数理解析研究所講究録
1524巻 2006年 71-150

数理物理学研究回顧

中西　襄 (京都大学名誉教授)

私は、1955年から5年間、京都大学の湯川研究室に大学院生として在籍、その後しばらくしてから渡米、4年間をプリンストンやブルックヘヴンで過ごした。帰国後、1966年から30年間、京都大学数理解析研究所に在職した。そして1996年定年退官、現在に至っている。その50年間、とくに中断を余儀なくされるような事態もなく、場の量子論を中心とした数理物理学の研究を終始自分の思うままにやってこれた。これも諸先生方や同僚の皆様の暖かいご支援の賜物と感謝する次第である。

昨年、私は個人的に自分の半世紀にわたる研究を振り返って、英文で回顧録を作成した。これはあくまでも私的なもので親しい方のみに配布したが、河合隆裕氏より、この回顧録は過去の研究の様子を伝えるものとして、もっと多くの人の目に触れる「数理解析研究所講究録」に収録してはどうかという強いお奨めを頂いた。最初私は個人的なものをそのような公の記録として出すのいかがなものかと固辞したが、それならば数理研の短期共同の研究会を開催し、その公式記録という形式で出すことにしてはというご提案を受け、結局それをお受けすることになった。再録にさいしては一部分修正し、全文を日本語に改めた。

この回顧録は、たんなる論文の要約ではなく、公式の記録には残らない往時の経緯などを、できる限り精確な記録に基き、またできるだけ正直に書いたつもりである。関係した方々の名前はすべて実名で書いたので、あるいは不快と感じられる記述があるかもしれない。その時はどうかご寛恕のほど、お願い申し上げる。また、事実に反する記述を発見された場合は、ご叱正頂ければ大変ありがたく思う。

[・]の番号は、末尾につけた私の論文リストの番号である。ただし、[B・]は著書、[C・]は国際会議報告を示す。人名は、日本人は漢字表記とし、敬称はすべて省略させていただいた。外国人は原則英字表記とし、普通名詞化した人名はかたかな表記とした。英文雑誌名はイタリックで、頭文字のみにより略記した。

目　次

1　次数勘定定理とファインマン・パラメーター積分公式

1955年6月から京都大学物理学教室の湯川研究室において、荒木不二洋、位田正邦、私自身などの修士課程新入生で素粒子論の私的なセミナーが行なわれた。セミナーのテキストは、日本物理学会編のQEDの論文選集で、R. P. FeynmanとF. J. Dysonの基本的論文が収録されていた。

この選集の第1論文は、量子力学の経路積分法を提起したFeynmanの1948年の論文であった。そのあとに続く共変的摂動論のファインマン積分に関する論文を勉強した後、私は経路積分法が、ディラック場のフェルミ統計性の取り扱いの問題を除いて（その当時私はグラスマン数のことは知らなかった）、自然に場の量子論の場合に拡張できることに気づいた。私はこの「発見」を論文にまとめたが、すぐ山崎和夫に、同じ定式化がすでに1年前P. T. MathewsとA. Salamの論文に与えられていることを指摘された。こうして、私の最初の物理の研究は、全く記録に残ることなく消えた。

この選集の最後の論文は、摂動論のすべての次数でQEDの繰り込み可能性を証明した、有名なDysonの1949年の論文であった。この証明の基礎になっているのは、次数勘定定理[*1]である。これは、任意のファインマン積分の可能な全体的紫外発散は、単純に被積分関数の分母分子の次数と4次元運動量積分の体積要素の次数を勘定するだけで判定できるという定理である。この定理を証明するために、Dysonはファインマン積分のすべてのエネルギー変数から共通因子αだけ取り出す非線形変換を行い、このαについてそれを純虚数にまで解析接続した。[*2]　そして、ファインマン積分はユークリッド的になったから、単純な次数勘定により発散の可能性が判定できるとした。

私は、Dysonの用いた変換は数学的に正当化できないことに気づいた。[*3]　なぜなら、プロパゲーターのもつ特異性のために、どんなファインマン積分も決して絶対収束するはずがないからである。さらに、内部発散がないというDysonの前提条件は、積分運動量の選択法が指示されていないから、数学的によく定義された概念とは言いがたい。1956年3月私は、もしユークリッド的としてよいなら、後者の問題は解決できることをみつけたが、しかし前者の問題を解決しなければ意味がないと考えた。

本来のファインマン積分は、その特異性のために数学的に厳密な取り扱いは不可能であることを、私はさとった。Feynmanは彼の原論文において、ファイン

---

*1 論文 [2] を書いたとき、**power-counting theorem** という言葉を作った。私の論文と関係があるかどうかは不明だが、この名前は標準の用語になっている。

*2 後に、この解析接続は、**G. C. Wick** のベーテ・サルピーター方程式に関する **1954** 年の論文に因んで、「ウィック回転」と呼ばれるようになった（§9 参照）。いわゆる「同時ウィック回転」はコーシーの定理によって正当化できないので、**Dyson** は、この困難を避けるために非線形変換を導入したのである。

*3 私はその具体的反例をこしらえたつもりだったが、それは誤りであった。

マン積分を、ファインマンの恒等式と呼ばれる公式

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[\alpha A + (1-\alpha)B]^2}$$

およびそれを A, B について何回か微分して得られる式を繰り返し用い、分母を1つにまとめてから運動量積分を遂行した。ファインマン・パラメーター積分は、分母の虚部を有限量にしておきさえすれば、有界領域での通常の積分であるので、私はファインマン・パラメーター積分を単なる計算の道具としてでなく、ファインマン積分の数学的定義とすべきであるとの認識に達した。この立場が合理的であるためには、ファインマン・パラメーター積分が運動量積分遂行の仕方に依らないことを証明しなければならない。そのためには、すべてのプロパゲーターを平等な形で扱うことが本質的であった。それで私は、分母関数がすべてのファインマン・パラメーター $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ について線形であるような一般化されたファインマンの恒等式[*4]

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^N A_i} = (N-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \ldots \int_0^1 d\alpha_N \frac{\delta(1-\sum_{i=1}^N \alpha_i)}{(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i)^N}$$

を見つけた。

忘れもしない1956年5月1日、私は、一般化されたファインマン・パラメーター積分公式において、ファインマン図の位相的性質を直接反映させる一般的規則を発見した。パラメーター積分の被積分関数の分母は、関数 U の冪と、無限小虚部を伴う関数 V の冪との積である。[*5] ここに、U はファインマン・パラメーターの正項のみの斉次多項式である。次数勘定定理は、U のゼロ点の構造を調べれば証明できる。V は、外線運動量の2次式で、その係数はファインマン・パラメーターの有理関数である。U と V のあらわな表式は、ファインマン図の回路（＝ループ）構造に基づいて、直接書き下すことができる（「位相公式」）。[*6] ファインマン積分の分子がノントリヴィアルなときは、V を各プロパゲーターに含まれる定数運動量について1回または2回微分することによって得られる2種類の関数、Y_i と X_{ij} でもって書き表すことができる。

私はファインマン・パラメーター積分の位相公式を証明したのち、私の処女論文を素研（1956.9）に提出した。そして翌年、それを正式の英文誌 *PTP* に発表した [2]。私はこの論文により、1957年3月に京都大学理学修士の学位を得た。のちに、私は、一般のファインマン積分のパラメーター積分表示は、R. Chisholm(1952年) や摂動級数の発散を論じた人々によって与えられていたこと

[*4] 最初は、同じ運動量を持つプロパゲーターを先にまとめるという、2段階のまとめ方をしたので、この式よりも複雑な多重ベータ関数型の公式を使った。なお、この公式は19世紀から知られているものである。

[*5] 今日、私の記号 U と V は、ほぼスタンダードになっている。

[*6] 後に私は、もしファインマン・パラメーターをオーム抵抗に置き換えるならば、U の表式は、19世紀のキルヒホッフの回路網理論で与えられたものと同じであることを知った。

を知ったが、幸い誰も一般化されたファインマンの恒等式を使っておらず、従って誰も位相公式を発見していなかった。

3年後、S. Weinbergの次数勘定定理に関する論文が現われた。彼の論文の主目的は、ファインマン積分の高エネルギーでの漸近的振る舞いを調べることであった。彼の証明はユークリッド計量を仮定してのものであったにもかかわらず、彼の論文は次数勘定定理のスタンダードな文献となった。ファインマン・パラメーター積分公式に基づく数学的に厳密な次数勘定定理の証明は、積分領域内でのUを、$\prod_{i=1}^{N} \alpha_i$の或る分数冪で下から抑えることによって完成する。私はこの証明を、ファインマン・パラメーターの相対的な大きさによって、積分領域を$N!$個のセクターに分けることによって行なった。1963年、私はこの証明を或る積分表示に関する論文[30]の付録に書いたのだが、不幸にして完全に無視されてしまった。このセクターは、3年後に、繰り込まれたファインマン積分の収束性の厳密証明をあたえたK. Heppに因んで、「ヘップ・セクター」と呼ばれている。なお、1969年、W. Zimmermannは、各プロパゲーターの無限小虚部を3次元運動量の平方に依存するものと仮定して、ファインマン積分から直接に次数勘定定理の証明を行なった。

1969年、T. Appelquistは、私の公式を拡張して、繰り込まれたファインマン・パラメーター積分公式を与えることに成功した。30年後私はたまたま彼と出会い、この仕事は彼の学位論文としてミネソタ大学の教授であったD. R. Yennieから指示されたものであることを聞いた。私は、1963年ミネソタ大学の須浦寛の招きで、私のファインマン・パラメーター積分公式に関する仕事を、一連の講義で紹介したのだった。

1974年、P. Cvitanovicと木下東一郎は、私のファインマン・パラメーター積分公式を数値計算に適した形に書き換え、電子の異常磁気能率の6次の補正項の計算を行なった。

ファインマン・パラメーター積分公式のレヴィユーは、[21] [B1] [B2] [B7]。

2 赤外発散の相殺

QEDにおいて生ずる赤外発散は、遷移確率においては消失するであろうことが、Bloch-Nordsieckの半古典的取り扱いにより示唆された。すなわち、生成された軟光子(=観測できないほどエネルギーの低い光子)の数による終状態の違いを区別しないならば、赤外発散の相殺は摂動の各次数において成立しているものと信じられていた。Jauch-Rohrlichの有名なQEDの教科書には、この期待の「証明」が与えられていたが、私は2個またはそれ以上の軟光子が同時に関与するような赤外発散は、彼らの議論では取り扱えていないことに気づいた。さらに彼らの取り扱いでは、相殺の本質的機構が一向に明らかになっていない。

他方、木下東一郎は1950年の短い論文で、摂動論の最低次だけであるが、運動量積分を遂行することなく遷移確率における赤外発散の相殺の機構を明らかにした。もし考えている過程のいくつかのファインマン図と共役ファインマン図とを、その共通する終状態の外線において接続するならば、出来上がった遷移確率の図のそれぞれで赤外発散の相殺を見ることができるというものである。木下のアイデアの拡張としては伊藤大介による仕事があったが、物理的に区別できる過程まで足し合わせているので、不可解であった。

このような状況のもとで、1957年5月－7月、私は木下のアイデアを拡張して赤外発散の問題を解決しようと考えた。私はまず木下のルールのままでは、相殺の起こるべきファインマン図と共役ファインマン図の対のセットが、1つの遷移確率の図にまとまらない場合が、すでに摂動の最低次において存在することに気づいた。この困難を解決するために、私は、終状態のみならず、初期状態においても共通する外線を接続することを考えた。こうして得られる外線の全くない図を、木下の頭文字をとって「K図」と名付けた。[*7]

私は、光子のプロパゲーターを、デルタ関数部分とコーシーの主値部分に分けた。後者は赤外部の問題に関しては無視できると考えたからである。つまり軟光子に関する限り、内線と外線を区別する必要はないということになる。赤外発散の原因は、実の電子が軟光子を放射吸収するとき、質量殻に近い電子のプロパゲーターが現われて、それが軟光子のもつ特異性を強めてしまうことによる。1つのK図は、いくつかの電子線のループのそれぞれを2ヶ所で切断して得られるファインマン図と共役ファインマン図の対のセットに対応する。ただしこのとき得られる遷移過程が互いに物理的に区別できないもの、すなわち、軟光子の状況以外の相異はないものになっていなければならない。遷移確率はもちろんK図に関する和によって与えられる。K図は外線を持たないことから期待されるように、質量殻に近い電子のプロパゲーターの寄与がないと考えられるから、赤外発散の相殺は各K図において起きている筈である。実際この命題は、木下の恒等式を拡張することによって得られる次の恒等式に基づいて証明できる。「k個の電子のプロパゲーター、実の電子に対応する1個のデルタ関数、$n-k-1$個の電子の共役プロパゲーターの積を、kについて1からnまで足し合わせたものは、赤外特異性を持たない。」私はこのn個の電子線の全体を電子の「本質的外線」と呼んだ。一般に、1つのK図は、いくつかの電子の本質的外線を含むが、赤外発散の相殺はそれぞれの本質的外線ごとに起きるのであって、図全体からの現象ではないことに注意しなければならない。私はこのようにして、摂動論の各次数での遷移確率における赤外発散の相殺を証明することに成功したのだった[4]。

[*7] その後この概念は、何人かの著者により、過去の仕事に言及することなく、繰り返し提起された。しばしば「ダブルカット図」と呼ばれている。

私は、この証明は4次元QEDだけでなく、質量ゼロの場のある全く一般の場の量子論で成立するものと思っていた。私の論文が出てすぐ、D. R. Yennie とS. C. Frautschi と須浦寛の QED の赤外発散の相殺に関する有名な論文が現われた。不幸にして、彼らは「この証明（＝私の証明）は、微分断面積でなく、全断面積にのみ適用される」と誤って書いたために、それ以後私の論文はあまり注目されなくなってしまった。さらに1962年、木下は、ファインマン・パラメーター積分公式に基づいて、赤外発散の一般論を与える大論文を書いた。しかし相殺に関してはパラメーター積分で論ずるのは難しいので、それについては私の論文を引用するにとどまった。しかし、それ以後、木下の論文は赤外発散相殺の一般論の代表的論文となり、1964年に現われた T. D. Lee と M. Nauenberg の論文とともに、「赤外発散」といえば、「木下-Lee-Nauenberg(KLN) の定理」として、自動的に引用される習慣ができあがった。

Lee と Nauenberg の論文は、上述の赤外発散相殺の機構を全く理解せず、非相対論的量子力学にしかあてはまらないような非常に粗雑な議論をしているだけのものである。それにも拘わらず、四半世紀にもわたってこの論文を批判しようとする人は誰もなく、教科書などにも広く引用され続けていた。私はとうとう我慢出来なくなり、1989年3月、KLN 定理を批判するコメントを書いて *PR* に提出した。それは予想外にすんなりと掲載決定になったが、その理由は、Lee が国際会議の主催者として中国にいた6月4日、天安門事件が起こって、足止めをくったからであった。彼がアメリカに戻ってから情勢は一変した。掲載予定号の発行日1週間前の8月8日、突然 *PR* 編集部は全く非科学的理由をこじつけて、私の論文を没にした。私は抗議したが、評議員の1人から書き方を改めて再提出を奨める手紙をもらったのみである。私は、論文の再提出はしなかったが、その校正刷りのコピーをずっと後になってから素研 (2003.2) に掲載した。

1979年、赤外発散の問題が復活したとき、「Libby-Sterman の恒等式」というものが現われたが、これは私が本質的外線について証明した恒等式の特殊の場合に過ぎない [131]。1980年、赤外発散の相殺は、QCD のような非可換ゲージ理論では成立しないことが発見された。これは、2つの本質的外線をつなぐグルーオンの内線が、グルーオンの外線が持たないような赤外特異性を持つためである。この意味で、私の証明は全く一般的とはいえなかった。

3　不安定粒子の固有状態

不安定粒子が中間状態に現れるようなファインマン図を、安定粒子の如く考えてファインマン規則どおりに計算すると、赤外発散に似た発散が現われてしまう。この困難を避けるには、不安定粒子のプロパゲーターの質量項に、その粒子の崩壊の半値幅を虚部としてつけ加えればよい。ところがそうすると、S行列を用いて計算した不安定粒子の崩壊振幅は、エネルギー保存則のために正確にゼロ

になってしまう。このことは、内藤邦夫 *8 がリー模型で証明した。私は、初期状態の不安定粒子の質量を実数とする限り、このことは一般的にいえることを示した [素研 (1957.11)]。明らかにこの困難は、不安定粒子の内線と外線を不平等に取り扱ったから生じた。すなわち、不安定粒子の初期状態にも崩壊の半値幅を取り入れることが必要である。ところがこれはそう一筋縄ではいかない。

1957 年、荒木不二洋と宗像康雄と川口正昭と後藤鉄男は、不安定粒子の質量、崩壊半値幅、そして繰り込み定数 Z をどのように定義すべきかを論じた。不安定粒子の正確なプロパゲーターは、エネルギー変数のカット平面上で解析的であり、不安定粒子に対応する複素極を持たない。そのような複素極を見いだすには、カットを下半面に変形して非物理的リーマン面に行くことが必要である。このような非物理的リーマン面上に複素極が存在すれば、その（静止系での）位置の実部と虚部をそれぞれ不安定粒子の質量と崩壊半値幅に同定するのが自然である。内藤は、この複素質量を用いて、リー模型における不安定 V 粒子の状態を定義した。その式は、V. Glaser と G. Källén が不安定粒子の「近似的状態」として提起したものと本質的に同じである。しかしながら、不幸にして、この状態は、崩壊相互作用の結合定数をゼロに近づけても、はだかの V 粒子の状態には近づかない。実際、Z 因子は、1 ではなく、1/2 に近づいてしまう。この困難の原因はもちろん、不安定粒子の複素極が、物理的リーマン面ではなく、非物理的リーマン面上にあるという情報を取り込んでいないからである。

リー模型で V 粒子が不安定な場合、N 粒子と θ 粒子の散乱状態は、$\{V, N\theta\}$ セクターにおいて完全系をなしている。従って、通常のヒルベルト空間内で不安定 V 粒子の固有状態を構成することは不可能である。それを実現するためには、いわば「ヒルベルト空間内のベクトルの解析接続」が必要である。この目的のため、私はまずシュヴァルツの超関数の概念（私は岩村聯の翻訳書をよく勉強していた）を解析接続することを考えた。L. Schwartz の定義に従えば、超関数とは、任意の C^∞ 級テスト関数と特定の特異「関数」との積を、実軸上で積分することにより実現されるような線形汎関数である。この定義を拡張して、私は次のように「複素超関数」を定義した。「複素超関数は、必要な帯状領域で正則な任意関数と特定の有理型関数との積を、実軸上の特定の 2 点を結ぶ積分路に沿って積分することにより実現されるような線形汎関数である。」積分路は、上半面の極の上方や下半面の極の下方を通ってもよいので、実積分には一般に帰着しない。この複素超関数の概念を用いると、不安定 V 粒子の固有状態を構成することが可能である。この状態のノルムがゼロであることは、直接の計算によって確かめられる。私の論文は、1958 年に発表された [5]。その後、後藤は別な不安定粒子の固有状態を構成したが、そのノルムは無限大ということであった。

私の構成した不安定粒子の真の固有状態は、残念ながらそのままでは物理的意

*8 後に山本と改姓。

味を持たない。そこで、複素超関数をできるだけ忠実に（もちろん一意的にはいかない）普通の超関数で「近似」することにより、物理的不安定粒子状態を構成すること考えた [6][8]。この近似的固有状態は、Glaser と Källén による近似的固有状態とは異なり、Z 因子は弱結合の極限で正しく 1 になる。さらに私は、特定の模型に頼ることなしに、この近似的固有状態が、その不安定粒子の生成過程を $t=-\infty$ から $t=0$ まで追っていくことにより、作られるものであることを示した。

阪大の数学の教授であった功刀金二郎は、複素超関数に興味を示してくれた。彼は、解析関数を用いた超関数としては、1952 年 Käthe によるものがあるとコメントしたが、私のとは違うようである。また、数理科学研究班で出会った佐藤幹夫は、多分私と同じ頃と思うが、私のと同様な概念を導入したということだった。彼はそれを「解析的超関数」と呼んだが、残念ながらそれは論文として公表されることはなかったようである。というのは、そのすぐ後、彼は後に「佐藤超関数」と呼ばれることになる重要な概念に到達したからである。

1972 年、私は、複素ゴーストの場の量子論でのファインマン積分の計算において、複素超関数が自然に現われるを見つけた [72]（§11 参照）。複素ゴーストの場の量子論では、複素極は物理的リーマン面上に上下対になって現れる。そのため、ダイソンの S 行列を定義するのに必要な断熱因子は指数関数では不十分で、ガウシアンを用いなければならない。そのとき、複素ゴースト対を中間状態に持つ自己エネルギーのファインマン図には、必然的に複素超関数を使うプロパゲーターがでてくるのである。

私の不安定粒子の固有状態の導入から 20 年近く経ってから、幾人かの著者が、それぞれそれ以前の仕事に気づかずに、同様な不安定粒子の固有状態を定義した。著名な物性論の学者である I. Prigogine は、私の仕事に注意し、とくにそのゼロノルム性に注目したようである。それ以後、私の原論文はようやく広く認知されるようになった。私はそのレヴィユーの講演を、1998 年奈良女子大、2003 年日本大学から依頼された [C19]。

4 核子の電磁構造の計算

1958 年、R. Hofstadter によるスタンフォード線形加速器の実験は、陽子の電荷半径が予想外に大きいことを示した。それゆえ、この事実が湯川の擬スカラー中間子論によって説明できるのかどうかが、重要な問題となった。中性子の電荷半径はほとんどゼロであることが知られていたので、アイソスピンの言葉でいうと、上の結果は、核子の電磁構造のアイソベクトル部分とアイソスカラー部分はほとんど等しく、ともに大であるということになる。アイソベクトル部分の摂動の最低次の計算はたいして面倒なものではなかったが、アイソスカラー部分は摂動の最低次ですでに eg^6（g は π-N 結合定数）のオーダーとなり、とても大変な

計算になるので誰も敢えてチャレンジしようとはしなかった。

1958 年 11 月、緋田吉良は私に、私のファインマン・パラメーター積分公式（§1 参照）を使えば、アイソスカラー部分の摂動計算がやれるのではないかと提案した。そして、この 2 人に野上幸久と植原正行の 2 人を加えた、核子の電磁構造の研究チームが発足した。アイソスカラー N-π 頂点部分の最低次のファインマン図は、ヴァーチャル光子がバリオン（N, Λ, Σ, Ξ）の 4 角形ループを通じて、3 個のパイオンとなって核子と相互作用するものである。このファインマン図は、6 個のスピノルのプロパゲーターを含むので、パラメーター積分の被積分関数の分子を計算するのは、ものすごく大変な仕事であった。しかし、私はこの計算を遂行し、結果が驚べくコンパクトな形にまとまることを見いだした（緋田はチェックを行なった）。もちろん、この 8 重パラメーター積分を遂行することは不可能であったが、幸いこの積分は紫外発散も赤外発散もなく、被積分関数が定符号なので、おおよその大きさを推定することは可能だった。非常に粗い評価によれば、実験値を説明するくらいの大きな値が得られそうであった。われわれはこれを 2 論文にまとめた [11][12]。われわれの結果は、新聞（全国紙）にも報道された。

