：

$$i[\,Q_{\mathrm{B}},\,\Phi]_{\mp} = \boldsymbol{\delta}(\Phi), \quad \Phi = A_+{}^a,\ \widetilde{B}^a,\ C^a,\ B^a,\ \psi, \tag{4.16}$$

$$i\{Q_{\mathrm{B}},\,\bar{C}^b\} = i(B^b - \mathcal{F}^b). \tag{4.17}$$

従って，

$$\begin{aligned} \langle\,\bar{C}^a(x_1)\widehat{Q}_{\mathrm{B}}{}^2\bar{C}^b(x_2)\,\rangle &= \langle\,\{\bar{C}^a(x_1),\,\widehat{Q}_{\mathrm{B}}\}\{\widehat{Q}_{\mathrm{B}},\,\bar{C}^b(x_2)\}\,\rangle \\ &= \langle\,B^a(x_1)B^b(x_2)\,\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} \langle\,\bar{C}^a(x_1)Q_{\mathrm{B}}{}^2\bar{C}^b(x_2)\,\rangle &= \langle\,\{\bar{C}^a(x_1),\,Q_{\mathrm{B}}\}\{Q_{\mathrm{B}},\,\bar{C}^b(x_2)\}\,\rangle \\ &= \langle\,(B^a(x_1) - \mathcal{F}^a(x_1))(B^b(x_2) - \mathcal{F}^b(x_2))\,\rangle \\ &= -\frac{D}{2(2\pi)^2}\frac{\delta^{ab}}{(x_1{}^+ - x_2{}^+ - i0)^2}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

以上から，BRS アノマリー (BRS Noether チャージ Q_{B} の冪零性の破れ) の背後には場の方程式アノマリーがあることが分かる．ただし，アノマリーを持たない BRS チャージ $\widehat{Q}_{\mathrm{B}}$ が存在し，BRS 対称性自体は破れているわけではない．

光錐ゲージの 2 次元 BF 理論の結果とほとんどパラレルに，共形ゲージの 2 次元重力でも BRS Noether チャージは臨界次元以外でアノマリーをもつが，常にアノマリーのない BRS チャージも構成可能である [9].

参考文献

[1] 総合的なレビュー： N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **111**, 301 (2004).

[2] N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. Suppl. **51**, 1 (1972).

[3] M. Abe, Int. J. Mod. Phys. **A 8**, 2895 (1993).

[4] C. G. Callan, S. B. Giddings, J. H. Harvey and A. Strominger, Phys. Rev. **D 45**, R1005 (1992).

[5] M. Abe and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **89**, 501 (1993).

[6] M. Abe and N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A6**, 3955 (1991).

[7] M. Abe and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **85**, 391 (1991).

[8] M. Abe and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **86**, 517 (1991).

[9] M. Abe and N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A14**, 521 (1999).

[10] M. Abe and N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 1491 (2002).

[11] M. Abe and N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys. **86**, 1087 (1991), **87**, 495 (1992), **87**, 757 (1992).

[12] A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A2**, 893 (1987).

[13] M. Abe and N. Nakanishi, Int. J. Mod. Phys. **A7**, 6405 (1992).