緋田と私は、核子の電磁構造の計算をさらに進めた。バリオンの質量を無限大にしてバリオン・ループを 1 点に収縮させる近似（「ノー・ループ近似」）をとると、積分は著しく簡単化される。私は、さらに核子の方についてもスタティック近似をすると、積分を解析的に遂行できることを見いだした。スタティック近似の式は、S 波部分と P 波部分とから成る [13]。後者はパイオンのスタティック理論からも直接計算でき、われわれの計算の少し前、B. Bosco と V. De Alfaro によって計算された。私は彼らの論文のプレプリントでそれをチェックし、誤りを見つけた。私はこのことを Bosco に知らせたところ、指摘されたことには言及せずに彼らの論文を訂正しただけでなく、こちらの論文の指摘も抹消するように言ってきた（もちろんこの要求には従がわなかったが）。ずっと後、私はたまたま Alfaro と出合ったので、このことを言ったら、彼は全く知らなかったようであった。

スタティック近似の式は、高エネルギー部分で急速に増大するため、結果は著しくカットオフに依存してしまう。従って、これから定量的な結論を得ることは不可能であった。そこでついにノー・ループ近似の 4 重積分の数値計算を行なうことに決心した。当時日本でコンピューターによる計算はまだできなかったので、アルバイトの学生を雇い、電気計算器で積分の計算をやらせた。とは言っても、当時の機械の性能は悪く、とてもまともな数値積分はできなかった。そこでランダムに選んだ点での関数値を計算して、積分値を推定することにした。私は、当時まだあまりポピュラーでなかったモンテカルロ法については全く知らなかったので、我流での計算である。ところで、得られた結果は予想外に小さく、

とても実験値を説明できるものではなかった [17]。結局、陽子の荷電半径の問題は、以前に南部陽一郎によって提起されていたアイソスカラーのベクトル中間子 ω が見つかって、決着した。私は、具体的な計算のばからしさを痛感した。

われわれの計算のしばらく後、京都大学に KDC-I という名前の電子計算機が導入された。私はこの苦い経験から、京大で開かれたコンピューター・プログラミングの講習会に参加した。プログラムは自分でパンチカードに打ち込まねばならず、コンピューターはパンチカードのいかなる微細なエラーも許容してはくれなかった。これは全く精神をすり減らす仕事だったので、結局諦めた。その後 30 年間、私はいかなる電子計算機の類にも直接手を触れることがなかった。

5 素粒子の対称性

私が修士課程の学生の頃、西島-ゲルマン規則が成功し、またパリティの非保存が発見された。それで、素粒子の対称性の研究は大流行していた。誰もがなまかじりの群論を使って、一発当ててやろうと思っていた。当時、π-e 崩壊の π-μ 崩壊に対する相対比の上限が、m_e^2/m_μ^2 の値を 1 桁下回るというショッキングな実験データが現われた。ミューオンが質量以外で電子と本質的に同じ性質を持つ限り、このことは理論的に絶対に説明できない。そこで私は、「この世あの世変換」と呼ばれる奇妙な変換を導入して、π-e 崩壊を禁止するモデルを提起した [3]。しかしながら、不幸にして、この後すぐ、実験は間違いで、$V-A$ 理論によって素直に説明できることがわかった。実験屋はパリティの時も、ベータ崩壊は S と T であるという結果を出して、理論屋を困らせていた。私は実験屋に対する信頼をなくし、以後実験と直結する仕事はやらないことにした。

とはいっても、私が素粒子の対称性の問題に全く無関心だったというわけではない。1963 年 7 月、アメリカのブルックヘヴン研究所に居たとき、M. Gell-Mann および Y. Ne'eman による八道模型（$= SU(3)$ に基づく 8 重項模型）の類推で、バリオン、擬スカラー中間子、ベクトル中間子、反バリオンから成る 8 重項の模型を提起した。*9 しかし、これをきちんと定式化することはできなかった。論文にしたのは、1964 年 4 月であるが（プレプリント BNL-7990)、*PRL* に投稿した直前、H. J. Lipkin による同じアイデアの論文が *PL* に出たため、没にされてしまった。のち、1970 年代になって超対称性理論が現れ、一世を風靡する。私のモデルは、超対称模型の先駆というにはあまりにもお粗末だが、多分ボソンとフェルミオンとを 1 つの多重項にまとめた最初の試みであったと思われる。

*9 これは湯川秀樹への私信として素研（1963.8）に記録されている。

6 ファインマン積分の解析性

分散式は、数学的には、実軸上を除いて正則な関数 $f(s)$ に対するスペクトル表示

$$f(s) = \int ds' \frac{\sigma(s')}{s' - s}$$

に他ならない（積分が収束しないときは、適当な引算項をつけ加える。）。しかし素粒子物理学では、分散式は、摂動論などの近似に頼ることなく実験的に観測可能な量の間の関係式を直接与えるものとして、強い相互作用の研究で極めて重要なものであった。

分散式の成功で、散乱振幅の解析性の研究は、1950 年代の後半非常に流行した。解析性の研究の主流はもちろん公理論的場の量子論的なアプローチであったが、ほどなく核子・核子散乱の分散式を証明することができないことが分かり、この方法の限界が認識されるようになった。共変的摂動論は、状態空間の計量の正値性を除き、すべての場の量子論の公理を満足する例を豊富に提供する。[*10] それゆえ、ファインマン積分の解析性を調べ、公理論的方法でうまくいかない場合を研究することが、重要な課題となった。この方向の研究の口火を切ったのは、1958 年の R. Karplus と C. Sommerfield と F. Wichmann、そして R. Oehme、そしてまた南部陽一郎による「異常しきい値」の発見である。しきい値における特異性は、新しいチャンネルが開けるところにのみ現われるものと直観的に期待されていたが、そうではない奇妙なしきい値が存在するということは大きな驚きであった。そしてこれが、公理論的方法で核子・核子散乱の分散式を証明することができない理由であった。公理論的なスペクトル条件では、核子がヴァーチャルにより軽い粒子に分解されないという事実[*11]を禁止することができず、そのような場合から生ずる異常しきい値の可能性を排除できないからである。

私は、以前にファインマン・パラメーター積分の一般公式を与えたので（§1 参照）、摂動論のすべての次数で、期待通りの核子・核子散乱の分散式を証明することは、容易であった [7]。他方、私は、一般のファインマン積分における異常しきい値の出現のメカニズムを詳細に解析した [10]。一般のファインマン積分の特異点の解析は、L. D. Landau によってもなされた。[*12] 1959 年 9 月、キエフで開催された高エネルギー国際会議で、彼は緊急の特別講演としてこの話を行なった。湯川秀樹は、中西も同様な仕事を行なった旨、コメントした由である。

[*10] 後に私は、任意に与えられたファインマン積分を厳密な結果とするような不定計量の場の量子論が存在することを証明した（[78] の §15 参照)。

[*11] もちろんこの当時、クォークは考えられていない。

[*12] J. D. Bjorken も同様な仕事を独立に行なったことを、彼の著書で主張している。

Landau は、ファインマン・パラメーター積分を導入したが、運動量積分を遂行しない形で、特異性の研究を行なった。こうすることにより、いわゆる「ループ方程式」を他の方程式と同じレベルで導出することができた。彼の方法は、ファインマン積分を解析接続することによって得られる解析関数の、一般の複素特異点を論ずるのに有効であった。他方、私は、ファインマン・パラメーター積分公式に基づき、しきい値型の特異点、すなわち、物理的リーマン面上の実特異点を詳細に分析した。私はこの論文を仕上げてから、パラメーター積分公式の持つ余剰自由度をループ方程式を設定することによって固定すれば、解析が非常に簡単化することに気づいたが、当時大学院博士課程の学生であった私は、秘書にタイプの全面的打ち直しを頼むのが気が引けて、そのまま投稿してしまったのである。私の論文 [10] の受理の日付は、Landau のそれより少し早い。私は、Landau の論文を見てから、改良版を書いた [15]。1960 年、この仕事は、私の京都大学理学博士の学位論文となった。また、私はこの仕事により、1973 年、仁科記念賞を受賞した。さらに、日本数学会編の「岩波　数学辞典（第 3 版)」には、「ランダウ-中西方程式」に関して、かなり詳しい記述がなされている。

少し時代を戻るが、かつて（1955 年)、南部は 1 変数の分散式を直截的に多変数に拡張して、頂点関数（= 3 点グリーン関数）に対して 3 重スペクトル表示、4 点グリーン関数に対して多重スペクトル表示を提起したことがあった。しかし、もちろんこのような単純な多重分散式は、一般的に成立しない。S. Mandelstam は、1958 年、これを改良して、散乱振幅（=質量殻上の 4 点グリーン関数の外線を取り除いたもの）に対して、2 重分散式を提起した。運動量空間の質量殻上において 3 つの運動量の平方 s, t, u（Mandelstam の記号）が存在するが、それらは一次独立ではなく、その和は質量の平方の和に等しい。しかしそれらについて対等な形で定式化することが必要なので、彼の 2 重分散式は、s-t 項、t-u 項、u-s 項、及び単純分散式と多項式の引算項から成る。当時、このマンデルスタム表示は非常に注目され、これを摂動論のすべての次数で、少なくとも等質量の場合に証明することが極めて重要な課題とされた。

1960 年、私は頂点関数のノントリヴィアルな最低次である三角形ダイアグラムを使って、どのような場合に 2 重分散式や 3 重分散式が成立するのかを詳しく分析した [18]。その際、2 つの外線殻外質量の平方 s, t の関数として、複素特異点を持つ極めて簡単な例を発見した。同じ頃、ケンブリッジ学派の R. J. Eden がマンデルスタム表示の摂動論的証明に成功したという、ホットニュースが流れた。しかし彼が、2 重分散式が成立するための十分条件として掲げたものは、私の反例を排除できなかった。それゆえ、私は Eden の証明が誤りであるという短い論文を *PTP* に書いた [19]。そうしたら、彼は、自分が議論したのは散乱振幅であって、頂点関数ではないと怒ってきた。この事件後、ケンブリッジ学派の人々は精力的にファインマン積分の解析性の研究を行なったが、誰もマンデルス

タム表示の証明には成功しなかった。

私は 1961 年 9 月からプリンストンの高等研究所に居たが、プリンストン大学の S. B. Treiman がマンデルスタム表示の反例を見つけたというニュースが流れ、センセーションを巻き起こした。しかし、すぐそれも間違いであることが分かった。反例を作るには、かなり高次の非平面的なダイアグラムを考えなければならない。1963 年 2 月、私はそのようなダイアグラムを解析し、F. J. Dyson が「ベリーナイス」と言ってくれたほどまで追求したが、残念ながら、複素特異点の存在を証明するには至らなかった。今日に至るまで、マンデルスタム表示は、等質量の場合において、摂動論のすべての次数で証明することも、反例を作ることもなされていない。

4 点関数の完全グラフのファインマン図は、外線殻外質量の平方について異常しきい値を持つ。それゆえ、このダイアグラムでは、外線質量殻上の値の平方がその異常しきい値からでるカット上にある場合があり得る。散乱振幅は、最初から外線質量殻上で定義されるので、この場合、実軸がすべて両側からカットにはさまれてしまう、全 2 重カット状況になる。不安定粒子の形式的散乱振幅にも同様な現象が現われるが、この例は粒子の安定性条件を課しても排除できないので、深刻である。1962 年 5 月、私はイリノイ大学を訪問しているとき、散乱振幅は必ずしも s, t, u のみの質量殻上の解析関数の境界値にはならないことを指摘した論文を書いた [31]。この論文は最初 *PR* に提出、その後 *JMP* に再提出したが、原稿を紛失され、発表まで 1 年半かかってしまった。当時は S 行列だけに基づいて素粒子物理学が定式化できるとする解析的 S 行列理論の全盛期で、解析関数と直接関係しないような散乱振幅が存在するなどということは許しがたいことであった。特に M. Froissart は、私の論文のアブストラクトにあった「S 行列理論のデッドロック」という言葉に激怒して、*JMP* の編集部に抗議した。10 年ほどしてから、J. Bros と H. Epstein と V. Glaser が、質量殻外 4 点関数を境界値に持つ解析関数が、その物理的領域の近傍でつねに正則であることを厳密に証明した。それで、1973 年、私はこの問題を再び取り上げた [81]。そして私は、このパラドックスは考えているリーマン面の違いによるものであることを指摘したが、誰も積極的に賛同してくれなかった。H. Stapp は、解析的 S 理論では、邪魔なカットは境界値を取る前に変形しておくのだと主張したが、これは結局別なリーマン面を採ることに他ならない。要するに、私の立場と彼らの立場の本質的違いは、実変数の物理的振幅と複素変数の解析関数のどちらを第一義的に考えるかの違いに帰着するのであろう。

散乱振幅の高エネルギー漸近的振る舞いに対する有名なフロワサー限界は、1961 年の Froissart の原論文では、マンデルスタム表示を仮定して証明された。しかし不幸にして、マンデルスタム表示は証明できそうにない。私は摂動論的に、フロワサー限界の証明に必要な解析性を導く問題を議論し、1964 年 *PRL* に

発表した [37]。しかしその後まもなく A. Martin が、摂動論に頼ることなく要求される解析性の証明に成功し、[*13] 私の論文はジャンクになってしまった。

1965 年、S. Coleman と R. E. Norton は、ファインマン積分の物理的領域での特異点に対する条件は、古典的粒子の多重散乱として解釈できることを指摘した。私は、ファインマン積分の空間表示において古典極限 $\hbar \to 0$ をとることにより、この物理的領域特異点に対する条件を直接導出できることを示した [50]。

ファインマン積分の解析性に関するレヴィユーは、[21] [B1]。

7 摂動論的積分表示

F. J. Dyson が与えた局所場の 2 重交換子の真空期待値に対する積分表示を用いて、S. Deser と W. Gilbert と E. C. G. Sudershan, そして独立に、位田正邦は、頂点関数を 2 つの外線殻外質量の平方 s, t の関数としての積分表示（「DGSI 積分表示」）

$$f(s,t) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^1 dz \frac{\rho(\alpha, z)}{\alpha - zs - (1-z)t}$$

を導いた。不幸にしてその後まもなく、Dyson の積分表示は誤りであることが明らかとなったので、DGSI 積分表示は公理論的に証明できなくなった。しかしながら、1960 年、私はこの積分表示は摂動論のすべての次数で成立することを示した [20][21]。主要な仕事は、ファインマン・パラメーター積分公式に基づいて、ウェイト関数 $\rho(\alpha, z)$ のサポート（＝ゼロでない領域の閉包）を調べることであった。

1961 年、私は摂動論のすべての次数で成立するこの種の積分表示を、散乱振幅の場合に拡張した [22][23]。この積分表示は、マンデルスタム表示（§6 参照）のように 3 つの項から成り、その各々は DGSI 積分表示のような形をしている。ファインマンの恒等式（§1 参照）と部分積分により、この積分表示はマンデルスタム表示から導けるので、それの弱い形であるとみなせる。同様な積分表示は、生成振幅（＝質量殻上の 5 点関数）にも拡張できる [26]。これらはすべて摂動論的に導かれるので、私は「摂動論的積分表示（PTIR）」と呼ぶことにした。

私は散乱振幅の PTIR のウェイト関数のサポートの詳しい形を調べた [23]。その際、私は、或る種の正定値ファインマン・パラメーター斉次多項式（逆ファインマン・パラメーター表示で「2-樹木積和」と呼ばれるもの）の特別な 2 種類の積に対し、つねに不等式が成立しているらしいことを発見した。もし各積をファインマン・パラメーターの単純積の和の形にばらし、各項を重複を認めた添字の集合とみなして集合論的な包含関係を考えると、その集合論的な意味にお

*13 2001 年 Martin は、故 H. Lehmann への追悼文集で、この話についての思い出を書いている。

ける不等式が成立しているようであった。私はうまい還元法を使って調べるべきグラフの数を減らし、内線の数が 9 以下のすべてのファインマン図に対してこの集合論的な不等式が成立していることを確かめた。ファインマン・パラメーター積分公式のグラフ理論的構造に非常に興味をもっていた Y. Chow は、生成過程の場合にも同様な不等式が成立するのではないかと推測した。1965 年、J. B. Boyling は、行列式の性質をうまく用いて、元の不等式の一般的な代数的証明に成功した。ウェイト関数のサポートの形を決めるのにはこれで十分であるが、集合論的な不等式はグラフ理論的な問題として、何人かの人のチャレンジにもかかわらず、未解決のまま残されている。

私は、プリンストンの高等研究所に居たとき、PTIR の数学的構造について研究した [25][30]。散乱振幅の PTIR は 3 つの項より成るので、その表示の一意性を証明する必要があった。1963 年、同研究所に居た佐藤幹夫に、カルタン・セールの定理 B 及びチェック・コホモロジーに関するルレイのレンマのことを教わって、一意性の証明を行なった。ちょうど同研究所に居た R. Stora も、このような数学的な話に興味を持ったようである。

PTIR は、漸近的振る舞いに関して、分散式やマンデルスタム表示とは異なる興味ある性質を持つ [35]。もし z^λ を L. Schwartz により導入された擬関数によって定義するならば、PTIR は、s の非負冪の振る舞いを、引算項を導入することなしに記述できる。このことは、PTIR を用いて書かれたベーテ・サルピーター方程式の解のレッジェ的振る舞い（§9 参照）を議論するのに、大変便利である。

PTIR のレヴィユーは [B1]。プリンストン高等研究所の講義録もある。

8 グラフ理論とファインマン積分

§1 で述べたように、私は 1956 年にファインマン・パラメーター積分公式を見つけた。1957 年、南部陽一郎は、プロパゲーターの指数関数表示を用いて運動量積分を遂行し、別な形のパラメーター積分を得た。1958 年、K. Symanzik は、南部のパラメーター積分公式の分母関数に対する位相公式を証明なしに与えた。*14 南部のパラメーターはファインマン・パラメーターの逆数に相当する。そこで逆数をとると、U に対する彼の式は私のものと一致していることが分かったが、V に対する彼の式は私のものとは異なる形をしていた。彼の位相公式は、回路ではなく、切断集合（物理的に言えば中間状態）に基づいたものであった。*15 1961 年、私は *PTP* サプルメントにレヴィユー論文 [21] を書き、ファインマン・パラ

*14 彼に直接その理由を聞いたところ、「証明は容易だから」とのことだった。

*15 グラフ理論的には、回路と切断集合は双対関係にある。

メーター積分公式、ファインマン積分の解析性、分散公式の摂動論的証明などをまとめた。PTIR のサポートを証明する問題で、荒木不二洋のコメントが有用であった。数理科学研究班の会合で、私はこのことを話したところ、一松信がそれは線形計画法で知られている結果であることを指摘した。

1962 年、ブルックヘヴン研究所の Y. Shimamoto は、私のファインマン・パラメーター積分公式をグラフ理論的に再構成する仕事をした。彼は私をブルックヘヴンに招き、私は彼の仕事を知ったが、初めは私の仕事の単なる書き換えに過ぎないのではないかと思った。しかしその後漸次、ファインマン・パラメーター積分のグラフ理論的考察が、本質的に重要であることを認識するようになった。日本に戻ってから、私はファインマン積分の数学的な本を書くことにした。私の本は A. S. Wightman により監修されることになり、匿名であったが彼の学生であった E. P. Speer が私の原稿を詳しく検討した。話が順調に進んでいた矢先、突然この本の契約を一方的に破棄するという通告が送られてきた。Wightman の説明理由は納得がいかなかったが、そのうちに発行所の W. A. Benjamin 社が倒産したことを知らされ、合点がいった。私の本が出せないでいるうちに、C. S. Lam と J. P. Lebrun が位相公式に関する論文を発表した。彼らは Symanzik の論文と Shimamoto の論文だけを読んだものとみえ、分子関数に関する結果をオリジナルと主張していた。彼らはさらに、時空表示のファインマン積分に対するパラメーター積分公式を与えた。同じ頃、私は南政次と共同で、ワイトマン関数の摂動論的な時空変数の解析性を研究していた [52]。そして、私はまた時空表示のファインマン積分に対する公式を与えた [60]。1969 年 9 月、私は再渡米してブルックヘヴンに行き、新たな発行所を紹介してもらった。私は本の原稿を全面的に改訂し、私の最初の著書 “Graph Theory and Feynman Integrals” は、Gordon and Breach 社から 1971 年に発行された [B1]。しかしながら、不幸にして、この Gordon and Breach 社も数年後に倒産し、私の本は絶版になってしまった。

Shimamoto は、平面地図の 4 色問題の研究に非常に熱心であった。彼の影響で、私はグラフの染色問題を勉強した。帰国後、私はこれを場の量子論に応用した [79]。単一のスカラー場の冪乗相互作用と多数の相異なるスカラー場の多重線形相互作用とでは、現われるファインマン図にどのような違いが生ずるのかを、詳しく分析した。この問題は、4 色問題 (後に定理となる) とも関係している。

9 ベーテ・サルピーター方程式

弾性散乱のグリーン関数に対するベーテ・サルピーター (BS) 方程式は非斉次線形積分方程式で、その積分核は弾性散乱既約部分である。系の全 4 次元運動量 P_μ は、この積分方程式のパラメーターである。$s \equiv P^2$ と書くとき、もしグリーン関数が $s = s_B$ に単純極を持てば、その留数は斉次線形積分方程式を満足

する。これが束縛状態に対する BS 方程式で、その解が BS 振幅である。積分核として 1 粒子交換のダイアグラムのみを採ったものを「梯子近似」の BS 方程式というが、近似としての実用性よりも、束縛状態に対するノントリヴィアルで最も簡単な相対論的方程式として理論的に興味があるので、私は「梯子模型」と呼ぶことにした。

1960 年、私は 2 つのスカラー粒子の束縛状態に対する BS 方程式の研究を始めた。まず、$P_\mu = 0$ の梯子模型の BS 方程式を、単純なスペクトル表示により解いた [素研 (1960.2)]。ローレンツ不変な BS 振幅は 2 つの外線質量 (殻外) の平方を変数とする頂点関数とみなせるので、山本邦夫[*16]が示したように、それは非物理的領域 $s < 0$ において 2 重スペクトル表示ができるはずである。1962 年、私はこの性質を用いて、一般の積分核に対し、逐次近似の方法で $s < 0$ におけるスペクトル関数に対する積分方程式のローレンツ不変な形式解を構成した [28][29]。しかし、固有値を決める方程式が摂動展開の形で与えられるので、$s > 0$ への解析接続はどうしたらよいか分からない。

$s > 0$ における一般の BS 振幅は、体球関数[*17]の因子を除き、DGSI 積分表示 (§7 参照) で表わされる (ただし、s, t はそれぞれの外線質量の平方の値だけずらしたものとする)。私は、梯子模型の BS 方程式をウェイト関数 $\rho(\alpha, z)$ に対する積分方程式に変換した [27]。そして、角運動量 l を複素数値に解析接続し、その当時流行していたレッジェ軌跡に関する考察を、BS 方程式を用いて行なった。

交換される粒子の質量がゼロのときは、ウェイト関数の α に関するサポートは原点のみとなるので、それに対する積分方程式は z のみの 1 次元の積分方程式に帰着する。そしてさらにそれは、2 階線形常微分方程式の境界値問題に変換できて、厳密に解ける。この事実はすでに 10 年前、C. Wick、そして R. E. Cutkosky によって発見されていたことである。[それゆえ私はこの場合の BS 方程式を、ウィック・カットコスキー模型 (WC 模型) と名付けた。] 彼らの解析によれば、束縛状態に対する非相対論的なシュレディンガー方程式の解が 3 つの量子数 n, l, m で記述されるのに対し、第 4 の量子数 $\kappa\ (= 0, 1, 2, ...)$ を新たに導入することが必要である。というのは、BS 方程式は相対時間もしくは相対エネルギーの自由度を持っているからである。$\kappa = 0$ の解は、非相対論的近似でシュレディンガー方程式の解に帰着するので、「通常解」と呼ばれる。それに対し、$\kappa > 0$ の解は、非相対論的な対応物を持たないので、「異常解」と呼ばれる。異常解は非物理的なものなのかどうか、もしそうなら、一般的な枠組みでそれらを通常解から区別する原理はあるのかということが、重要な問題となった。

1964 年、私は質量ゼロのスカラー粒子交換の等質量スカラー粒子グリーン関数に対する BS 方程式を解く問題を扱った。$P_\mu = 0$ の場合は、1 次元の方程式

[*16] 旧姓内藤。

[*17] 私はのちに、リトル群の表現として、体球関数の定義を一般の P_μ の場合に拡張した [40]。

に帰着するので簡単に解ける [36]。しかし、$s=0$ でも $P_\mu \neq 0$ の場合の PTIR は、3 変数の 2 次元の方程式になる。[初期状態の外線を質量殻上においたので、赤外発散を避けるために、最初の 1 回だけ交換される粒子にゼロでない質量をもたせた。] この方程式の厳密解が非常にコンパクトな形で求まったのは、かなり奇跡的であった [34][38]。私は、この解の t チャンネルにおける高エネルギー漸近展開の展開係数を計算し、すべての通常解はレッジェ軌跡として現われるが、異常解についてはそうはなっていないことを見た。

私はこの異常解の問題をさらに別の角度から追及することにした。BS 振幅の規格化条件は西島和彦や S. Mandelstam によって与えられていたが、私はグリーン関数の方程式から直接、より計算し易い形の規格化条件式を与えた。そしてこの式を用いて、WC 模型の解の規格化積分を s の特別な値について具体的に計算し、κ が奇数のときの解は、負ノルムを持つことを発見した [40][41]。すなわち、そのような束縛状態は、もし本当に存在するのであれば、「ゴースト」でなければならないという結論である。この仕事は、梅沢博臣のレヴィユー誌 *MR* でのコメントで高く評価された。s のもっと一般の値の規格化積分を数値計算することを考え、それをブルックヘヴン研究所のコンピューター部局に依頼する計画をしていたちょうどその時、私は *PR* 編集部から M. Ciafolini と P. Menotti による論文の審査を依頼された。この論文で彼らは、等質量の場合に限るが、交換される粒子の質量に関係なく解の相対エネルギーの偶奇と解のノルムの正負が一致することを、ウィック回転*18を用いることにより簡単に示していた。理論は正定値計量のヒルベルト空間で定式化されたはずなのに、こうした負ノルムの状態が必然的に現われてくるというのは、ショッキングな事態であった。

構成粒子の質量を m_1, m_2 とするとき、WC 模型は不等質量 $m_1 \neq m_2$ の場合でも厳密解が求まっている。後述の等質量の場合の多重極の発見の後のことであるが、私は、不等質量の場合は、$s=(m_1-m_2)^2$ に多重極が現われ、ノルムの符号は、$(m_1+m_2)^2 > s > (m_1-m_2)^2$ では κ の偶奇に一致するが、$(m_1-m_2)^2 > s > 0$ では $n-l-1$ の偶奇に一致することを見つけた [45]。後者の場合は構成粒子の安定性条件が破れているとはいえ、通常解までゴーストになるわけである。ノルム条件は、明らかに異常解を通常解から区別する条件には使えない。

少し別な話題になるが、C. J. Goebel と崎田文二は、素朴な期待と矛盾するように見える次の命題を、非相対論的な場合に示した。「3 粒子 a, b, c に対するプロパーな（=外線の補正がないような）頂点関数の a チャンネルにおける極 B $(\neq a)$ は、b と c の散乱振幅には現われない。」1965 年、私は、積分演算をオペレーター的に取り扱う形式を用いて、この命題を相対論化したものを BS 方程式

*18 Wick はその 1954 年の論文で、束縛状態の解析性に基づき、相対エネルギーを虚軸まで解析接続することにより、BS 方程式の特異核をユークリッド的な核に変形した。この手続きは「ウィック回転」と呼ばれる。

の枠組みで一般的に証明した [43]。b と c の散乱グリーン関数の a の 1 粒子中間状態を経由しない部分が、a と同じ量子数の極 B を持つときに限り、プロパー頂点関数は a チャンネルに極 B を持つ。そして、これらの 2 つの極は互いに逆符号で、ちょうどキャンセルする。こうして、散乱のグリーン関数は B に対応する極を持たなくなるのである。この結果は、BS 方程式の枠組みで束縛状態に対応するプロパゲーターや頂点関数を定義する問題を議論するのに、非常に有用であった [46]。

1965 年、私は、BS 方程式の枠組みにおいて、散乱グリーン関数は一般に多重極を持つことを発見した [42]。このことは、それより前に t チャンネルにおける漸近展開を計算したとき、レッジェ 2 重極に対応する $\log t$ 因子の出現によって、すでに暗示されていたことであった [38]。多重極の出現は、束縛状態の BS 方程式の導出の際に用いた基本仮定を変更しなければならないことを意味する。すなわち、斉次の積分方程式が導かれるのは、最高次の多重極の留数の場合のみであって、より低い次数の極の留数が満足するのは非斉次の積分方程式である。結合定数の平方のようなパラメーターを λ とするとき、一般に単純極の位置は $s = s_B(\lambda)$ のような軌跡を描くが、多重極は 2 つまたはそれ以上の軌跡が衝突する所で現われることができる。ただし、それらの軌跡は、正ノルムのものと負ノルムのものの両方があることが必要である。

通常、多重極は $s = 0$ において現われる。これには明白な群論的根拠がある。$s = 0$ には、$P_\mu = 0$ の場合と、P_μ が光錐的な場合とがある。前者の場合に BS 方程式は 4 次元対称なので、固有値は $s = 0$ において縮退する。従って、平行でない限り一般に、単純極の軌跡は $s = 0$ において衝突する。他方、質量ゼロの束縛状態は後者の場合に相当する。2 つの横波成分 $m = \pm l$ だけが物理的に観測され、残りの $2l - 1$ 成分は一般に斉次の BS 方程式を満たさないのである。

1967 年、D. Z. Freedman と J.-M. Wang は、レッジェ極理論において次のような興味ある事実を発見した。「不等質量の 2 粒子の質量殻上の後方散乱振幅において、クーリ・サテライト極と呼ばれる t 展開での極は、振幅自身は持たないような運動学的な極を不可避的に持つ。従って、それらは別のレッジェ軌跡の極によって相殺されていなければならない。このことから、すべてのレッジェ軌跡 $l = \alpha(s)$ は、娘軌跡 $l = \alpha_j(s)$ $(j = 1, 2, ...;\quad \alpha_j(0) = \alpha(0) - j)$ を伴うことが結論される。」彼らはこの相殺機構を「コンスピラシー（共同謀議）」と呼んだ。私は直ちに、このコンスピラシーの機構と、BS 方程式に現われた多重極生成の機構との本質的同等性を認識した。レッジェ軌跡 $l = \alpha(s)$ に相当するのは、固有値の軌跡 $\lambda = \lambda_B(s)$ $(s = s_B(\lambda)$ の逆関数）で、$s = 0$ における多重極生成は、$s = 0$ におけるコンスピラシーに他ならない。逆に、フリードマン・ワンの相殺機構は、レッジェ多重極を生成しているはずである。

娘軌跡の番号 j は、L を $P_\mu = 0$ での 4 次元角運動量の量子数とするとき、

$L-l$ と同一視できる。等質量 WC 模型では、$L-l=\kappa$ であるが、不等質量の場合には、$L-l$ は $n-l-1$ というシュレディンガー方程式にも現われる量子数になる [47][C1]。これ以後、私は、衝突する単純極の軌跡が多重極を生成する機構を、BS 方程式理論とレッジェ極理論との両面から、精力的に研究した [51][54] & [55]。レッジェ極理論については、私と瀬藤憲昭は任意スピンの場合に拡張した [57]。私は、不定計量の問題を避けるためにバーナッハ空間の理論を用いて、多重極生成の機構を数学的に厳密な一般論として定式化した [62]。私の論文では次の基本的命題が証明できないで残されていた。「衝突する単純極の留数が張る空間の次元数は、コンスピラシーの点においても不変である。」M. J. Westwater は、レヴィユー誌 *MR* でのコメントで、この命題は加藤敏夫の特異摂動の理論におけるレンマから従うことを指摘してくれた。

等質量の場合、ウィック回転した梯子模型の BS 方程式は、ヒルベルト・シュミット型の方程式に変形できるので、固有値はすべて実で正であることが知られている。不等質量の場合にはもはやこのことは成立しない。内藤清一と私は、不等質量でも固有値は実であるという証明ができたと思った [59]。しかし、位田正邦によりそれは誤りであることが指摘された。固有値が複素数であるときは複素ゴーストであり、そのときノルムはゼロになるのに、そのノルムでの割り算をやってしまっていたからである。後に精確な数値計算が行なわれ、複素固有値は実際に存在することが示された。

私は WC 模型そのものについても、さらなる研究を行なった。1967 年、それまでなされていなかった P_μ が光錐的な場合を含む完全解を、積分表示を用いて与えた [48]。不等質量のときは光錐的な場合でも、平行軌跡のため、多重極は生成されない。この計算は大変労力の要る仕事だったが、世戸憲治は、Cutkosky によって導入された立体射影の方法を拡張して、非常にエレガントに完全解を与えることに成功した。他方、J. M. Golden は、$s>(m_1-m_2)^2$ の場合、解析接続に頼らない立体射影の方法で、解の構成を行なった。両者の解は、不等質量の場合、一見異なるように見えるので、1972 年私は、世戸の援けを借りて、両者の関係を明確にした [75]。この試みは、さらに瀬藤憲昭により発展させられ、解の詳しい構造が明らかになった。固有値関数 $\lambda_B(s)$ の解析的な表式は知られていないので、私は $s=0$ からの摂動でそれを推測できないものかと考え、その高次展開係数を解析的に求めるコンピューター計算を田中富士男にやってもらった [86]。しかし、所期の目的は果たせなかった。固有値関数の詳しい数値計算は、E. zur Linden により行なわれた。

以上の研究はすべてスカラー・スカラーの BS 方程式に関するものである。物理的に重要なのはもちろん、スピノル・スピノルの BS 方程式である。残念ながら、この方程式は積分核の収束性が悪く、ウィック回転してもフレドホルム型にならず、一般に連続固有値を持つ。おまけに、この方程式の BS 振幅は 16 成分

から成り、非常に複雑である。正確に解けるのは、等質量での $P_\mu = 0$ の場合だけである。この場合、16 元連立方程式は、S-V セクター、T-A セクター、P セクターの 3 つのセクターに分解される。P セクターは「ゴールドシュタイン方程式」と呼ばれ、離散固有値を持たない。1965 年、私はこの方程式のレッジェ理論的考察を行なった [39]。S-V セクターについては、1970 年までに 2 つの離散固有値の解が見つかっていた。両者ともその BS 振幅は、p_μ を相対運動量とするとき、$(m^2 - p^2)^{-1}$ の多項式で書くことができる。私は、もしこのことが一般に正しければ、多項式の最低次の次数と最高次の次数との間にディオファンタス方程式（すなわち、a, b を整数とするとき、代数方程式 $x^2 - ay^2 = b$ の整数値解 x, y を求める問題）が成立することに気付いた [69]。これを解いたが、新しい解は見つけられなかった。後に（1973 年)、私は少し変形した模型での考察から、この仮定はきつ過ぎることに気づいた。実際、1976 年、東島清は S-V セクターを一般的に解いたが、新たな解は非多項式であった。それにもかかわらず、私は固有値問題にディオファンタス方程式が現われたことに非常に興味を感じている。というのは、ディオファンタス方程式の解のスペクトルは指数関数的な増大を示し、素粒子の質量スペクトルを暗示するからである。

1969 年までになされた仕事のレヴィューは [58]。この論文は、BS 方程式のスタンダードな文献となっている。WC 模型に関しては [151]。[C12] [C14] も簡単なレヴィュー。

10 B 場形式と双極子ゴースト

前節で述べたように、1965 年、私は BS 方程式の研究で、散乱のグリーン関数は一般に $s = 0$ において多重極を持つことを発見した。帰国してから、私は同じことが素粒子の場合でも起こっているはずだと考えた。その最も簡単な例が、電磁場である。

当時、電磁場の共変的量子論の標準的理論は、不定計量の場の量子論であるグプタ・ブロイラー形式であった。それはファインマン (もしくはフェルミ) ゲージと呼ばれる、ゲージ・パラメーター α が 1 の場合の定式化である。このゲージでは、光子のプロパゲーターはスカラー場のそれと同じく、単純極のものである。しかし、理論的に最も自然なのは、ローレンツ条件が量子論的にも成立している $\alpha = 0$ のゲージである。このゲージは、L. D. Landau とその協力者が初めて用いたので、ランダウ・ゲージと呼ばれるが、彼らはファインマン・ゲージを、S 行列はゲージに依らないからと、手でランダウ・ゲージにすり替えた。共変的横波射影因子 $\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ とスカラー粒子的プロパゲーターは、ともに質量ゼロの極 $\frac{1}{k^2}$ を持つにもかかわらず、後者の分母のみがファインマンの無限小虚部 $-i\epsilon$ $(\epsilon \to +0)$ を持つものと考えられていた。これは、明らかに数学的におかしなことである。2 つの質量ゼロの極の積は、2 重極でなければならない。

ランダウ・ゲージでの電磁場の量子論は、作用積分から出発して定式化されなければならない。私は、プロパゲーターが 2 重極を持つためには、双極子ゴーストの理論が必要であることに気付いた。後述するように、双極子ゴーストは、最初 W. Heisenberg が全く別な目的のためにリー模型において導入した概念である。1965 年 11 月、私は、上のような考察に基づき、ランダウ・ゲージでの電磁場の共変的量子論の定式化を行なった [44](1966 年)。ここで、縦波成分と組み合わさって双極子ゴーストを生成する相棒として、私は新たに B という質量ゼロのスカラー場を導入し、その自由場の作用積分を仮定した。しかし、この理論を一般の α ゲージに拡張して正準量子化したとき、この項は余分なものであることが分かった [49]。実際、後藤鉄男らは、B をたんにローレンツ条件のラグランジュ未定係数のような形で導入すれば、B の自由場の方程式が出てくることを指摘した。後になって私は、このような未定係数場は、以前に内山龍雄、そして J. Schwinger によって導入されていたものであることを知った。なお、B 場形式では、グプタの補助条件は、B の正エネルギー部分を用いて $B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle = 0$ と書ける。

1967 年、B. Lautrup は、B 場の理論を精緻な形で展開した。*19 しかしながら、不幸にして、彼は双極子ゴーストの重要性を全く認識していなかった。彼は α ゲージの枠内で、α の値を任意に変換できるとした。しかし私は、この変換は必然的に理論のローレンツ共変性を壊してしまうことに注意した [78]。この指摘に基づき、横山寛一はゲージオン形式を提起した。彼は「ゲージオン」と呼ぶ双極子ゴーストのスカラー場を新たに導入し、それによって共変的にゲージ変換が行なえるようにしたのである。なお、B 場形式は、しばしば「中西・ロートラップ形式」とも呼ばれる。後に、岩波の雑誌「科学」の 50 周年記念号において、この B 場形式の研究は、1931 年から 1975 年に日本においてなされた重要な科学研究の 1 つに選ばれた。

Heisenberg は 1950 年代、非線形統一場理論を提起し精力的に研究していたが、物理的 S 行列のユニタリー性を証明するために、双極子ゴーストを使うことを考えていた。彼によれば、もしも初期状態が固有状態であれば、双極子ゴーストは全ハミルトニアンの固有状態ではないから、終状態に現われるはずはないということであった。そして、R. Ascoli と E. Minardi によって、この命題の「証明」も与えられた。他方、K. L. Nagy は、リー模型を少し変形した模型で、この「定理」に矛盾する結果を得たが、不幸にして彼はその真の理由を見出すことができなかった。1970 年、私はこの結果を詳しく分析し、パラドックスを完全に解決した [67]。私の決定的な観察は次の通りである。「双極子ゴーストの概念は、離散的固有値の場合にのみ明確な意味を持つ。散乱状態のような連続スペクトルの場合には、部分積分のような手段が使えるため、固有状態と双極子ゴース

*19 彼によると、この仕事の口頭発表は 1965 年に行なった由である。

ト状態が必ずしも一次独立にならない。」従って、ハイゼンベルクの統一場理論は破棄されなければならないことになる。

1971 年、私はランダウ・ゲージの電磁場の B 場形式を質量のある中性ベクトル場の場合へ拡張した [71]。プロカ形式と対照的に、この形式は質量ゼロの極限がスムーズにとれる。9 節で議論したコンスピラシーの素粒子版が実現されるのである。B 場の質量の平方は、ベクトル場のそれの α 倍であり、$\alpha = 1$ の場合を除き、$m^2 = 0$ において軌跡の衝突が起こるのである。ベクトル場の場合ももちろん補助条件の式は同じだから、$B^{(+)}$ が定義できるためには、B は自由場でなくてはならない。従って、このままでは荷電ベクトル場に拡張することはできない。

この中性ベクトル場の B 場形式はジョンソンの定理の困難を解決した。ジョンソンの定理とは、「ベクトル粒子の物理的質量は、そのはだかの質量をゼロにする極限でゼロになる」というものであるが、K. Johnson はこれをプロカ形式を用いて証明したので、J. Schwinger によって質量ゼロの極限がとれないと批判された。B 場形式により正しく証明を行なうと、「はだかの質量がゼロでないときに保存カレントが質量ゼロの離散スペクトルを持たない」という条件を付加するならば、定理が成立することが分かった。1970 年代の初めワインバーグ-サラム模型の繰り込み可能性が証明されて、ゲージ粒子に質量を与えるヒッグス機構が一躍脚光を浴びた。しかし、ヒッグス機構の証明は、P. W. Higgs によるクーロン・ゲージでの直観的な証明しかなかった。この証明では、ゴールドストーンの定理との矛盾を非局所性のせいにして逃げていて、共変的な理論ではどうなるのか全く分からなかった。私は、B 場形式を用いてヒッグス機構を共変的に定式化することに成功した [76]。その結果、「南部-ゴールドストーン (NG) ボソンは、ゲージ場に食われてその縦波成分になる」というキャッチフレーズは誤解を招く表現で、正しくは次のように言うべきであることが分かった。「NG ボソンは存在するが非物理的であり、非物理的だった縦波成分が物理的になる。」つまり自発的対称性の破れのある場合でも、補助条件の存在は極めて本質的である。このようにして、ヒッグス機構とゴールドストーンの定理との整合性が明瞭になった。同時に、NG ボソンという質量ゼロのスペクトルの存在により、ジョンソンの定理とヒッグス機構との矛盾も解消した。

1970 年、Y. Freundlich と D. Lurié は、ダイナミカルなヒッグス機構の例として、ゲージ化した南部-ヨナラシニオ模型の鎖近似の BS 方程式を用いて、カイラルゲージ不変性の自発的破れを解析した。彼らの結論は、NG ボソンは存在しないというものであった。A. Aurilia と高橋康と梅沢博臣は彼らの結論を批判したが、共変的な NG モードの存在を示すことができなかった。私はゲージ化した南部-ヨナラシニオ模型にヒッグス機構の B 場による定式化を適用して、このパズルを解決した [80][C2]。NG ボソンは、共変的理論ではちゃんと存在する

のである。

このような議論においては、漸近場が重要な役割を演ずる。双極子ゴーストがある場合の漸近場の理論は構成されていなかったので、私は α ゲージでの電磁場のレーマン-シマンツィック-チンマーマン（LSZ）形式を構成した [85]。

ヒッグス模型において NG ボソンは、ランダウ・ゲージの場合を除き、双極子ゴーストになる。私は論文 [76] の定式化を、共変的に非ランダウ・ゲージの場合に拡張した [87]。私は横山の論文の審査をしていて彼の論文の誤りを見つけ、それを訂正した論文を彼と共著の形で書いたが、そのさいゲージ化した南部-ヨナラシニオ模型の鎖近似の BS 方程式においてもまた、NG ボソンは一般に双極子ゴーストになることを明らかにした [89]。

ヒッグス模型に質量項をつけ加えたものをプレ・ヒッグス模型という。この模型では NG ボソンは物理的であるが、そのスムーズなゼロ質量極限であるヒッグス模型では、それは非物理的になっている。物理的と非物理的は、補助条件という等式が成立するかしないかによるのだが、等式の極限が不等式になるということはありえないので、このことは一見極めて奇妙である。私は、大学院生の小野上雅彦と共同でこの問題を調べた [91]。その理由は、コンスピラシーによる場の再調整が起こっているからであった。

1977 年、宮沢弘成は、クォーク・反クォーク間の「閉じ込めポテンシャル」と呼ばれる距離に比例するポテンシャルは、グルーオンが双極子ゴースト型のプロパゲーターを持てば自然に出てくることを指摘した。そこで私は、ゲージ場が双極子ゴーストであるような場の量子論を構成した [105]。

B 場形式では、正準量子化において B は正準変数として採用しない。量子重力の例を使ってであるが、私は、もし正準変数として採用しない場を B 以外の場とした場合、非常におかしな理論が得られることに気付いた [135]。しかしながら、この指摘はナンセンスであった。九後汰一郎（太一）は、B 場形式の量子化は、ラグランジァンが B 場の時間微分を含まないという、例外的にラッキーな状況においてのみ正しいことを明らかにしたのである。彼は、拘束系に対するディラック量子化の一般論を用いてこのことを示した。

不定計量の場の量子論のレヴィユーは、[78] [B2] と [B5] の第 2 章。

11　複素ゴーストの場の量子論

1969 年 9 月から 1971 年 8 月、私は、今度は出張という形でだが、再びブルックヘヴン研究所の応用数学部にいた。1970 年 5 月 13 日、物理学部で、T. D. Lee は ‘Finite theory of QED’ というタイトルでの講演を行なった。これは、彼と G. C. Wick との共著論文の紹介であるが、Wick はこの仕事に関して一切何も言わない。Lee の主張するところによれば、もし複素ゴーストを正則化に利用す

れば、物理的S行列のユニタリー性を損なうことなく、QEDのすべての発散を除去することが可能であるというのである。W. Heisenbergの双極子ゴースト理論以来、W. Pauliなど多くの研究者が複素ゴーストについて研究した。彼らの得た結論は次のようなものであった。「エネルギー保存則のため、複素ゴーストは単独で終状態に現れることはできないが、複素ゴーストとその共役複素ゴーストとの対での生成は禁止できないので、物理的ユニタリー性は破れる。」しかしながら、これは非相対論的模型で行なわれた結果であった。Leeは、もし相対論的に定式化すれば、複素ゴースト対は現われないと主張したのである。

Leeの主張は納得できないものだったので、私はLeeとWick (LW)の論文を詳細に検討した。Mを複素質量、$\vec{p}$を系の空間運動量、$\vec{q}$を相対空間運動量とするとき、複素ゴースト対の相対論的エネルギーは、

$$E = \sqrt{M^2 + \vec{q}^{\,2}} + \sqrt{M^{*2} + (\vec{p} - \vec{q})^2}$$

で与えられる。$\vec{q}$が3次元空間全体を動くとき、Eは実軸上の区間$E \geqq M + M^*$のみならず、それを含む或る2次元の領域Dを掃く。それゆえ、非相対論的な場合に存在した中間状態のエネルギーに対応する実軸上のカットは存在しないことになる。つまり、Leeの主張通り、ユニタリー性は破れていない。しかし、私は、LW理論は深刻な別の欠陥を持っていることに気付いた。領域Dの境界が実軸と交わるのはただ1点であるが、その点の座標は

$$b = \Re\sqrt{4M^2 + \vec{p}^{\,2}}$$

で与えられる。そして、$b^2 - \vec{p}^{\,2}$はローレンツ不変量ではない。すなわち、複素ゴースト対を中間状態に持つ自己エネルギーのファインマン振幅は、ローレンツ変換によってその特異点の位置が変わるので、ローレンツ不変ではありえない。従って、LW理論は、ユニタリー性を損なうことなく発散の除去に成功したが、ローレンツ不変性を犠牲にしていたということになる。[*20] 私はこの仕事を*PR*に投稿した[65]。C. N. YangはLeeと不仲であったが、私の論文のプレプリントを見ると、直ちに私に彼の居るストーニーブルックのニューヨーク州立大学での講演を依頼してきた。またブルックヘヴンの物理学部からの講演依頼もあった。

私の論文のレフェリーは、匿名ではあったが、明らかにLee自身であった。彼は何とかして私の論文を没にしようとしたが、さいわい*PR*の編集員のPasternackは公平な立場を貫いてくれた。彼は、私の論文を載せるが、*PR*の同じ号にLeeの反論のコメントも載せるということにした。Leeは、そのコメントにおいて、ローレンツ不変性の破れの事実には同意したが、そのことは、Mを

[*20] 後に、E. C. G. **Sudarshan**らは、この自己エネルギーの積分を遂行し、ローレンツ不変でない項の具体的表式を与えた。

複素数にしたのに $\vec{p}$ を実数に保ったままにしたのだから当然であり、*21 それゆえ $\vec{p}$ も複素数にすべきだと主張した。そして、驚くべきことに、彼は LW 理論の定式化を捨て、R. E. Cutkosky らによって提起されていた S 行列理論的な複素ゴースト理論を採用するのだという。彼らの理論では、ファインマン積分の 4 次元運動量の積分路は複素領域に自由に変形できるものとしている。しかしながら、$\vec{p}$ が実数であることは、フォック空間を不定計量のヒルベルト空間として構成するための基本的に重要な要件である。もし $\vec{p}$ が実数であるという前提を放棄すれば、理論はもはや通常の場の量子論ではなくなり、全 S 行列の擬ユニタリー性は保証されなくなる。私のこの反論は 4 ヶ月後に掲載されたが [68]、Lee の答えは次のようなものであった。「Cutkosky らによる理論が場の量子論から決して導かれないという証明がないから、この複素ゴーストの定式化が場の理論的でないとはいえない。」明らかに、立証責任がどちらにあるのかを取り違えている。

LW 理論はローレンツ不変性を破っているが、ユニタリー性を壊していないことは極めて注目すべき結果である。もし超高エネルギーにおいてローレンツ不変性が破れているようなことがあるものとすれば、*22 このような自発的な不変性の破れは、手でローレンツ不変性を破るような定式化よりも好ましいものと考えられる。私は、あらわに複素質量を導入することなしに、明白にローレンツ共変であるような複素ゴーストの場の量子論を構成し、それが LW 理論と同等であることを示した [72]。複素質量の粒子がある場合、ダイソンの S 行列は通常の指数関数的な断熱因子を用いたのでは定義できない。すなわち、断熱因子としてガウシアンのようなものを使うことが必要である。このようにして S 行列を定義すると、複素ゴースト対を中間状態に持つ自己エネルギーのファインマン積分の計算で、私が 1958 年不安定粒子の固有状態を構成するために導入した「複素超関数」(§3 参照) の概念が、自然に現われることが分かった。この事実から、ローレンツ不変性の自発的破れの機構が明白になった。私はこの理論形式は Lee を満足させるかもと期待したが、彼はローレンツ不変性にかたくなに固執した。後に、私は、クォークの閉じ込め機構の可能な模型として、この複素ゴースト理論を使えるかもしれないことを指摘した [88]。

12 ヴェネチアーノ振幅の樹木グラフ分解

双対共鳴模型は、1968 年、G. Veneziano によって提起された。ヴェネチアーノ振幅は、作用積分も運動方程式も書くことなしに、樹木グラフ解析性、レッジェ軌跡の線形性、双対性、交差対称性に基づいて、直接構成された。

*21 この推論は正しくない。実際、複素質量の代わりに実数値の非対角質量行列を導入しても、複素ゴーストの明白にローレンツ不変な作用積分を書き下すことができる（後述）。

*22 実際その当時、実験的にそのような可能性が示唆されていた。

1970年、私はブルックヘヴンに居たが、何か面白いトピックスはないかなと探していたとき、松田哲の論文が目についた。彼は、分散式にいくつかの仮定をつけ加えることにより、4点ヴェネチアーノ的振幅が導かれることを示していた。私のヴェネチアーノ振幅に関する仕事は、彼の解析をより弱い条件のもとで、5点関数の場合に拡張することから始まった [61]。話を6点関数へと進めているうちに、問題の本質は分散式を使うことではなしに、ヴェネチアーノ振幅を交差対称性を保つようにしながら、樹木グラフのファインマン的振幅の和に分解することであるという認識に達した [63]。

外線の円順列 $i = 1, 2, ..., n$ に対する n 点ヴェネチアーノ振幅 V は、標準表示で、

$$V = \int_0^1 dv_1 \ldots \int_0^1 dv_{n-3}\, h \prod_P u_P^{-\alpha_P - 1}$$

と書かれる。ここに P はチャンネル（$=n$ 本の外線の集合を、その円順列的継続性を保持したまま、2つの空でない部分集合 P_+ と P_- にわけること）、α_P はチャンネル P の線形なレッジェ軌跡、h と u_P は積分変数 v_i の関数で、h は或るウェイト、u_P は連立非線形代数方程式

$$u_P = 1 - \prod_{\overline{P}} u_{\overline{P}}$$

の解である。ここに、$\overline{P}$ は P とクロスする (すなわち、$\overline{P}_+$ と $\overline{P}_-$ のどちらもが P_+ と P_- のどちらとも空でない共通部分を持つ) ようなチャンネルを表わす。この連立方程式のあらわな解は、次のように与えられる。「$n-3$ 本の内線が直線状に並び、$n-2$ 本の円順列的に継続した外線がその直線の一方側に描けるような、ϕ^3 理論の n 点関数に現われる樹木グラフを、マルチペリフェラル・グラフと呼ぶ。1つのマルチペリフェラル・グラフを考え、それの内線 i を切断すると、自然にチャンネル P_i が定義される。$v_i = u_{P_i}$ とおく。そうすると、他のすべての u_P は、$1 - \prod v_i$（ただし i は $\{1, 2, ..., n\}$ の円順列的に継続した或る部分集合にわたる）のような形の4つの因子で書ける分数式、h は或る u_P の積である。」

私の仕事は、V の「交差対称分解」

$$V = \sum_T F_T$$

を構成することである。ここに、T は ϕ^3 理論の n 点関数に現われる樹木グラフで、F_T はその特異点構造が T に対するファインマン振幅の持つ極と完全に同じであるようなファインマン的振幅である。各内線 i は、その2つの端点で2本の内線または外線と隣り合う。これら隣接の4本の線の円順列的順序を保ったまま、i の端点における接続の仕方を変更するのは一意的であって、この操作を i に関する「双対変換」と呼び、σ_i と書くことにする。任意の樹木 T に対し、$\sigma_i T$

は別な樹木であり、σ_i と σ_j は、i と j が隣り合わないとき、そのときに限り可換である。F_T の双対変換 $\sigma_i(F_T)$ を、それが $F_{\sigma_i T}$ に一致するように定義する。その変換は、積分変数の双有理変換で与えられ、V を不変に保つことが証明できる[64]。この定理の系として、任意の樹木 T に対応する V の表式が存在することが分かる。この表式では、u_P はすべて積分変数 v_i の有理関数で、積分領域は、マルチペリフェラル・グラフ以外では $n-3$ 次元単位超立方体ではなく、いくつかの $n-4$ 次元超平面によって囲まれた、超立方体を内部に含む領域になる。

もしたんに双対変換不変な V の分解の可能性を示すだけならば、標準表示でなく、V の木庭-ニールセン表示を用いる方がずっと見通しがよい。この表示では、円上に並ぶ n 個の複素変数 z_i を用い、u_P をすべてそれらの複比として表わす。私は、木庭-ニールセン表示に基づく V の交差対称分解も証明した [66]。1972 年、米谷民明は、この結果をオペレーター形式を用いてループ・グラフの場合に拡張した。

1971 年 J. Scherk は、双対共鳴模型（樹木グラフのレベルで）は、レッジェ軌跡のゼロスロープ極限 $\alpha' \to 0$ において ϕ^3 理論に一致すると主張した。しかしながら、彼は双対変換の非可換性に起因する問題を看過していて、1 つのヴェネチアーノ振幅 V に対応する樹木グラフのファインマン振幅の数を 2^{n-3} としていた。これは明らかに誤りである [74]。その正しい数は、

$$\frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$$

であって、凸 n 角形の三角形分割の仕方の数に等しい。Scherk の命題の正しい証明は、私の交差対称分解定理から直ちに従がう。Scherk はこの指摘に同意した。ゼロスロープ極限の話は、米谷によって拡張された。この話は、超弦理論の弦長ゼロ極限が超重力であるというところまで進展する。

後に、米谷の仕事は非常に注目されるようになったが、私の仕事の方はどうやら忘れられたようである。しかし、私は、V の被積分関数に対する双対変換の双有理性は、非常に興味ある結果だと信じている。私がこの研究をやっていた当時、あまり計算がきれいにいくので、すっかり夢中になっていたのを記憶する。しかしながら、*PR* に投稿した論文 [64] は、F_T の漸近的振る舞いがレッジェ的でなく指数関数的だというつまらない理由で、論文 [63] にまで遡って没にされてしまった。これらは、私の帰国後、*PTP* に掲載された。

13 複素次元不変特異関数

1970 年、ファインマン積分に関する本 [B1]（§8 参照）を書いていたとき、私は、ファインマン・パラメーター積分公式においては時空の次元数を容易に複素数値に解析接続できることに気付いていた。しかしその当時、そうしてもとく

有益であるとは思えなかったので、その事を指摘しないまま本を発行してしまった。[E. P. Speer の正則化法（複素冪のプロパゲーター）は取り入れた。]

1972 年、G. 't Hooft と M. Veltman は、複素次元による正則化の方法を提起した。この方法はゲージ不変性を保つ正則化として有効であるとされたが、元のファインマン積分の複素次元化は、数学的に明らかなものとはいえなかった。

1975 年、私は n 次元不変特異関数 $\Delta_n(x; m^2)$ と $\Delta_n^{(1)}(x; m^2)$ 及びその虚数質量の場合の複素次元への拡張を、複素 n 次元フーリエ変換を定義することによって定義し、その積分をあらわに計算した [90]。n の複素数値への拡張は、カールソンの一意性定理の条件が満たされないので、自動的にはいかない。*23 これらの式を用いて次元正則化を行い、それらの積 $[\Delta(x; m^2)]^2$ と $[\Delta^{(1)}(x; m^2)]^2$ と $\Delta(x; m^2)\Delta^{(1)}(x; m^2)$ の 4 次元不変特異関数としての表式を与えた。この計算は、ベッセル関数と変形ベッセル関数に関するいろいろな公式を縦横に使いこなした、すごく面倒な演習問題であった。

引き続き私は、一般の複素次元ローレンツ不変積分の定義とそのローレンツ共変な場合への拡張を論ずる論文を書いた [プレプリント RIMS-196][C4]。抽象的な背景時空は、真の無限次元空間というよりは、不定次元空間という形で理解されるべきものである。この論文は前論文に続いて *CMP* に投稿したが、混んでいるからとかで、編集員の荒木不二洋により没にされた。彼はローレンツ不変性のより簡単な証明を示した。

14 ナル平面量子化

「ナル平面」とは、光錐に接する 3 次元平面のことである。「ナル平面量子化」とは、ナル平面に垂直な方向を「時間」とするような量子化のことである。従って、「時間」は時間的ではなく光錐的である。1975 年頃から、ナル平面量子化は多くの人を惹きつけたが、その理由は、相互作用があってもハイゼンベルク描像において創生消滅演算子が存在すると信じられていたからである。その根拠は次の通りである。「ナル平面エネルギー $P^- = (P^0 - P^3)/\sqrt{2}$ とナル平面運動量 $P^+ = (P^0 + P^3)/\sqrt{2}$ は、スペクトル条件 $P^\mu P_\mu \geqq 0$ と $P^0 \geqq 0$ により、ともに非負である。従って、運動量保存則により真空偏極は禁止され、真の真空ははだかの真空と一致する。」

矢吹治一は、この命題はハーグの定理と矛盾するのではないかという疑問を、私のところへもってきた。ハーグの定理はもちろん通常の量子化の枠組みで定式化されているから、その証明をナル平面量子化の場合に拡張してみた。そうすると、2 次元の場合を除き、やはり上の命題はハーグの定理と矛盾していること

*23 レヴィユー誌 *MR* に書かれたコメントでは、Gel'fand-Shilov の本に与えられているという指摘がなされているが、それは n が正の整数の場合である。

が分かった。そこで、彼と私はこの問題を共同研究することになった [97]。

創生消滅演算子を用いて書かれる、等ナル平面時刻 $x^+ = y^+$ における 2 点ワイトマン関数の表式は、理論の詳細に一切無関係な極めて簡単な式である。これがナル平面量子化の簡単さの源であると同時に、その理論的困難の原因でもあった。この式は、質量 m にさえ依存していないので、ハーグの定理との矛盾の原因を探るには、自由場の 2 点ワイトマン関数 $\Delta^{(+)}(x-y;m^2)$ の $x^+ = y^+$ 近傍における振る舞いを調べれば十分である。われわれは、それを 3 次元運動量積分の形に書いたとき、被積分関数が $p^+ = 0$ の近傍で無限に振動し、そのため p^+ について積分することと、$x^+ = y^+$ と置くこととが非可換であることを見つけた。すなわち、2 点関数の等ナル平面時刻極限は、きちんと定義できないわけである。もし敢えてそれをしたければ、$x^+ - y^+$ を $x^+ - y^+ - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ に置き換えればよい。

1976 年の終わり、私はナル平面量子化に関して、今度は山脇幸一と共同研究を行なった [98]。彼はこの仕事に先立って、益川敏英との共同研究で、x^- 方向が有限の長さに限られている場合のナル平面量子化を定式化していた。この場合は P^+ 方向が離散化され、$P^+ = 0$ モードが完全に分離できるので、コンシステントにナル平面量子化がやれるのである。x^- 方向が無限に長い場合は、トラブルは $P^+ = 0$ の近傍から来るので、ゼロモードの 1 点だけを分離しても無意味である。一般に、ローレンツ不変性を破ることなしに、ナル平面量子化をコンシステントに遂行することは不可能であることを証明した。そこでわれわれは、コンシステントな理論を構成するために、新たなパラメーター ν を導入し、$P^+ = 0$ の近傍を正則化した。こうして定式化された理論を「ν 理論」と呼んだ。ローレンツ不変性は $\nu \to 0$ の極限で回復される。

このような困難のため、ナル平面量子化はすたれた。しかし、1990 年代になってからまた「ライトフロント量子化」という名前で復活したようである。

15　2 次元時空での場の量子論

私が 2 次元時空での場の量子論の研究を始める動機となったのは、伊東恵一の仕事である。1975 年、彼は、私が展開したヒッグス機構の B 場形式による定式化（§10 参照）を 2 次元の質量ゼロの QED であるシュウィンガー模型に適用し、いわゆる「シュウィンガー機構」はダイナミカルなヒッグス機構の特殊の場合に過ぎないことを明らかにした。それで私は、シュウィンガー模型でも非ランダウ・ゲージにおいて双極子ゴーストが現われることを示した [87]。数理解析研究所での 1976 年度の大学院の講義に、B. Klaiber の 2 次元場の量子論のブールダー講義録を使ったが、この講義録はその後の私の研究に大変役立った。

2 次元の質量ゼロのスカラー場 $\phi(x)$ に対して、その 2 点ワイトマン関数は、赤外発散のために通常の定義が使えない。そこで、Klaiber は、赤外発散をカッ

トオフした 2 次元の $D^{(+)}$ 関数を次のように定義した。

$$D^{(+)}(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dp^1 (2p^0)^{-1}[e^{-ipx} - \theta(\kappa - p^0)], \quad (p^0 = |p^1|)$$

ここに $\kappa\ (>0)$ は、カットオフ・パラメーターである。しかし、この関数は正型（＝フーリエ変換が正定値）ではないから、状態ベクトル空間の計量の正値性とは矛盾する。計量の正値性にかたくななまでこだわった Klaiber は、オペレーターレベルではこの式を用いず、理論の並進不変性を犠牲にした。これに対し A. S. Wightman は、赤外発散を除去するのに、テスト関数を $p^0 = 0$ でゼロになるものに制限した。*24 しかしこの制限条件は、フーリエ変換すると非局所的な条件式となり、超関数の基本的性質である局所化可能性を壊してしまう。私は、赤外発散の問題は、不定計量の場の量子論の枠組みで扱うのが最も合理的であると考えた。BS 方程式でも、ゲージ理論でも、不定計量の導入はほとんど不可避だからである。

私の仕事の出発点は、$\phi(x)$ の正エネルギー部分を

$$\phi^{(+)}(x) = -i\int_{-\infty}^{\infty} dz^1 D^{(+)}(x-z)\overleftrightarrow{\partial}{}_0^z\phi(z)$$

によって定義することであった。ここに、$A\overleftrightarrow{\partial}B \equiv (\partial A)B - A\partial B$。運動量空間を導入しないのが、私の考え方のキーポイントである。$\phi^{(+)}(x)$ のゼロモードは負ノルムを持つので、QED の場合と同じく、物理的部分空間を補助条件 $\Phi^{(+)}|\mathrm{phys}\rangle = 0$ によって定義した。ここに、

$$\Phi^{(+)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx^1\partial_0\phi^{(+)}(x)$$

は、保存量である。このようにして、私は 2 次元の自由な質量ゼロのスカラー場の量子論を定式化することに成功した [92][96]。

2 次元理論では、$\phi(x)$ の「共役場」$\tilde{\phi}(x)$ を導入することが重要である。それは連立偏微分方程式

$$\partial_\mu\phi + \epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi} = 0$$

を満足するものとして定義される。この方程式系は $\phi(x)$ と $\tilde{\phi}(x)$ について対称なので、多くの著者が両者を同じレベルの基本な場とみなした。しかし、作用積分やハミルトニアンの存在を諦めるのでない限り、基礎場は $\phi(x)$ のみであり、$\tilde{\phi}(x)$ は $\phi(x)$ によって、定数の演算子を除いて決定される非局所場でなければならない。しかもそれは、混合 2 点関数 $\langle\phi\tilde{\phi}\rangle$ を計算すれば分かるように、ローレンツ・スカラーではありえない。

*24 彼が Klaiber の式がローレンツ不変でないと誤解していたことを、彼との直接の議論で知った。

1975年、S. Coleman、そしてS. Mandelstamは、質量のあるチリング模型において、「ボソン化」と呼ばれる、スカラー場とディラック場との間の場の量子論的同等性を確立した。2次元の質量ゼロのディラック場 $\psi(x)$ は、赤外発散を持たないので、不定計量なしに量子化できる。カレント $\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$ が const$\partial_\mu\phi$ と同定できるという事実は、すでにKlaiberによって証明されていた。Mandelstamは、質量がある場合についてであるが、逆に ψ が ϕ と $\tilde{\phi}$ の指数関数によって与えられることを示した。ϕ は1成分の場であるのに対し、ψ は2成分の場であるから、場の自由度に関してミスマッチが生じている。それにもかかわらず、両者の演算子としての性質は一致してるのである。

「漸近的完全性」は、漸近状態がハイゼンベルク場の既約表現を与える状態空間の完全系をなしているという要請である。この要請なしには、ゲージ理論のS行列の擬ユニタリー性を証明することはできない。従って、私は当時、漸近的完全性の要請は場の演算子の表現を一意的に決定するための基本原理として、非常に重要であることを強調していた。J. H. LowensteinとJ. A. Swiecaは、ランダウ・ゲージでの（質量ゼロの）シュウィンガー模型の演算子解（LS解）を、手で導入した自由ディラック場 ψ_0 を用いて構成した。しかしながら、ψ_0 は系の離散スペクトルに対応していないので、漸近場ではありえない。漸近場でない自由場を用いて構成された解は、もちろん漸近的完全性の要請を満たさない。そこで私は、Mandelstamのボソン化の式を質量ゼロの場合に適用し、ψ_0 を ϕ と $\tilde{\phi}$ とで表わした。こうする事によって、漸近的完全性の要請が満たされるようになっただけでなく、LS解がランダウ・ゲージでしか存在しないのに対し、*25 一般の α ゲージの場合にも正しい解の表式を得た。私はこのようにして、私の質量ゼロのスカラー場の理論を基礎に、漸近的完全性の要請を満たすチリング模型の解とシュウィンガー模型の解とを構成することに成功したのである [93][94]。しかし、自由度のミスマッチの問題は、非常に基本的な問題であることが次第に明らかとなってくる。

ψ_0 を用いなかったので、私の解はもはやディラック場の相変換に対して不変ではなくなった。従って、ψ の数と $\overline{\psi}$ の数が異なるようなワイトマン関数もゼロにはならず、相変換の不変性は自発的に破れていることになる。この結果は「2次元時空では、連続的対称性は自発的に破れない」というコールマンの定理と矛盾しているようにみえる。しかしこの定理は、計量の正定値性を仮定しているので、不定計量の理論には適用できない。他方、ψ の真空期待値がゼロでないという事実は、ψ とローレンツ生成子との交換関係が通常のものではありえないことを意味する。このことは、柏太郎によって指摘された。正しい交換関係は、表現の既約性を使うことによって計算できた。私は、交換関係のスピン項が $\Phi^{(\pm)}$ を含むことを見つけた [99]。

*25 Colemanは私との文通で、LS解が非ランダウ・ゲージでも使えると誤解していたことを認めた。

スカラー場 ϕ がディラック場 ψ とベクトル結合する理論は、何次元でも正確に解けるのは周知である。特に 2 次元では、紫外発散がないので厳密に取り扱える。B. Schroer は、ϕ の質量ゼロが場合を考え、ディラック場（質量はゼロでない）ψ の 2 点関数が、QED の電子と同じく、離散スペクトルを持たないことを証明した。彼はそのような粒子を一般に「インフラ粒子」と呼んだ。しかし、彼の証明は計量の正定値性に本質的に依っている。もし私がやったように不定計量を用いるならば、ディラック場に対応する極の不存在は証明できない。私は、不定計量の状態空間は、はだかのディラック場に対応する離散スペクトルを含む、十分に大きな空間であることを見つけた。このことは、QED の場合、横山のゲージオン形式（§10 参照）に拡張することによって q 数ゲージ変換が可能となり、インフラ現象のないイェンニ・ゲージに移行できることと対応していると考えられる。

シュウィンガー模型のゲージ場に質量項をつけ加えた模型を、プレ・シュウィンガー模型という。私は、この模型の漸近場による解を構成し、以前に与えられていた解の不満足な点を解決した [100]。私は、シュウィンガー模型の LS 解を漸近場による解から再構築するには、表現の既約性を破る余分な定数演算子の導入が必要であることを指摘し、この自由度が生み出している彼らの「θ 真空」を批判した [101]。私はまた、質量のあるシュウィンガー模型すなわち 2 次元 QED を、漸近的完全性の立場から議論した [103]。この模型では、ゲージ不変性は自発的に破れているのに、ヒッグス機構は生じていない。S. Coleman と R. Jackiw と L. Susskind は、この模型を LS 解にディラック場の質量項をつけ加える方法で考察した。そのため、彼らのハミルトニアンは、θ 真空に相当する「スプーリオン」と呼ばれる場の演算子では表わせない定数演算子を含むこととなった。つまり特定の可約表現を採った後でまた演算子レベルに戻ったためにでてきた自由度である。私は Coleman に対して、彼らのハミルトニアンが θ 依存になったのは、たんに彼らが LS 解を用いたからであって、シュウィンガー模型の必然的結果ではないことを主張したが、QCD で θ 真空があって欲しいという願望があるからか、彼の同意は得られなかった。私はまた九後汰一郎と、ゲージ場の強さ F_{01} が質量ゼロのスペクトルを持つかどうかに関して議論したが、合意には至らなかった。

2 次元の質量ゼロのスカラー場 ϕ の、空間的な漸近的振る舞いは非常にたちが悪い。共役場 $\tilde{\phi}$ は、そのような ϕ を含む無限区間での積分で表わされるので、それの正エネルギー部分 $\tilde{\phi}^{(+)}$ の取り扱いは、極めて微妙な問題になる。1979 年、L. Hadjiivanov と D. T. Stoyanov の批判、そして九後と小嶋泉の批判に応えて、私は質量ゼロのスカラー場の不定計量理論を、より厳密な形で再定式化した [116]。不定計量理論においてはボルヒャースの定理が成り立たないことを具体的な反例によって示し、場の演算子の意味での既約性が状態ベクトルの意味で

の既約性（= cyclicity）と一致しないことを明らかにした。

その後、中脇雄治、H. Aratyn、鈴木恒雄など多くの著者が2次元の場の量子論に関するそれぞれの理論を提起する。中脇は長期にわたって2次元理論の研究を行い、私はそのほとんどの論文の審査を行なった。Aratynの理論は、ϕのゼロモードを避けて不定計量を使わないもので、ψはユニタリー非同値なヒルベルト空間をつなぐ写像とみなしていた。私は、1980年6月からほぼ3年間にわたり彼と手紙による議論をした。鈴木と溜池の理論は、空間を有限の長さLにしておいて量子化し、理論を構成してから$L \to \infty$をとるというものであった。*26 私は、1980年7月から約半年、鈴木と文通した。Aratynと鈴木は、私の2次元理論に対して非常に多くの批判をしたが、あまり有益なものはなかった。というのは、計算間違いに加えて、私の基本的な考え方を誤解していたからである。とくに、$\tilde{\phi}$が非局所量であり、そのような非局所量に対しては質量がゼロでない理論でも起きる問題を、彼らは不満足な事態とみなしていたからである。Aratynなど多くの著者は、数学的なコンシステンシーを無視してϕと$\tilde{\phi}$を同レベルの基礎場とみなし、保存量$\tilde{\Phi}$をΦと対等な権利をもつ存在とした。1982年、私は彼らの主張を批判する論文を書いた[127]。*27

2次元の場の量子論のレヴィユーは、[B5]の第2章5節とプレプリントRIMS-252。

3次元の場の量子論　1988年、私は、漸近的完全性の立場から、チャーン-サイモンズ項を持つ3次元ゲージ理論を研究した[154]。*28 2次元理論の場合と同様に、3次元の意味での共役場の存在が重要になる。ゲージ場が質量を獲得する機構は、ヒッグス機構とみなせるが、自発的に破れたゲージ対称性の生成子は、ハイゼンベルク演算子で書くとトポロジカルなもの（=表面積分のみで書けるもの）なので、私は「トポロジカル・ヒッグス機構」と呼んだ。

16　非可換ゲージ理論

§10で述べたように、1970年代、私は、B場形式に基づきベクトル場とヒッグス機構に関する詳し解析を行なったが、すべて可換ゲージ場に関するものであった。これを非可換ゲージ場、すなわち、ヤン-ミルズ場の場合に拡張することは、非常に重要であった。私はこの問題を議論したが、B場が自由場でない場合、補

---

*26 この種の構成に対しては、益川敏英の次のような批判がある。「この極限過程が最終段階以外でも用いられるならば、結果はどの段階で極限操作がなされたかに依存する。」

*27 2003年、A. IvanovとのEメール交信で、私は、G. MorchioとD. PierottiとF.Strocchiが、ϕと$\tilde{\phi}$とを対等な立場で取り扱う厳密な理論を、1991年に構成したことを知った。1自由度を外からつけ加える不定計量ワイトマン形式に基づくもので、もちろん作用積分やハミルトニアンは存在しない。

*28 この理論に関するM. Flatoらの仕事では負ノルムはないとされているが、それは彼らが双極子ゴーストの自由度を見落としていたからである。

助条件をコンシステントに設定することはできなかった [71]。私は数理解析研究所の大学院セミナーでこのことの重要性を強調したが、到底すぐには解決できるとは思っていなかった。ところが、1977 年 8 月、私のセミナーに参加していた院生の九後汰一郎と小嶋泉によってこの問題がみごとに解決されたことを聞いて、大いに驚かされた。解決へのキーは、ベッキ-ルーエ-ストラ (BRS) 対称性であった。非可換ゲージ理論に対する補助条件は、BRS 対称性の生成子 Q_B を使って、簡単に書けるのである。1975 年頃に C. Becchi と A. Rouet と R. Stora によって提起されていた BRS 対称性について、全く気づかなかったのはうかつであった。九後と小嶋は、可換ゲージ理論の場合に確立していた諸結果を、非可換ゲージ理論の B 場形式の場合に拡張していった。しかし、九後-小嶋 (KO) の補助条件 $Q_B|\mathrm{phys}\rangle = 0$ が、[*29] 非可換は可換より複雑なはずなのに、可換の場合のグプタの補助条件 $B^{(+)}(x)|\mathrm{phys}\rangle = 0$ よりずっと簡単な式なのは、不思議であった。私は、可換ゲージ理論の場合にはあってもないのと同じであるファデエフ-ポポフ (FP) ゴーストが、実際に不存在であるという条件を KO 条件につけ加えれば、グプタの条件が導かれることに気付いて合点がいった。

物理的 S 行列のユニタリー性の九後-小嶋のハイゼンベルク描像での証明において、「BRS シングレット対」に起因する厄介な問題があった。$Q_B^2 = 0$ であるから、すべての状態は Q_B のダブレットかシングレットかに属する。すべての BRS ダブレットはつねに対で現われるが、それらは、ゲージ自由度に相当するゼロノルムの BRS 完全な状態（＝ある状態に Q_B を作用させて得られるような状態）を除き、「KO カルテット機構」により物理的部分空間から排除される。BRS シングレットのうち FP ゴースト数ゼロの状態は、通常観測にかかる状態と考えられ、物理的に意味があると期待される理論では正ノルムの状態だけになっているはずである。FP ゴースト数がゼロでない BRS シングレットは、存在すれば必ず対で現われる。Q_C の固有値はすべて純虚数なので、その固有状態はゼロノルムであるが、対の状態では負ノルムの状態が構成できるので、トラブルが生ずるのである。1979 年、私は非可換ゲージ理論における BRS シングレット対の不存在の証明を与えた [115]。この証明のキーは、負の FP ゴースト数の担い手である FP 反ゴーストの BRS 変換が、B 場という簡単な式になることである。私はこの事実を用いて、負の FP ゴースト数を持ついかなる場の量の T 積も、BRS 不変なら BRS 完全であることを示した。[*30] 私の証明の最後のステップで極限操作が必要になるが、九後は、BRS シングレット対が BRS ダブレット対列の極限として現われるかも知れないと指摘した。1982 年、私は、BRS 完全な状態列の極限として BRS 完全でない状態が現われることはないという証明を

[*29] 彼らが提起したときは、さらに余分の条件 $Q_C|\mathrm{phys}\rangle = 0$ を課していた。ただし Q_C は FP ゴースト数生成子。

[*30] BRS 完全でない BRS 不変量をすべて見つける問題は、BRS コホモロジーにおいて重要である。私の仕事の後、九後と上原正三、そして M. Henneaux によって詳しく調べられた。

行い、九後の指摘する可能性を排除した。*31 ただし、2つのBRSダブレット列の混合の極限から現われる可能性までは否定できないが、それは強い位相を満足な形で導入できない不定計量の場の量子論では、禁止的に難しい問題である。

ゲージ固定プラスFPゴーストのラグランジァン密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ は、BRS不変ならばつねにBRS完全である。この命題はしばしば九後と上原の1982年の論文で発見されたように言われるが、私は彼らよりずっと前からこのことは知っていた。1978年3月、藤川和男は、KO定理の証明に使われる射影演算子のゴースト部分がBRS完全であることを指摘した。この事実に示唆されて、$\mathcal{L}_{\mathrm{GF+FP}}$ もつねにBRS完全になっていることに気づいたという記録が、1978年9月26日の日記にある。そして実際、1979年3月に投稿した量子重力の四脚場形式の論文[112]での局所ローレンツ部分において、この事実を当然のこととして書いた。*32

BRS定式化されたドドンデア・ゲージの量子アインシュタイン重力において、私は16次元ポアンカレ的超対称性を発見した(§17参照)。1980年、そこで用いたテクニックを応用して、ランダウ・ゲージの非可換ゲージ理論における超対称性を調べる仕事を、小嶋と共同で行なった[121]。リー代数の次元数を n とするとき、われわれの見つけた超代数の次元数は $4n+5$ である。そのうちの5個の生成子は、BRS生成子、反BRS生成子、FPゴースト数生成子、そして新たに発見した2つの生成子（FPゴースト数を ±2 変える）である。この5個から成る部分代数は、西島和彦によって「BRSNO代数」と呼ばれ、その表現が詳しく調べられた。

1984年、私はまた小嶋と共同で、QCDのカラー閉じ込め問題を、オーソドックスではない方法で論じた[134][136]。基本的アイデアは、KO条件に加えて、カラー電荷の不存在をも補助条件という形で実現しようというわけである。こうすれば、すべての物理的状態が全体として無色の状態であることは自明になる。ここでの真の問題は、カラーが局所的にも現れないかどうかということである。無色の状態は、リー代数の非可換性により、一般に1粒子漸近状態の単純積ではなく、それらの1次結合として表わされる状態である。つまりそれは、離れた場所に局所化したカラーのある状態の単純積には分解しない。従って、カラーのある状態は局所的にも観測できないと、われわれは結論した。われわれは、M. Flatoなどいろいろな人とこの考え方の正当性について議論した。青木健一と畑浩之は、われわれの理論の物理的部分空間がフォック的ではないことを指摘した。1個のクォークと1個の反クォークがマクロな距離を隔てて終状態に現れても、それを観測することは不可能である。*33 従って多重発生の過程にお

*31 証明は未発表だが、主要な点は論文[182]の脚注に述べた。
*32 非可換ゲージ場では、小嶋の1980年の論文にも述べられている。
*33 このような単体のクォークや反クォークが、ダークマターなのかも知れない。

いて、エクスクルーシーヴな反応断面積の総和が、インクルーシーヴな反応断面積の総和よりも小さくなるという事態が起りうることになる。この予言は原理的に実験的チェックが可能である。

よく知られているように、古典ゲージ理論の局所ゲージ変換は、量子ゲージ理論では全域的な変換であるBRS変換に置き換えられ、局所的な変換はもはや存在しない。しかし、可換ゲージ理論では、局所ゲージ変換は交換関係の形でその名残をとどめている。任意の局所量$\Phi(x)$に対し、交換関係

$$[\Phi(x), B(x)] = -i\mathcal{L}(\Phi)^x D(x-y)$$

が成立する。ここに、$\mathcal{L}(\Phi)$は、任意の無限小関数$\epsilon(x)$によって定義される局所ゲージ変換のもとで、$\Phi(x)$の古典的対応物が

$$\Phi(x) \to \Phi(x) + \mathcal{L}(\Phi)\epsilon(x)$$

のように変換されるような、場に依存する微分演算子である。私は、この交換関係を「局所ゲージ交換関係」と名付けた。私は、q数のD関数を導入することにより、局所ゲージ交換関係を量子重力の場合に拡張したが(§17参照)、1984年、そのアイデアをランダウ・ゲージの非可換ゲージ理論に適用し、院生の菅野浩明と共著として発表した[140]。私はさらにそれを、一般のゲージの場合に拡張した[139]。これらにおいて、B場はつねに「局所ゲージ変換の生成子」の役割を演ずる。

17　量子アインシュタイン重力

私が非可換ゲージ理論のKO形式について初めて聞いたのは、1977年8月26日のことである。そして9月20日には、小嶋泉はそれを量子重力に拡張する可能性を示唆した。それ以後約1ヶ月、私は、ハイゼンベルク描像における量子アインシュタイン重力をいかにBRS定式化したらよいかを精力的に研究した。その当時は、反可換性を持つBRS変換そのものがまだ何かうさんくさいもののように感じられていたから、BRS定式化が一般座標変換という内部対称性でない対称性を持つ重力場の場合に拡張できるものなのかどうか、極めて疑問であった。とくに私は最初から、スカラー場がBRS不変になるような形でBRS変換を定義しようと思っていたので、ゲージ場の場合とは質的な違いが存在した。実際、このようなBRS変換（後に「本質的BRS変換」と名付けた）は、必然的に微分演算子と非可換になる。私はあらゆる角度からコンシステンシーのチェックを行なった。こうして、1977年10月3日、とうとう私は正しい本質的BRS変換の式と、ドドンデア・ゲージにおけるBRS不変な重力場の作用積分、そしてそれに基づく不定計量の場の量子論を組織的に構成することに成功した。BRS化されたアインシュタイン方程式（後に「量子アインシュタイン方程

式」と呼ぶ）の共変微分をとると B 場 b_μ に対する方程式が得られるが、10 月 20 日、私はそれが（スカラー場的）共変ダランベール方程式という極めて美しい方程式になることを発見した。FP ゴースト c^μ や FP 反ゴースト $\bar{c}_\mu$ も同じ型の方程式を満足するだけでなく、ドドンデア・ゲージ条件そのものが、x^μ がこの型の方程式を満足することに他ならないのである。この驚くべく美しい結果に、私はこの理論が重力場の量子論として「本物」であると確信した。私は漸近場を計算し、KO 補助条件によって定義される物理的部分空間が非負計量をもつことを確かめてから、重力場の量子論の構成の論文を書いた [104]。これは "Indefinite-metric quantum field theory of general relativity" というタイトルの非常に長いシリーズの第 1 論文となった。*34 後に、私はこの理論を "Manifestly covariant canonical formalism of quantum gravity" と呼んだ。

私は、BRS 対称性は局所対称性に限られたものではなく、どんな連続的対称性に対しても定義できることに気付いた [107]。*35 12 月 14 日、その時ミュンヘンに居た九後汰一郎が、R. Delbourgo と M. R. Medrano やその他の人たちの定義した重力場に対する BRS 変換を使って、ハイゼンベルク描像での量子重力の定式化がコンシステントにやれるということを知らせてきた。そうして九後と小嶋の論文が現われたが、独立に西島和彦と大川正典も同様な量子重力理論を提起した。彼らの用いた BRS 変換は、もちろん微分演算子とは可換なものであるから、彼らの理論と私のとでは理論の構成が大分異なっていた。重力場のコンシステントな BRS 量子化が 2 つもあるのは奇妙なので、私は両方の BRS 変換を比較し、両者のラグランジァン密度の違いは、全微分項を除き、B 場の定義の違いに帰せられることを見いだした [106]。従って、両理論は完全に同等である。しかし、本質的 BRS 変換に基づいて構成した理論構成の方が、ずっと見通しのよい形をしている。内山龍雄の 1956 年の有名な論文以来、重力場は非可換ゲージ場に似ているというドグマが広く信じられており、私以外のすべての人はその線に沿って重力場の量子論を構成しようとしてきた。しかしながら、私は重力場はむしろ可換ゲージ場に似ていることを発見したのである。一般座標変換は、ローレンツ変換の拡張ではなく、並進の局所版である。そして、並進は可換群をなす。並進の可換性は、本質的 BRS 変換を用いることによってのみ、明白な形で量子重力に取り込める。*36 こうして一般相対論の美しさが重力場の量子論に継承されることになるのである。

1978 年 4 月から 6 月、私はドドンデア・ゲージ量子アインシュタイン重力の正準量子化を行ない、場の演算子間のすべての同時刻（反）交換関係を計算した

*34 1985 年まで、20 編の論文をすべて *PTP* に発表した。*PTP* に掲載したことにより、私は自分の見解をレフェリーの意見に煩わされることなく述べられたが、外国の研究者からはあまり注目されないという結果になったようである。

*35 このことは、数学ではリー代数のコホモロジーとしてよく知られていることだったようだ。

*36 FP ゴーストの本質的 BRS 変換は並進の可換性を反映してゼロになるが、通常の BRS 変換ではゼロにはならない。

[108]。この計算は非常に膨大なものであったが、すべての結果は閉じた形で求まった。*37 最終結果はつねに非常に美しい形をしていたので、他の人にチェックをしてもらわなくても結果が信頼できたのは、大変ありがたいことであった。6 月から 8 月、上の結果を用いてポアンカレ生成子間の交換関係をあらわに計算し、正しいものが得られることを確かめた [109]。1978 年 8 月、私は東京で開催された高エネルギー国際会議のプレナリー・トークとして、ハイゼンベルク描像でのゲージ場と重力場の量子論を紹介した [C5]。私は 9 月 5 日から 3 ヶ月間、ミュンヘンのマックス・プランク研究所を訪れたが、そこでは曲がった時空内での量子重力理論の研究を行なった [110]。

私は論文 [109] で、ドドンデア・ゲージのゲージ固定項は一般線形変換不変であることに注意した。このようなゲージ固定は、B 場形式を用いなくては出来ない。一般線形変換不変な c 数テンソルは存在しないので、$GL(4)$ は表現レベルで自発的に破れなければならない。$GL(4)$ の非ローレンツ部分に対応する NG ボソンは、重力子に他ならない。このことによって、重力子の質量が正確にゼロであることが保証される。この仕事は、小嶋との共著論文として、*PRL* に掲載された [111]。作用積分における一般線形変換不変性の存在は、光円錐のような古典論的時空構造が重力場の量子化に論理的に先行して現われないことを意味する。私は後年、このことが究極理論における時空構造として極めて重要であることを認識した。

私が西ドイツで講演したとき、聴衆の一人が、私の理論形式を四脚場の場合に拡張すべきだというコメントをした。私は本質的 BRS 変換を考えるときなど四脚場を使ったことはあったが、そのときはまだ四脚場の詳しい理論は知らなかった。1978 年 12 月に帰国してから、私は四脚場の正準量子化の問題に取り組んだ。局所ローレンツ変換のゲージ固定は、四脚場の反対称部分をゼロとおくことによってなされるのが普通であった。しかし、一見簡単に見えるこのゲージ固定は、一般座標変換不変性を破っているため、$g_{\mu\nu}$ について求めた美しい交換関係をすべてつぶしてしまい、とんでもなく大変になることが分かった。局所ローレンツ変換のゲージ固定は、一般座標変換不変にとらなければならない。最も簡単な選択として、私は最初*38

$$\frac{1}{2}e(e^{\lambda a}\partial_\lambda e^{\mu b} - e^{\lambda b}\partial_\lambda e^{\mu a})\partial_\mu s_{ab}$$

を採った。ここに、s_{ab} は局所ローレンツの B 場である。それから 2 ヶ月にわたって私は精力的に計算をしたが、このゲージ固定は固定が不完全であることが分かり、計算は全部無駄になった。正しいゲージ固定は、スピン接続を用いて

*37 B 場は正準変数ではないので、B 場を含む同時刻交換関係の計算は他のものよりずっと大変になる。私は最初 BRS 変換とのコンシステンシーからそれらを求め、後になってから場の方程式に基づく正当な計算で確認した [117]。

*38 私はこのとき、四脚場に対する慣用の記号 e を用いたが、やり直しのとき内山の記号 h に変更した。

ゲージ場の場合と同じような式にすべきであることが分かった。私はすべてを再計算し、BRS 定式化した四脚場形式のすべての同時刻（反）交換関係を閉じた形で求めた [112][113]。

$GL(4)$ 対称性と全域的内部ローレンツ対称性はともに自発的に破れるが、前者の生成子の反対称部分と後者の生成子との或る一次結合（係数は四脚場の真空期待値で書ける）によって定義される対称性は、自発的に破れずに残る。この破れていないローレンツ対称性こそ素粒子物理学におけるローレンツ対称性に他ならない。このことによって「ディラック場は、一般共変な理論では時空のスカラー場なのに、素粒子物理学ではなぜ時空のスピノルになるのか？」という半世紀來の未解決問題を解決した。量子重力が基礎理論である限り、素粒子物理学のポアンカレ対称性は基礎的な対称性ではありえない。上の考察によって明らかとなったように、それは、電弱理論の電磁 $U(1)$ 対称性と同様に、より大きな対称性の自発的破れの結果残った 2 次的な対称性なのである。このことは、超対称性（SUSY）は重力まで考えたとき、基礎的な対称性ではありえない、つまり超重力は正しい基礎理論ではありえないことを意味する。この極めて重要な結論は、残念ながら、基礎理論の専門家からは無視された。私の発見はまず素研（1979 年 12 月）に報告した。雑誌「数理科学」の編集者は、すぐこの事実の重要性を認識して、私に同じ内容の記事を同誌に書くことを依頼してきた。1980 年 2 月、正式の論文を *PRL* に投稿したが、「*PTP* に発表した論文の広告だ」として没にされた。のち（1981 年 11 月）、他の結果とともに *PTP* に発表した [125]。

「2 点関数の高エネルギー漸近的振る舞いは、自由場のそれより弱くなることはない」というレーマンの定理は、状態空間の計量の正値性のもとでのみ成立する。量子ゲージ理論は KO 補助条件により物理的 S 行列のユニタリー性を保証されているが、不定計量を用いているのでレーマンの定理の呪縛から逃れる可能性がある。しかし BRS 不変量については正定値計量に帰着してしまうので有効ではない。ところが量子重力では、古典的対応物を持ついかなる局所量も BRS 不変量ではないので、完全にレーマンの定理の呪縛から逃れられる。このようにしてはじめて、「量子重力を考慮すると、プランク質量が通常の場の量子論における紫外発散の自然なカットオフを与えるのではないか」という期待に対する論理的なサポートが与えられたことになる。また、1955 年発見された QED の電流の同時刻交換関係に関する後藤-今村の矛盾も、量子重力では電流が BRS 不変でなくなることを使えば、シュウィンガー項などという病的なものを導入せずとも、解決できることが分かった [118]。

BRS 定式化されたドドンデア・ゲージの量子アインシュタイン重力は、インプットしたもの以外に、非常に多くの対称性をもっていることが分かってきた [114]。x^μ, b_ν, c^λ, $\bar{c}_\rho$ が同じ共変ダランベール方程式を満たすことから、1979 年 12 月から 1980 年 3 月にかけての研究で、私は 144 個の生成子を持つ 16 次元ポ

アンカレ的超代数 $IOSp(8,8)$ （= (8+8) 次元非斉次オルソシンプレクティック超代数）を発見した [119][120]。この美しい超代数は、並進、一般線形変換、テンソル的に拡大された BRS 変換、その他多くの対称性を含んでいる。この発見を報告した論文 [119] は、私の量子重力の論文シリーズの第 9 番目に当たっていたので、ベートーヴェンの第 9 交響曲にあやかって「コラール対称性」と呼ぶことにした。コラール対称性の極めて著しいところは、時空対称性と内部対称性を自然に統合しているだけでなく、いかなる人為的手段を講ずることなく、c 数である x^μ と量子場である b_μ などとの間のデモクラシーを実現したことである。前者は、物理的 S 行列のユニタリー性と矛盾することなくポアンカレ代数をノントリヴィアルに拡張する可能性は、SUSY のみではないという反例を与えている。また後者は、手による細工を一切することなく、4 次元時空を 16 次元という高次元空間に自然に埋め込んだ例を提供している。コラール対称性を発見した方法は、[作用積分を不変にする変換] ⇒ [ネーターの定理により保存カレントを構成] ⇒ [生成子] という通常のルートではなく、[場の方程式から保存カレントを構成] ⇒ [生成子] ⇒ [交換関係から対称性の変換を計算] という逆のコースであった。私は小嶋と共同で、この方法をランダウ・ゲージの非可換ゲージ理論と量子重力の四脚場形式に適用した [121]。コラール対称性のネーター・カレントの計算は非常に大変で、1981 年になってから行なった [125]。

コラール対称性のほとんどの生成子は、必然的に自発的に破れる。ゴールドストーン交換子に超代数の変換を適用することで、グリーン関数に関してどのような情報が得られるかを小嶋と共同で調べた [122][123]。さらに、1980 年 10 月から 12 月、東北大学から長期研究員として来ていた山岸賢吾と、自発的に破れていない対称性に対するウォード-高橋恒等式の成立を、摂動論の 1 ループ近似のものすごく面倒な計算を遂行することによって確かめた [124]。

B 場 b_μ またはその時間微分とリッチ・テンソルなどとの間の同時刻交換子を計算していて、私はそれらがテンソル的な様相を呈していることに気付いた [117]。1982 年から 1984 年にかけて、この不思議な性質の意味を、4 次元交換子を用いて組織的に分析した [128][129][130][137]。キーとなったアイデアは、パウリ-ヨルダンの不変 D 関数の q 数への拡張である $\mathcal{D}(x,y)$ の導入である。これによって、B 場 b_μ は「一般座標変換の生成子」のように振る舞うことが分かった。これは、可換ゲージ理論の B 場 B が「局所ゲージ変換の生成子」の如く振る舞うことの自然な拡張であった（§16 参照）。しかしながら、量子重力の場合は、FP ゴーストの方程式の係数に重力場があって、その非可換性に起因する余分な項がつく。その項の形は、定性的にしか与えることは出来ない。私は、古典的対応物を持つ任意の局所量と B 場との間の 4 次元交換関係を、一般相対論の幾何学的解釈を反映するものとして、「幾何学的交換関係」と名付けた。その後、私のところの院生であった菅野浩明が、私の $\mathcal{D}(x,y)$ の定義で仮定したそれの x, y

に関する反対称性は不要であるばかりでなく、正しくないことを指摘した。そこで彼と共同で、$\mathcal{D}(x,y)$ をいかに構成すべきかを詳しく調べた [138]。この解析によって、量子アインシュタイン重力における 4 次元交換関係の研究が非常に見通しよくなったのみならず、それを非可換ゲージ理論へ拡張することを可能にした (§16 参照)。さらに後になって、これはドドンデア・ゲージの 2 次元量子重力の厳密解を構成する第一歩となった (§21 参照)。

可換ゲージ理論が重力と結合している場合、16 次元ポアンカレ的超対称性は 19 次元に拡大される [123]。非可換ゲージ理論の場合は、極大可換ゲージ固定をするならば、その分については同様な拡大が可能である [141]。この仕事は 1985 年にしたものであるが、これは当時私のところの院生であった阿部光雄との最初の共同研究であったと同時に、私の量子重力の論文シリーズの最後のものとなった。

1989 年から 1990 年、私は、超座標 $(x^\mu, b_\nu, c^\lambda, \bar{c}_\rho)$ を基礎とする 16 次元超対称性が 4 次元時空よりも基本的であるとする立場を採ったらどうなるかという、かなりファンタスティックな可能性を考察した [159][160]。8 + 8 次元超空間においては、通常の場の量子論はボソン的な 4 次元を c 数の独立変数として採用した特別な理論ということになる。もしフェルミオン的な 4 次元をグラスマン数の独立変数として採用したらどうなるのかを調べた。

ゲージ理論とは対照的に、§16 で論じた BRS シングレット対は 2 次元量子重力では実際に出現する [182]。私は、量子アインシュタイン重力において、この BRS シングレット対出現の可能性の心配を回避する方法を見つけた。テンソル的に拡大した BRS 生成子を用いた補助条件を導入することにより、BRS シングレット対の存在に無関係に物理的 S 行列のユニタリー性が保証されるのである。この仕事は、阿部と小嶋との共著として発表した [185]。

量子アインシュタイン重力の詳しい総合報告は [133] (n 次元で) と [B5] の第 5 章。簡単なレヴィユーは [C7] [C17]、素研 (1993.1)。日本語でのレヴィユーは [B4]、岩波「科学」(1980.8&9)。

18 非共変ゲージの困難

量子ゲージ理論は、共変ゲージを採用すれば満足に定式化できるが、それにもかかわらず、非共変ゲージに固執する人が少なくない。とくに 1962 年以来、軸性ゲージ $A_3 = 0$ が頻繁に使われる。その理由は、非可換ゲージ理論において FP ゴーストが形式的に残りの部分から分離してしまうからで、「ゴースト・フリー」として注目された。しかし、その見かけ上の簡単さとは対照的に、軸性ゲージはとんでもなく病的なものなのである。1982 年、山本邦夫らの論文を検

討していて、私は軸性ゲージの困難の元凶を発見した [126]。[*39]

軸性ゲージの最も深刻な問題は、次のような機構によって起される。「ダイナミカルな自由度でない A_0 は正準変数によって書き表されるが、そのとき非局所演算子 ∂_3^{-2} がどうしても必要になる。もし ∂_3^{-1} を

$$\partial_3^{-1} f(x^3) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dy^3\, \epsilon(x^3 - y^3) f(y^3)$$

によって定義するならば、その 2 乗は発散する。∂_3^{-2} は改めて定義しなければならない。これは、運動量空間でいえば、$\mathrm{P}\frac{1}{k_3}$ の 2 乗が発散するので、改めて有限部分 $\mathrm{Pf}\frac{1}{(k_3)^2}$ を導入しなければならないこと相当する。後者の量は、その見かけにかかわらず、正定値ではない。」これがいろいろな困難を引き起こすのである。私は軸性ゲージの自由場の量子論において不定計量の導入が不可避であることを証明した。さらに軸性ゲージでは、横波光子の偏極ベクトルはコンシステントに定義できないことを示した。そこで、B 場形式に基づく軸性ゲージの新しい定式化を提起したが、共変ゲージの定式化より複雑になってしまった。

1983 年、軸性型ゲージ $n^\mu A_\mu = 0$（n^μ は定数ベクトル）において、不定計量の出現が一般的に不可避であることを、「非負の超関数は測度である」という定理を用いて厳密に証明した [132]。この論文は *PL* に掲載されたが、非共変ゲージをやっている人たちにかなり衝撃を与えたようである。

1984 年、山本らによる $A_0 = 0$ ゲージに関する *PR* の論文へのコメントが 4 つも現われた。私はそれらを批判するコメントを書いたが、コメントの連鎖は好ましくないとの理由で没にされた。（その内容は [B5] の 2.2.3 参照）

19 ドドンデア条件のもとでの古典重力

量子アインシュタイン重力の定式化が、ドドンデア・ゲージのときに限りあまりにも美しいので、ドドンデア座標条件は古典アインシュタイン重力でも特別な物理的意味があるのではないかと、私は考えた。ドドンデア条件を満たす座標系が特権的な座標系なのではないかとする意見は、V. Fock その他の人たちにより繰り返し主張されてきた。1985 年 3 月、中国科学アカデミー長官の P. Y. Chou（周培源）が来日し、基礎物理学研究所で講演したが、彼はドドンデア座標系が唯一の物理的に意味のある系だと強く主張した。

A. Einstein によって定義された重力場のエネルギー運動量擬テンソル $t^\mu_{\ \nu}$ は、一般線形変換のもとではテンソルである。古典重力の一般座標変換は量子重力では一般線形変換と BRS 変換とにとって代わられたので、それが物理的意味のある量だと考えるのは、必ずしも不合理なこととはいえないであろう。重力場の

[*39] 私の指摘に応じて、山本らは修正論文を書いた。しかし、彼は物理的状態は規格化可能な状態として定義されるのだとして、絶対に譲らなかった。

エネルギーは、量子論的に見れば、重力子のエネルギーの総和のはずだから、少なくとも古典論で $g_{00} > 0$ となっている領域では、$t^0_0 > 0$ であると推測するのは自然であろう。私はこの推測を、ドドンデア座標系でのシュヴァルツシルト解や、Chou によって与えられたいくつかのスタティックな解についてチェックし、肯定的な結果を得た [142]。

1987 年、阿部光雄と一ノ瀬祥一と私は、この推測をドドンデア座標系でのカー解についてチェックしてみることにした [148]。カー解の t^0_0 の表式を計算することは非常に大変な労力のいる仕事なので、一ノ瀬はコンピューターによる数式計算ソフトを使うことにした。ところが、数理解析研究所のコンピューターは容量が足りなくて、いくつかの特別な場合しか遂行できなかった。そこで私はこれらの式を内挿して t^0_0 の解析的な表式を推定し、それを一ノ瀬は再びコンピューター計算で確認した。このようにしてやっと得られた結果であったが、不幸にして、角運動量の大きい場合のカー解については $t^0_0 > 0$ は満足されていなかった。

20 局所ローレンツ不変性の超対称化

一般に SUSY の局所版は超重力であると信じられているが、超重力において超対称化されたのは、内部対称性としてのポアンカレ不変性である。そこで必要となる内部並進は、一般座標変換を四脚場によって書き直したものに他ならない。四脚場は局所量だから、この書き直しは全域的な変換の生成子に対しては使えない。それゆえ、SUSY における基本的反交換子 $\{Q, \overline{Q}\}$ は内部並進の生成子にならざるをえず、時空の並進生成子である P_μ(のガンマ行列倍) と同定することはできない。*40 この事実を反映して、超重力の SUSY 不変なゲージ固定は不可能なのである。

もともと、アインシュタイン重力の四脚場形式において、局所ローレンツ変換は一般座標変換とは全く無関係な変換である。それゆえ私は、局所ローレンツ不変性のみを超対称化する方がより自然なのではないかと考えた。このことを思いついたのは 1981 年 11 月のことであったが、その時は $\{Q, \overline{Q}\}$ をローレンツ生成子 $M_{\mu\nu}$ と結びつけようとして失敗した。5 年後の 1986 年 3 月から 5 月、私は再びこのアイデアを取り上げた。今度はスピノル解析に従って正しく、$\{Q, Q\}$ と $\{\overline{Q}, \overline{Q}\}$ とを $M_{\mu\nu}$ に同定した。四脚場の超対称パートナーとしてスピノル場 ξ を導入したが、私は四脚場の正しい超対称変換を見つけることが出来ず、失敗した。だが 1986 年 12 月、とうとう私は、ξ 場を特別なスピノル場として用いることにより、超対称性変換を非線形な形で実現することに成功した。私の到達した超代数は $OSp(N, 2; \boldsymbol{C})$ (N は導入したスピノルの多重度) と

*40 私のこの指摘に対し、1983 年、九後汰一郎らはもし両辺で真空期待値をとるならば困難を避けられると主張した。しかし交換関係というものは、両辺で場の量との交換子をとれてこそ意味のあるものと思う。

して知られているものであるが、そのボソン的部分はローレンツ代数 $SL(2,\boldsymbol{C})$ と $SO(N,\boldsymbol{C})$ とから成る [145]。私のところの院生であった神長保仁は、N の値を除きこの超対称拡大が一意的であることを証明したが、残念ながら余分な仮定が必要だった。*41

阿部光雄はこの仕事に大変興味を示した。1987 年から 1989 年にかけて、阿部と私は四脚場形式の局所超対称化理論の建設に邁進した。まず、超対称物質場の随伴表現と超対称ディラック・ラグランジァン密度を構成した [147]。この研究でわれわれは、ボソン的対称性 $SO(N,\boldsymbol{C})$ は、ξ 場を除き、自動的に $GL(N,\boldsymbol{C})$ に拡大されてしまうことを見つけた。後に菅野はグラスマン超多様体のフレーム行列表示の概念を用いて、この結果の数学的根拠を明らかにした。

論文 [147] において導入した超対称ゲージ固定は、自由度が不十分であった。この超対称性の随伴表現は互いに直交する 3 つの独立なものがあることが分かり、それを用いて完全なゲージ固定を構成した [149]。これを BRS 不変にするためには、もちろん FP ゴースト項をつけ加えなければならない。しかし、表現の非線形性のために、これはなかなか大変な仕事であった [150]。この構成において明らかになった重要な知見は、次の事実である。「新しい超対称性における反可換性は、BRS 対称性におけるそれとは全く独立である。従って、両方についてフェルミ的な量は、ボソン的にはならない。」われわれは完全な作用積分を構成することに成功したが、その正準量子化は阿部が単独で、$N=1$ の場合についてのみ具体的に遂行した。このようにして、ドドンデア・ゲージの量子アインシュタイン重力の超対称理論は、美しい形で定式化できた。この理論における新しい自由度は、すべて補助条件により非物理的となっている。それゆえ物理的 S 行列のユニタリー性は壊れないが、他方、観測される新しい粒子の存在を全く予言しないので、実験的にチェックしにくいものとなった。唯一の物理的な結果は、カイラルゲージ対称性は $SO(N)\times SO(N)$ でなければならないということである。これは大統一理論のうちでは、$SO(10)$ モデルを支持することになる。

この新しい超対称性理論はほぼ完成したので、全体を洗練した形で再構築した [155]。*42 われわれはこの超対称性の表現を研究し、超接続と超曲率を構成した [152]。さらに、3 次元の場合を考察し、チャーン・サイモンズ項の超対称化を行なった [153]。

論文 [155] において、ξ 場を用いた表現は、超代数の場合非常に自然な非線形実現を与えることに認識した。「ξ 場表現」の数学的構造は、菅野の仕事によっ

*41 後に阿部は、$SL(2,\boldsymbol{C})$ を含むすべての可能な超代数を調べた。

*42 それまで ***PTP*** にばかり投稿していたので、この論文は、私が常任レフェリーを委嘱された新発刊の雑誌 ***Classical and Quantum Gravity*** に投稿した。ところがレフェリーは、**Haag** らのダメ定理（SUSY の一意性）は無条件に成立するものと信じていて、論文をろくに読みもしないで没にしてきた。編集員は私の抗議を全然受け付けないので、このような雑誌には付き合えないと常任レフェリーを辞退した。われわれの論文は、西欧人がやっていない話題には冷たい ***NP*** にも没にされて後、***IJMP*** にやっと掲載された。

て明らかにされた。1989 年、われわれは ξ 場表現の一般論を論じ、その BRS 代数への応用を考察した [158]。この研究において、高崎金久から教わった旗多様体の概念が有用であった。

四脚場の局所超対称理論のレヴィユーは、阿部の 1990 年の論文（*IJMP*）。簡単な紹介は、[156]。

21 ハイゼンベルク描像における場の量子論の解法

ドドンデア・ゲージでのアインシュタイン重力の正準量子論は、3 次元以上の場合に定式化されたものである [133]。時空が 2 次元の場合の正準量子論についてはじめてアタックしたのは、佐藤喜一郎であった（1987 年のプレプリント）。2 次元ではアインシュタイン-ヒルベルトの作用積分はトリヴィアルになるが、理論はワイル（もしくは共形）不変になる。彼はそのゲージ固定項として、$b\sqrt{-g}R$ を導入した。ここに b はワイル B 場である。そして彼は正準量子化を行なったが、不幸にして、ボソンゴーストの自由度（$3+1$）とフェルミオンゴーストの自由度（$2\times 2+2$）とのミスマッチのため、KO カルテット機構が正常に機能せず、論文を発表するに到らなかった。

1990 年、阿部光雄は、上記のゴースト勘定のミスマッチの問題を解決するうまい方法を見つけた。ワイル FP ゴーストを導入しないで、座標変換の FP ゴースト c^μ と反ゴースト $\bar{c}_\mu$ にワイル自由度の方の役割も演じさせるのである。この取り扱いでは、ワイル BRS 変換はベクトル的になり、作用積分のゴースト部分が BRS 完全でなくなってしまうが、ユニタリー性に関する困難は解消した。*43 私は同時刻 (反) 交換関係を計算していて、$g_{\mu\nu}(x)$ の任意の高次時間微分は $g_{\lambda\rho}(y)$ と同時刻で可換であることを見つけた。このことは、重力場同志は 2 次元的に可換であることを意味する。このとき私はすばらしいことに気付いた。1982 年から 1984 年に、私は量子アインシュタイン重力において幾何学的交換関係を発見したが（§17 参照）、その場合には「非幾何学的項」という具体的な表式が分からない項が存在した。しかし、2 次元時空の場合、上述の可換性から非幾何学的項の不存在が従がうのである。ということは、b_μ, c^μ, $\bar{c}_\mu$ のいずれかを含むすべての 2 次元交換関係は、その正確な式が閉じた形で与えられるということである。阿部と私は、このようにしてすべての 2 次元交換関係をあらわに求めることに成功した。すなわち、われわれは、自由場の演算子を一切利用することなく、ドドンデア・ゲージの BRS 定式化された 2 次元量子重力のオペレーター解を構成したのであった [164]。この仕事は、これ以後約 10 年にわたって阿部と共同研究を行なうこととなった、ハイゼンベルク描像における場の量子論の解法の確立への

*43 1995 年、池田憲明、また田部井哲夫は、ワイル自由度は BRS 不変にしなくてもよいことを指摘した。

第一歩となった。

私は、上述の方法が量子アインシュタイン重力を解くのにも利用できることに注意した。場の方程式と同時刻交換関係をアインシュタインの重力定数 κ について冪展開するとき、*44 その第 0 次近似は、次元数のことを除き、*45 まさしく 2 次元量子重力で得られた式と一致する。そこでわれわれは第 1 次近似に進んだが、このときは場そのものの第 1 次近似を求めようとして失敗した [162]。だがこの仕事は、いかなる古典物理的背景時空も先験的に仮定せずに、量子アインシュタイン重力を解こうとしたはじめての試みであった。*46 後に私は、量子重力場の第 0 次近似が c 数ではなく q 数であることから、量子重力に摂動論を適用するための基本仮定「量子重力場は古典時空計量と $\sqrt{\kappa}$ のオーダーの量子補正との和で書ける」は間違いであることを発見した [179]。*47

阿部と私は、2 次元量子重力のオペレーター解の構成を、二脚場の場合に拡張した [163]。時空座標と内部座標とを結ぶ q 数変換関数は、二脚場で具体的に書き表わすことが出来た。この式を用いると種々の q 数の D 関数を具体的に与えられる。また 2 次元場の量子論（§15 参照）のボソン化公式などの種々の公式を、量子重力の場合に拡張することも行なった。

1991 年 2 月、われわれは、2 次元量子重力のオペレーター解の表現を構成する問題をとり上げた。最初は、二脚場形式で構成した q 数正エネルギー D 関数 $\mathcal{D}^{(+)}(x,y)$ を用いて状態ベクトル空間を構成しようとしたが、この関数は B 場 b_μ と非可換であるため、うまくいかなかった。しかしまもなく、表現はワイトマン関数の完全系で与えればよいといううまいアイデアが浮かんだ。この考えに基づき、9 ヶ月かけて、ハイゼンベルク描像での厳密解を構成するという画期的な仕事を完成することができた [165] [166][167]。すべての 2 次元交換関係がわかっているから、すべての独立な多重交換子をあらわに計算することが可能である。それらの真空期待値は、トランケイテッド（＝真空を中間状態とする寄与を除いた）ワイトマン関数の 1 次式で表わされる。これらの関係式を逆に連立 1 次方程式と見て、トランケイテッド・ワイトマン関数を決めるのである。この考察において、最初、2 点ワイトマン関数 $\langle b_\mu(x)b_\nu(y)\rangle$ をゼロとおいてしまった。それは、交換関係

$$[b_\mu(x),\, b_\nu(y)] = i[\partial_\nu b_\mu(x) + \partial_\mu b_\nu(y)]\cdot\mathcal{D}(x,y)$$

の右辺が B 場について線形であるからである。ところが、B 場と q 数 D 関数とは非可換なので、そう単純にはいかないことが分かった。同時空点を含む演算子

*44 摂動論で $\sqrt{\kappa}$ の冪展開になっているのは、重力理論に無理に相互作用描像を導入したからである。

*45 明白に一般線形変換不変な形式なので、次元は自明に変えられる。

*46 私はこの考察を「重力に関するエッセイ」として Gravity Research Foundation に応募したところ、1991 年度の 'Honorable Mention' となった。

*47 この指摘も「重力に関するエッセイ」として、1994 年度の 'Honorable Mention' となった。

の積の真空期待値は、より多点のワイトマン関数から決めなくてはならないのである。この理論では、$b, c, \bar{c}$ の 3 点関数から正しく決定することができた。

すべてのワイトマン関数を求め、BRS 不変性とコンシステントであることを確かめた。また、交換関係の計算のため間接的に利用はしたが、表現の決定に直接には使っていない場の方程式とのコンシステンシーチェックを行なった。そして、$g_{\mu\nu}$ のオイラー方程式として得られる場の方程式のみ、少しだけ*48 破れていることを発見した。これは不可避な破れであるので、新しいタイプのアノーマリーとして、われわれは後に「場の方程式アノーマリー」と名付けた。

われわれの得た解が正しいものかどうか確かめるために、2 次元量子重力の摂動論の結果と比較した [169]。このモデルは 1 ループまでで正確に解けるが、摂動計算は相当大変なので、2 点及び 3 点のグリーン関数のみを計算した。その結果は、われわれの解をグリーン関数に直したものと完全に一致した。しかし、この比較において、2 次元時空でしか成立しない特別な恒等式（すなわち明白に共変的ではない恒等式）を用いることが必要であった。多分これが多点グリーン関数の摂動計算が著しく面倒になる理由であろう。

考えているモデルで、重力場に対し q 数のワイル変換を行なうと、A. M. Polyakov の非局所的 2 次元重力モデルの局所化共変化版が得られる。このモデルは、摂動論的に考えると無限に多くのループ・ダイアグラムが現われ、通常の意味では繰り込み不可能である。他方、われわれの厳密解は全く紫外発散を含まない。このように、このモデルは、量子重力の繰り込み不可能性が摂動論の使用によってもたらされたものであろうという主張を支持する具体例を与える [180]。

オペレーター解構成の一般論として、場の量そのものを求めようという考え方はうまく機能しない。その理由は、場の方程式は 1 時空点に対する式であるが、同時刻交換関係の方は 2 時空点に依存しているからである。後者を初期条件と見るためには、場の方程式の方も 2 時空点に対する式に書き改めることが必要である。そこでまず、場の方程式と場の量との n 次元交換関係を考え、それを 2 つの場の量の n 次元交換子に対する偏微分方程式に書き改める。こうして、n 次元交換子に対する q 数のコーシー問題が設定されることになる。ハイゼンベルク描像における場の量子論の一般的解法は、このコーシー問題を解くことから始まるわけである。

われわれはこの解法をまず QED に適用した [170]。共変微分は結合定数 g を含まない形で定義されなければならないので、作用積分において g は F^2 項の係数としてのみ、そして g^2 という形でのみ現れる。*49　それゆえ、結合定数による展開は g^2 の冪展開となり、その次数は $\frac{1}{2}(N+k)$ で与えられる。ここに、N

*48 「少しだけ」というのは、方程式の場の自由度を減らすことなく、単に微分するだけで破れを消去できるという意味である。

*49 このことに気付いたのは、1991 年 7 月 5 日、ドブナで D. V. Shirkov 講演を聞いたときであった。

は摂動の次数、k は外線光子（ゲージ粒子）の個数である。可換ゲージ理論では F^2 項は自由場のものなので、ハイゼンベルク描像での解法の計算も、共変的摂動論的計算とあまり本質的な差異はない。ワイトマン関数がオペレーター順序に依存するための煩雑さがあるが、重要なメリットは、展開の各次数でゲージ不変性が自明に保たれることである。

次にわれわれは、ドドンデア・ゲージの 2 次元量子重力に宇宙項をつけ加えたモデルを考察した [171]。さらに、共変ゲージでの非可換ゲージ理論にわれわれの解法を適用しようとしたが、不幸にして本物はあまりにも複雑な計算になるので諦め、ランダウ・ゲージでの 2 次元 BF 理論を考察した [172]。われわれの近似法では、BF 理論は非可換ゲージ理論の第 0 次近似と一致する。

周知のように、共変的摂動論はファインマン図を用いると、非常に明瞭かつ効果的に計算が遂行できる。もしわれわれの解法でもそのようなダイアグラム的方法が使えれば、非常に有効であろうと考えた。そこで 1993 年から 1994 年、ハイゼンベルク描像におけるダイアグラム的方法を開発するための研究を行なった [174][176][177]。ファインマン図のときは、1 つの頂点に入射する線は相互作用ラグランジァン密度によって決定されるが、ハイゼンベルク描像では相互作用項は定義されていないので、このような手段は使えない。そこで私は、「構成ブロック」という新しい概念を導入することにした。構成ブロックとは、1 本の線（または 1 点）に、その端点での他の線との連結に関する情報を付け加えたものである。このアイデアは、ドドンデア・ゲージでの 2 次元量子重力の場合には、非常に有効に機能した。B 場のみから成る一般のワイトマン関数の具体的な表式は、以前には求められなかったが、このダイアグラム法ではじめて与えることができた。この一般式を書き下すのに、グラフ理論で使われる「根つき樹木」の概念が有用であった。われわれは、このモデルに関する限り、ダイアグラム法による結果がすべて正しいことを示すことができたが、不幸にして、他のモデルではこのような満足な結果は得られなかった。構成ブロックは、部分グラフに拡張する必要があった。そしてどのような構成ブロックの集合を採ればよいかは一般規則がなく、試行錯誤によってモデルごとに発見しなければならなかった。

ハイゼンベルク描像における場の量子論の解法のレヴィユーは [195]。なお、初期のレヴィユーとして、数理研講究録 No.869。

22 非可換量を可換量として扱う方法

§21 で述べたように、阿部光雄と私は、ハイゼンベルク描像における場の量子論の一般的な解法を開発した。量子アインシュタイン重力の第 0 次近似はあらわに計算できたが、第 0 次近似の $g^{(0)}_{\lambda\rho}(y)$ は、$g^{(0)}_{\mu\nu}(x)$ とは可換であるが、$g^{(N)}_{\mu\nu}(x)$

$(N \geq 1)$ とは可換ではない。$g_{\mu\nu}^{(N)}(x)$ を含む交換子に対するコーシー問題を設定するには、場の方程式を交換子に対する偏微分方程式に書き改めることが必要である。しかし、上述の非可換性のために、この書き換えは必ずしも容易ではない。この書き換えに現われる数学的問題は、次のように抽象できる。「A と Φ を、$[A, \Phi]$ が A と非可換なようなオペレーターとする。そのとき $[f(A), \Phi]$ を $[A, \Phi]$ と A とで書き表わせ。」1992 年の終わり頃、私はこの問題は次のようにすればきれいに解けることに気付いた。 「A がもし $[A, \Phi]$ の左にあればそれを A_L、もし $[A, \Phi]$ の右にあればそれを A_R と書く。そして A_L と A_R と $[A, \Phi]$ をすべて可換量として取り扱う。」*50 このアイデアに基き、阿部と私は、ある簡単な非線形モデルの N 次のオペレーター解を計算した [173]。このテクニックの数学的有効性を示威するために、定数係数線形常微分方程式に対するヘヴィサイド演算子法を、係数が未知関数と非可換な場合に拡張する方法を定式化した [175]。ここで、ヘヴィサイド演算子法の数学的裏づけを行なった Mikusiński の理論が有効であった。*51 この論文は日本応用数理学会論文誌に発表した。

数年後（1996 年）、鈴木増雄の「量子解析」と題する一連の論文が現われた。彼は、オペレーター A の関数 $f(A)$ の微分を

$$\frac{df(A)}{dA} = \frac{f(A) - f(A - \delta_A)}{\delta_A}$$

によって定義した。ここに δ_A は A と可換な無限小オペレーターである。彼は高階微分をも考察した。A についての微分も、A との交換子をとることも、ともにデリヴェーション（＝ライプニッツ規則を満たす線形作用）であるから、両者は完全に対応すべきであると私は考えた。A を A_L と同一視すると、鈴木の δ_A は $A_L - A_R$ に対応する。N 階微分のときは、A_L と A_R の代わりに A_1, A_2, ... , A_{N+1} を導入することが必要である。われわれの結果は、$N+1$ 次の置換対称性が明白なので、彼の結果よりも見通しのよい形に書けた。この仕事は阿部と共同で行なった。池田憲明はわれわれの結果を多変数の場合に拡張することを考えたが、うまくいかなかった。そこで私は、解析関数に関するコーシーの積分表示に一般化されたファインマンの恒等式（§1 参照）を適用し、1 変数の問題に還元してこの問題を解決した。この仕事は、3 人の共著として *JMP* に発表した [186]。

23 ストリング理論批判と 2 次元量子重力

D 個の質量ゼロのスカラー場と結合した 2 次元量子重力は、もしスカラー場を D 次元ストリング座標と同定するならば、境界条件を除き、ボソン的ストリング

*50 このようなテクニックは、数学的に新しいものではないかもしれない。

*51 Mikusiński の理論については、私は松浦重武の講演を聞き、彼の訳書を勉強していた。

理論と見なすことができる。ボソン的ストリングは量子化にさいし、$D=26$ 以外では共形アノーマリーが現われるものと信じられ、この次元数 26 は「臨界次元」と呼ばれている。臨界次元のオペレーター形式に基く導出は、共形ゲージのような非共変ゲージで行なわれていた。

1987 年、D. W. Düsedau は、初めて共変ゲージでの臨界次元の導出を、摂動論で行なった。BRS 定式化されたドドンデア・ゲージでの 2 次元量子重力において、彼は c 数背景重力場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ を導入し、通常の如く、それに関するオイラー微分をとることにより対称エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ (FP ゴースト部分を含む) を定義した。平坦極限 $\hat{g}_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ をとって、2 点関数 $\langle \mathrm{T}^* T_{\mu\nu}(x) T_{\lambda\rho}(y) \rangle$ の「非局所項」を 1 ループ近似で計算した。それは

$$\varPhi_{\mu\nu\lambda\rho}(x-y) = \frac{i}{12\pi} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{p_\mu p_\nu p_\lambda p_\rho}{p^2 + i0} e^{-ip(x-y)}$$

の整数倍で与えられる。彼によって得られた係数の値は $D-26$ (スカラー場より D、ゲージ固定項より $+26$、FP ゴースト項より -52) であった。これから、共変ゲージでも臨界次元 $D=26$ が導かれたとされた。

Düsedau によって用いられた B 場は、多くの人が用いている B 場 ($b_{*\mu}$ と記す) であり、本質的 BRS 変換に対応した B 場 (b_μ と記す) とは異なる。論文 [106] で明らかにしたように、両者は $ic^\nu \partial_\nu \bar{c}_\mu$ だけの差がある (§17 参照)。佐藤喜一郎は、b_μ によるゲージ固定を用い、正準エネルギー運動量テンソルの 2 点関数を摂動論で計算した (1991 年のプレプリント)。彼は非局所項の係数として $D-26$ が得られたと主張したが、正しい計算結果はそうはならない。対称エネルギー運動量テンソルでやり直してみても、b_μ を使う限りは、やはり $D-26$ は得られない。[*52]

1991 年 10 月から、私は阿部光雄の協力のもとに、この不思議な現象を解明するための研究を始めた。対称エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は、$b_{*\mu}$ と b_μ のどちらを B 場として使うかによって異なる。このことは奇妙なようだが、量子重力では対称エネルギー運動量テンソルが BRS 不変量ではなく、従って観測可能量ではないので差し支えない。実際、両者の差は、観測可能量であるポアンカレ生成子の表式には寄与しないのである。また B 場の選択による違いは、ラグランジァン密度では全微分項になるので、作用積分にも寄与しない。それにもかかわらず、それは非局所項にははっきりとした寄与を与えるのである。従って、Düsedau による共形アノーマリーの計算は、次のような意味で必然的に曖昧である。「この差に任意定数を乗じたものをラグランジァン密度につけ加えることにより、作用積分を変えることなく、非局所項の係数を変えられる。」[168]。

ストリングの臨界次元 $D=26$ が、必ずしも 2 次元量子重力から導かれないという結論は、論争の的となった。A. P. Demichev という人は、積極的にわれわ

[*52] 私はこのとき $D+26-4$ を得たが、FP ゴースト部分は -4 ではなく赤外発散していた。

れの結論に賛意を表する手紙をくれた。私は、W. Kummer、[*53] J. Gomis (バルセロナで)、そして R. Stora (アヌシーで) と共形アノーマリーの不定性の問題を議論したが、その合理的な説明を得ることはできなかった。Kummer の学生の W. Mödritsch は、われわれの推論を誤解して批判論文を書いた。$T_{\mu\nu}$ を導くとき、ラグランジァン密度を古典的に一般共変化することが必要であるが、もしそれが 2 階微分を含んでいると、共変微分の非可換性のために一般共変化は一意的ではなくなる。彼はわれわれの発見した不定性を、このよく知られた事実のせいにしたのである。不定性の源となる項は、一見 2 階微分を含むように書くけれども、実際には 2 階微分を含まないのだということを、私は彼に手紙で知らせた。そうしたら、彼の発表された論文では、同じ批判が少し表現を変えて述べられ、しかも私がついでに書いた些細なコメントに対する感謝だけがなされていた。これでは、彼の論文の読者に、私が彼の批判を承認した如くに受け取られかねない。それで、私はバルセロナ滞在中、彼の批判の誤りを指摘する短い論文を書いた [178]。

不定性の問題が暗礁に乗り上げたので、阿部と私は 2 次元量子重力の他の問題へとテーマを変えた。1995 年、ハイゼンベルク描像での解法 (§21 参照) を、光錐ゲージでの 2 次元量子重力の BRS 定式化しない理論に適用した [181][183]。このモデルは、A. M. Polyakov が「誘導量子重力」として非局所的に取り扱った理論の局所版であるので、彼の得た結果とわれわれのとを比較することができる。このモデルは容易に解け、場の方程式アノーマリー (§21 参照) があることが分かった。われわれはまた、超巨大な対称性があることを発見した。Polyakov によって見いだされた $SL(2,\boldsymbol{R})$ は、そのごくちっぽけな部分代数に過ぎない。さらに、対称性がアノーマリーを持つかどうかは、その生成子に場の方程式アノーマリーの寄与を含ませるか否かに依存することだということが分かった。われわれはまた、このモデルをさらに簡単化したモデル (形式的には非線形変換で自由場に帰着できるようなもの) を考察し、やはり場の方程式アノーマリーが現われることを見た [189]。

1995 年 12 月、九後汰一郎の学生の高橋智彦が書いた論文は、不定性の問題のブレークスルーとなった。彼は BRS 定式化された 2 次元量子重力の共形アノーマリーを、背景重力場を導入することなく、直接 2 点関数 $\langle \mathrm{T}^* b_{*\mu} b_{*\nu} \rangle$ を計算することによって論じた。この場合はもちろん、B 場の選択による曖昧さは生じない。彼によれば、$D \neq 26$ のとき、それは BRS 不変性に反してゼロにならない。そこで、彼は共形自由度を導入し、この BRS アノーマリーを共形アノーマリーに転換した。2 次元量子重力では摂動計算は問題ないので、BRS 不変性の

[*53] 彼はその 30 年ほど前、スピノル・スピノル BS 方程式の T-A セクターでの解を与えたが (§9 参照)、そのとき私は彼の計算のエラーを指摘したことがある。そのことを覚えていて、彼は 1993 年 9 月、数理解析研究所に私を訪ねてきた。

破れは明らかにハイゼンベルク描像で求めた厳密解の結果と矛盾している（§21参照)。パラドックスの原因を解明するために、われわれは問題のファインマン積分の計算法を徹底的に分析した [184]。グリーン関数の発散を避けるために次元正則化法を用いたが、われわれの場合には、すべての計算を複素 n 次元で行なってから $n \to 2$ としていることになっているのに対し、高橋の計算では内線の部分に対してのみ複素次元を用い、外線については最初から $n = 2$ と置いてしまっていることが分かった。外線は積分に関係がないので、通常の場合、最初から $n = 2$ と置いてしまっても何ら問題を生じない。ところが今の場合、これが正しくなかったのである。外線のプロパゲーターについて $n - 2$ に比例する非局所な差異を生じているわけだが、これにループ積分から出てくる $(n-2)^{-1}$ に比例する局所因子がかかって、有限な非局所項を生み出してしまうのである。つまり、彼が見つけた $D \neq 26$ のときの BRS 不変性の破れは、次元正則化法の彼の適用の仕方がよくなかったことに起因していた。[*54]

BRS 不変性に関するパラドックスは解決されたが、高橋が $T_{\mu\nu}$ を使わずに、$D - 26$ を導出できたことは不思議であった。1997 年の春から、私は共形アノーマリーに関する文献の総点検を始めた。Düsedau の論文、Baulieu と Bilal の論文、Kraemmer と Rebhan の論文は、一見同じ立場でやっているように見えるが、詳しく検討してみると彼らの計算法は皆異なっていた。とくに、Baulieu-Bilal は、量子重力場 $g_{\mu\nu}$ に関するオイラー微分 $\mathcal{T}_{\mu\nu}$ を、それは場の方程式によりゼロであるにもかかわらず、対称エネルギー運動量テンソルと同定していた。そして Kraemmer-Rebhan は、何の注意もせずに、それを彼らの使った $T_{\mu\nu}$ と同じものと見なした。混乱の原因は、たまたま両方の表式がよく似ていたことであった。相異は本質的に、Baulieu-Bilal が不当にも無視したゲージ固定項からの寄与 $\partial_\mu b_{*\nu} + \partial_\nu b_{*\mu}$ であった。しかしながら、私はこのお陰で高橋がなぜ $D - 26$ を得たのかの理由を解明できた。なぜなら、この観察により、B 場の 2 点関数と対称エネルギー運動量テンソルの 2 点関数との関係が明らかになったからである。高橋により導かれた BRS アノーマリーは、$\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$ の場の方程式アノーマリーから再生できるものであった。私はこの仕事を阿部との共著として *IJMP* に発表した [187]。

Kraemmer と Rebhan は、共形アノーマリーのゲージ不変性の「一般的証明」を与えたと主張していた。しかし、私は彼らの証明なるものは、一般的過ぎて証明になっていないことに気付いた。彼らは、背景重力場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ に関してオイラー微分をとることと、BRS 変換をすることとの非可換性を看過していた。私は、「Kraemmer-Rebhan の定義での共形アノーマリー」のゲージ不変性を、共通なプロパゲーターを与える作用積分間に限って具体的に証明した。この証明を書

[*54] 論文 [184] のレフェリーは、匿名だが、高橋であった。彼は彼の立場を取り下げようとはしなかったが、パラドックスの上述のような明快な解決が得られたのは、彼との議論に負うところが大きい [187]。

いた阿部との共著論文を、彼らの反対意見を聞くためにわざと NP に投稿した[188]。予想通り彼らの一人（匿名だが）がレフェリーとなり、われわれの論文を没にし、$IJMP$ に投稿した論文まで取り下げろと言ってきた。彼らは、論文で指摘した非可換性は認めたが、彼らの証明はオイラー微分を使わなくても成立するのだと言い張った。私は論文を PTP に再投稿するさい、彼らの主張に対する次のような批判をつけ加えた。「彼らのいう共形アノーマリーは、BRS 変換と非可換な $\hat{g}_{\mu\nu}$ に関するオイラー微分によって作られているので、それを使わずにはその存在がいえていない。」

共変ゲージにおける $D-26$ の問題が解決したので、私は阿部と、BRS 定式化された共形ゲージでの 2 次元量子重力における共形アノーマリーの問題を検討することにした[190]。このモデルについては、1983 年に現われた加藤光裕と小川格による有名な論文があった。彼らによれば、ネーター BRS 生成子 Q_B の平方は $D \neq 26$ のときゼロにならない。このモデルの厳密解は、われわれの方法で簡単に求められる。その結果、解は D の値の如何にかかわらず、つねに BRS 不変であることが分かった。そして実際、どんな D に対しても、表現レベルで冪零になっている BRS 生成子 $\hat{Q}_B$ が存在している。両生成子の差 $Q_B - \hat{Q}_B$ は、場の方程式アノーマリーを含んでいるのである。このモデルでは、共変ゲージの場合と異なり、場の方程式アノーマリーそのものが $D-26$ に比例しているため、臨界次元の値についての不定性は生じない。またこの結論は、ストリングの境界条件を考慮しても変わらないことを確かめた[191]。以上の考察から、ストリング理論の臨界次元は、2 次元量子重力の自然な結果ではなく、何らかの余分の仮定を意図的に外から持ち込んではじめて導けることが分かった。

2001 年、阿部と私は、BRS 定式化された光錐ゲージでの 2 次元 BF 理論と非可換ゲージ理論が BRS 定式化された共形ゲージでの 2 次元量子重力と非常によく似ており、しかもより簡単に解けることを見いだした。

24　T*積の怪

T*積は、ハミルトニアン形式における T 積をラグランジァン形式に書き改めたときに、必然的に現われる概念である。共変的摂動論やファインマンの経路積分に現われる通常のグリーン関数は、すべて T*積で書かれたものである。T 積と異なり、時間微分も空間微分と同じように扱うので、T*積はつねにローレンツ共変性とコンシステントである。しかし T*積は、時間微分を真空期待値をとった後からやるため、場の方程式と、そしてそれを使うネーターの定理と、一般にコンシステントになっていない。私はアノーマリーに関する文献を調べていて、多くの人が T*積の取り扱いに関して非常に不注意であることを発見した。T*積の使用による保存則の見かけ上の破れが，しばしばアノーマリーと誤認されているのである。

藤川和男の 1982 年の論文は、BRS 定式化された共形ゲージでの 2 次元量子重力をストリング理論と見なして、そのアノーマリーを研究した最初のものである。彼は経路積分形式により、次の結論を得た。「BRS 不変性の要請をすると、$D \neq 26$ のとき共形アノーマリーが現われる。また、ゲージ理論におけるカイラルアノーマリーと同様に FP ゴースト数カレントにもアノーマリーが現われる。」その後、D. Friedan と E. Martinec と S. Shenker が共形場理論に関する論文において藤川の仕事を引用し、FP ゴースト数カレントのアノーマリーの存在は一般に認知されるところとなった。しかし、藤川の推論は私にはどうしても納得できないものであった。また Friedan らの仕事は、両理論の構成が全く異なっているので、彼の結果を支持していることにはなっていないと思った。1998 年 2 月から 5 月にかけて、私は菅野浩明と E メールで徹底的に議論した。彼は本質的な点で私の見解に同意した。

FP ゴースト数カレントのアノーマリーの摂動論的取り扱いに関しては、最初、Düsedau がドドンデア・ゲージでは存在しないと結論した。他方、U.Kraemmer と A. Rebhan は、彼らによって構成された一般のゲージでは存在するという「証明」を与えた。彼らは両方のカレントの表式の相違を強調したが、平坦極限（それしか計算しない）での両者の差は、Düsedau が黙って無視した全微分項以外の何者でもなかった [188]。また高橋智彦は、Düsedau の結果はドドンデア・ゲージにおける FP ゴーストと FP 反ゴーストとの間の交換対称性の結果であると主張したが、アノーマリーが存在すると彼らが考えている共形ゲージでも、同様な対称性が存在していることが示せる。

1999 年、阿部と私は、BRS 定式化された共形ゲージでの 2 次元量子重力において、摂動論による解とハイゼンベルク描像で求めた厳密解とを比較した [192]。私は、一般にもし作用積分に正準共役を持たないような場があれば、共変的摂動論やファインマン経路積分はオペレーター形式の結果を必ずしも忠実に再生しないことに気付いた。すなわち、前者では、私が「T*積の怪」と名付けた、次のような異常事態が起るのである。「例えば、ラグランジァン密度が $\varphi\tilde{\varphi}+f(\varphi,\partial\varphi)$ によって与えられているとしよう。そのとき、場の方程式として $\varphi=0$ が得られるが、$\langle \mathrm{T}^*\varphi\tilde{\varphi}\rangle$ はゼロに等しくなく、δ 関数に比例するのである。」ストリング理論では、左向きモードと右向きモードとが完全に分離しているのは当然のことと理解されているが、もし摂動論で正直に計算すると、T*積の怪のために実はそうはなっていないのである。さらに樹木ダイアグラムだけが現われるはずの共形ゲージで、B 場のみから成るグリーン関数は、ゼロではなく、T*積の怪のために 1 ループ・ダイアグラムからの寄与がある。そしてこれから、高橋の「BRS アノーマリー」に相当するものが出てくる。すなわち、これらの思いがけないループの存在は、場の方程式アノーマリーの摂動論的対応物に他ならないのである。

FP ゴースト数カレントのアノーマリーは、もちろん厳密解においては存在し

ない。摂動論における見かけのアノーマリーは、T*積の怪の仕業である。多くの人がFPゴースト数のアノーマリーがあると信じた理由は、リーマン-ロッホの定理とのコンシステンシーに基く。しかしこのようなトポロジカルな議論は、ユークリッド的計量での結果がローレンツ的計量の場合には全く通用しないことを無視している。さらに摂動論の計算はいつでも平坦時空で行なわれるのだから、はじめからトポロジーの効果はないはずである。

T*積の怪の議論は、私に40年来のミステリーの解決をもたらした。1961年11月28日、私はプリンストンの高等研究所に居たのだが、T. D. Leeが'Charged vector meson'というタイトルで、弱い相互作用を仲介するボソンWに関する講演を行なった。$V-A$相互作用を説明するために、仲介ボソンWはベクトルでなければならないが、荷電ベクトル場理論は繰り込み可能でない。彼の話は発散の問題をどう処理するかというような話だったと思う。私は、日本に居たとき湯川研究室でのセミナーで菅野礼司が、「荷電パイオンがベクトル中間子Wを通してミューオンとニュートリノに崩壊するのは、角運動量保存則に矛盾する」と言っていたのを思い出して、彼にその事を質問したら、彼は単に'You are wrong.'とだけしか答えなかった。実際、正直にその崩壊振幅を計算すれば、ゼロでない結果を得るのである。

2001年、私はこのパラドックスを解決した[193]。角運動量はつねに保存しなければならない。仲介ベクトルボソン理論で、崩壊振幅がゼロでないのは、プロカ形式のベクトル場理論に現われるT*積の怪のせいだったのである。従って、仲介ベクトルボソン理論でパイオンが崩壊するというのは、実は誤りなのであった。正しい崩壊振幅は、電弱理論で計算されなければならない。B場形式を用いると、T*積の怪が現れず、角運動量は明白に保存する。パイオンは、Wを通してではなく、スカラー粒子であるNGボソンを通して崩壊するのである。崩壊確率の計算がプロカ形式を使っても正しい結果が得られたのは、ゲージ理論における物理的S行列のゲージ独立性のお陰であった。ゲージ理論でもなく、スカラー粒子も含まない仲介ベクトルボソン理論では、繰り込みの困難以前に、パイオンの崩壊を説明できなかったのである。*55

1984年のL. Alvarez-GauméとE. Wittenの「重力アノーマリー」に関する論文は、超弦理論のアノーマリー・フリー条件の根拠ともなっている有名な論文である。1999年、私は彼らがT*積とT積を全く混同していることを発見した。私はそのときT*積の怪の話の一例として素研(1999.12)にそのことをコメントしたが、完全に無視されたようであった。2005年春、私は再びこの問題を取り上げ、彼らが2次元時空の場合に「重力アノーマリー」と呼んだ異常な項は、T*積がT積とは異なることを正しく考慮すれば、エネルギー運動量保存則を破るものではないことを、具体的な計算できちんと示した。私はこの論文を阿部との共

*55 1961年においては、電弱理論もKO形式も存在しなかったから、解決不可能であったのだ。

著で PTP に投稿した [196]。[*56] 無責任なレフェリーのため 1 年が経ってしまったので、編集長の九後太一（汰一郎）と直接議論することになった。そして「重力アノーマリー」を量子論的な保存則の破れと関係なく、背景重力場を含む経路積分の c 数一般座標変換不変性の破れで定義する立場があるということを聞いた。そこでそれに関する詳しい検討を行ない、長い議論の末、彼の了解を得た。

25 コメント

25.1 Sciarrino-Toller の推測の証明

1967 年、A. Sciarrino と M. Toller は、レッジェ極理論で $SL(2,\boldsymbol{C})$ のユニタリー既約表現を $SU(1,1)$ のユニタリー既約表現に分解する問題を研究した。彼らのレッジェ留数の因子分解定理は、次の推測が正しければ証明されたことになる。「$SU(2)$ のユニタリー既約表現と $SU(1,1)$ のユニタリー既約表現との間の変換関数を解析接続したものの留数に対して或る符号対称性が存在する。」1968 年、私はこの推測を、超幾何関数の変換公式のみを用いて証明した [53]。証明のキーは、シュヴァルツの擬関数を用いることにより、変換関数の解析接続をその積分を遂行せずに行なったことである。この証明を Toller に知らせたところ、W. Rühl が群論的な別証を与えたとのことだった。10 年後、私は西ドイツを訪れたとき、Rühl から歓待された。

25.2 熱伝導の限界

1960 年代 BS 方程式の仕事をやっていた世戸憲治（§9 参照）は、その後専門を情報科学に転向した。彼は、一見熱力学の第 2 法則に反するように見える、熱伝導に関する面白い事実を見つけた。「2 種類の区別可能な同体積（正しくは同質量）の水 A と水 B が, それぞれタンクに入っているとする。初めの温度は A が 100°C、B が 0°C であった。タンクは自由に理想的にくっつけたり分割したりできるものとするとき、熱伝導のみを用いて B の温度を原理的に何度まで上げられるか。」という問題で、答えは 50°C ではなく、100°C にいくらでも近い値なのである。 世戸は巧妙な方法で少しずつ B の温度を上げていき、複雑な無限級数を計算してその温度の極限値が 100°C であることを示した。私は彼からの手紙をもらって、彼の証明を検討したところ、繰り込み群的手法を用いれば彼の結果は非常に簡明に証明できることに気付いた。1975 年 4 月 19 日、私の証明を彼に書いて送ったところ、彼は雑誌「数理科学」(1977.10) の記事の中でそれを発表した。読者からの反応もあったようである (1978.4)。

[*56] 外国の雑誌だと、このような定説に反する論文は、通常問答無用で没にされるからである。

25.3 Robinson-Greenberg の定理への注意

1962 年、D. W. Robinson、そして O. W. Greenberg は独立に、次の定理を証明した。「通常の公理系を満足する局所場 $A(x)$ は、そのフーリエ変換が空間的開領域で恒等的にゼロならば、一般化された自由場である。」1978 年、小嶋泉と私は、この定理に関するコメントの論文を書いた [102]。まず、証明は 2 次元時空での質量ゼロの場に対しては成り立たず、実際に反例があることを指摘した。高次元の場合、この定理を用いて、「漸近場間の交換子は恒に c 数である」という命題を証明できたと主張したが、Jost-Dyson の積分表示の適用に誤りがあったため、われわれの証明は間違いであった。

25.4 町田-並木理論へのコメント

町田-並木理論は、量子力学の観測理論のひとつである。並木美喜雄は「物理学最前線 10」にそのレヴィユーを書いたが、彼はその中で、彼らの理論に従えば、粒子の非存在を確かめるいわゆる「No 型観測」でも波束の収縮が起ると主張していた。1985 年 7 月 11 日、私は並木に手紙を書き、「2 重シュテルン・ゲルラッハ実験」を提起して、その主張は量子力学の常識に反する結果を生むことを指摘した。彼の返事は、量子力学の常識に反する結果が町田-並木理論の予言であり、それが正しいはずだというものであった。しかしその後すぐに、町田茂は私に訂正の手紙を送ってきた。それによれば、町田-並木理論の予言は量子力学の常識と一致するものであるとのことであった。1986 年、東京で開催された量子力学の基礎国際シンポジウムで町田が講演し、その中で 2 重シュテルン・ゲルラッハ実験を、逆に彼らのライヴァル理論である「環境理論」への批判のために用いることを提案した。この会議のプロシーディングスでは、彼は私に感謝している。しかし、1992 年に発行された並木の著書「量子力学入門」では、この実験は町田-並木の提案であると述べられている。

25.5 クンツ環の準同型

1996 年 3 月、私は京都大学を退官し、1997 年 6 月から数理解析研究所での数学と理論物理に関する私的セミナーに参加している。2000 年 10 月 26 日、院生の川村勝紀はクンツ環[*57] $\mathcal{O}_d$（d は生成子の数）に関する講演をした。もし $d' > d$（そして $d-1$ が $d'-1$ の約数）ならば、$\mathcal{O}_d$ の生成子の多項式として $\mathcal{O}_{d'}$ の生成子を構成するのは容易である。$d' \leqq d$ のときはそうはいかないが、私は、もし $*$ 共役の生成子をも用いるならば可能かも知れないと、いろいろ試行錯誤で考えたみた。その結果、$d' = d = 3$ の場合に非常にエレガントな例を 11 月 16 日

[*57] クンツ環は 1977 年 J. Cuntz によって提起された C*環の 1 種である。

に発見した。私はこの例を川村に知らせたところ、数学者の常識に反する例だということで、彼は非常に興味を示した。その後、彼のクンツ環に関する論文で、この例は「中西準同型」と呼ばれることになった。

発 表 論 文

(番号の肩の＊印はレヴィユー)

[1] On Lehmann's method of renormalization

Nuovo Cimento (X) **5** 520–522 (2/1957)

[2] General integral formula of perturbation term in the quantized field theory

Prog. Theor. Phys. **17** 401–418 (3/1957)

[3] A systematization of weak interactions

Nuovo Cimento (X) **6** 383–384 (8/1957)

[4] General theory of infrared divergence

Prog. Theor. Phys. **19** 159–168 (2/1958)

[5] A theory of clothed unstable particles

Prog. Theor. Phys. **19** 607–621 (6/1958)

[6] A theory of clothed unstable particles. II

Prog. Theor. Phys. **20** 822–834 (10/1958)

[7] On the validity of dispersion relations in perturbation theory

Prog. Theor. Phys. **21** 135–150 (1/1959)

[8] A note on the physical state of unstable particles

Prog. Theor. Phys. **21** 216–217 (1/1959)

[9] Electromagnetic structure of nucleons

Prog. Theor. Phys. **21** 762–763 (5/1959), with K. Hiida, Y. Nogami, and M. Uehara

[10] Ordinary and anomalous thresholds in perturbation theory

Prog. Theor. Phys. **22** 128–144 (7/1959)

[11] Electromagnetic structure of nucleons. I

Prog. Theor. Phys. **22** 247–273 (8/1959), with K. Hiida, Y. Nogami, and M. Uehara

[12] Electromagnetic structure of nucleons. II

Prog. Theor. Phys. **22** 351–372 (9/1959), with K. Hiida, Y. Nogami, and M. Uehara

[13] Electromagnetic structure of nucleons. III – Static limits and S-wave effects –

Prog. Theor. Phys. **22** 863–881 (10/1959), with K. Hiida

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **28** 572 (1962)

[14] On the charge distribution of the proton

Prog. Theor. Phys. **23** 192–193 (1/1960), with K. Hiida and T. Shiozaki

[15] A note on the ordinary and anomalous thresholds in perturbation theory

Prog. Theor. Phys. **23** 284–286 (2/1960)

[16] Electromagnetic structure of nucleons. IV – Charge distribution of the proton –

Prog. Theor. Phys. **23** 1189–1203 (6/1960), with K. Hiida and T. Shiozaki

[17] Electromagnetic structure of nucleons. V – Numerical results of three-pion-state contributions –

Prog. Theor. Phys. **24** 414–417 (8/1960), with K. Hiida

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **24** 688 (1960)

[18] On the validity of multiple dispersion relations

Prog. Theor. Phys. **24** 1275–1295 (12/1960)

[19] Remarks on Eden's "proof" of the Mandelstam representation

Prog. Theor. Phys. **25** 155 (1/1961)

[20] Validity of the integral representations for the vertex part in perturbation theory

Prog. Theor. Phys. **25** 296–297 (2/1961)

[21]* Parametric integral formulas and analytic properties in perturbation theory

Prog. Theor. Phys. Suppl. **18** 1–81 (9/1961)

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **26** 806 (1961)

[22] Integral representations for scattering amplitudes in perturbation theory

Prog. Theor. Phys. **26** 337–355 (9/1961)

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **28** 406 (1962)

[23] Integral representations for scattering amplitudes in perturbation theory. II

Prog. Theor. Phys. **26** 927–941 (12/1961)

[24] Proof of partial-wave dispersion relations in perturbation theory

Phys. Rev. **126** 1225–1226 (5/1962)

[25] Fundamental properties of perturbation-theoretical integral representations

Phys. Rev. **127** 1380–1387 (8/1962)

[26] Integral representations for production amplitudes in perturbation theory

J. Math. Phys. **3** 1139–1146 (11-12/1962)

[27] Partial-wave Bethe-Salpeter equation

Phys. Rev. **130** 1230–1235 (5/1963)

Erratum: *Phys. Rev.* **131** 2841 (1963)

[28] Invariant solutions of the exact Bethe-Salpeter equations in general-mass case

J. Math. Phys. **4** 1229–1235 (10/1963)

[29] Remarks on the double dispersion approach to the Bethe-Salpeter equation

J. Math. Phys. **4** 1235–1240 (10/1963)

[30] Fundamental properties of perturbation-theoretical integral representations. II

J. Math. Phys. **4** 1385–1392 (11/1963)

[31] External mass singularity

J. Math. Phys. **4** 1539–1541 (12/1963)

[32] Perturbation-theoretical integral representation and the high-energy behaviors of the scattering amplitude

Phys. Rev. **133** B214–B219 (1/1964)

[33] Perturbation-theoretical integral representation and the high-energy behaviors of the

scattering amplitude. II
Phys. Rev. **133** B1224–B1231 (3/1964)

[34] Asymptotic behavior of the scattering amplitude and normal and abnormal solutions of the Bethe-Salpeter equation
Phys. Rev. **135** B1430–B1436 (9/1964)

[35] Fundamental properties of perturbation-theoretical integral representations. III
J. Math. Phys. **5** 1458–1473 (10/1964)

[36] High energy asymptotic expansion of the Green's function for forward scattering
Nuovo Cimento (X) **34** 795–798 (11/1964)

[37] Analyticity of the absorptive part of the scattering amplitude
Phys. Rev. Letters **13** 677–678 (11/1964)

[38] Asymptotic behavior of the scattering amplitude and normal and abnormal solutions of the Bethe-Salpeter equation. II
Phys. Rev. **136** B1830–B1838 (12/1964)

[39] Goldstein's Bethe-Salpeter equation and asymptotic behavior of a related scattering amplitude
Phys. Rev. **137** B1352–B1357 (3/1965)

[40] Normalization condition and normal and abnormal solutions of the Bethe-Salpeter equation
Phys. Rev. **138** B1182–B1192 (6/1965)
Erratum: *Phys. Rev.* **139** AB1 (1965)

[41] Normalization condition and normal and abnormal solutions of the Bethe-Salpeter equation. II
Phys. Rev. **139** B1401–B1406 (9/1965)

[42] Multiple poles in the scattering Green's function
Phys. Rev. **140** B947–B956 (11/1965)

[43] Poles of the proper vertex function in the Bethe-Salpeter formalism
J. Math. Phys. **7** 698–701 (4/1966)

[44] Covariant quantization of the electromagnetic field in the Landau gauge
Prog. Theor. Phys. **35** 1111–1116 (7/1966)

[45] Ordinary and generalized Bethe-Salpeter equations in the unequal-mass case
Phys. Rev. **147** 1153–1160 (6/1966)

[46] Propagator and vertex function of a bound state in the Green's function formalism
Prog. Theor. Phys. **36** 799–819 (10/1966)

[47] On the validity of the Regge formula in the unequal-mass case
Prog. Theor. Phys. **37** 618–631 (3/1967)

[48] General solutions to the Bethe-Salpeter equation of the unequal-mass Wick-Cutkosky

model

Prog. Theor. Phys. **38** 226–245 (7/1967)

[49] Quantum electrodynamics in the general covariant gauge

Prog. Theor. Phys. **38** 881–891 (10/1967)

[50] Classical motion of particles and the physical-region singularity of the Feynman integral

Prog. Theor. Phys. **39** 768–771 (3/1968)

[51] Multiple poles in the scattering Green's function and the lightlike limit of the Bethe-Salpeter amplitude

Prog. Theor. Phys. **39** 1585–1597 (6/1968)

[52] Duality between the Feynman integral and a perturbation term of the Wightman function

Prog. Theor. Phys. **40** 167–177 (7/1968), with M. Minami

[53] Proof of the factorizability theorem conjectured by Sciarrino and Toller

Prog. Theor. Phys. **40** 1137–1142 (11/1968)

[54] General theory of multiple poles and coinciding simple poles

Prog. Theor. Phys. **41** 233–251 (1/1969)

[55] Daughter trajectories, the Freedman-Wang cancellation and multiple Regge poles

Prog. Theor. Phys. **41** 516–526 (2/1969)

[56] Coinciding simple poles in the scattering Green's function

Prog. Theor. Phys. **41** 780–787 (3/1969)

[57] Unequal-mass conspiracy for arbitrary spins

Prog. Theor. Phys. **41** 1094–1108 (4/1969), with N. Seto

[58]* A general survey of the theory of the Bethe-Salpeter equation

Prog. Theor. Phys. Suppl. **43** 1–81 (8/1969)

[59] Reality of the eigenvalues of the Bethe-Salpeter equation

Prog. Theor. Phys. **42** 402–407 (8/1969), with S. Naito

[60] Feynman-parametric formula for the Hankel-transformed position-space Feynman integral

Prog. Theor. Phys. **42** 966–977 (10/1969)

[61] Four-point and five-point Veneziano-type formulas on the basis of spectral representations

Phys. Rev. **D 2** 288–292 (7/1970)

[62] An axiomatic formulation of the theory of coinciding simple poles and multiple poles

J. Math. Phys. **11** 2970–2982 (10/1970)

[63] Crossing-symmetric decomposition of the five-point and six-point Veneziano formulas into tree-graph integrals

Prog. Theor. Phys. **45** 436–450 (2/1971)

[64] Crossing-symmetric decomposition of the n-point Veneziano formulas into tree-graph integrals. I

Prog. Theor. Phys. **45** 451–470 (2/1971)

[65] Lorentz noninvariance of the complex-ghost relativistic field theory

Phys. Rev. **D 3** 811–814 (2/1971)

[66] Crossing-symmetric decomposition of the n-point Veneziano formulas into tree-graph integrals. II – Koba-Nielsen representation –

Prog. Theor. Phys. **45** 919–926 (3/1971)

[67] Remarks on the dipole-ghost scattering states

Phys. Rev. **D 3** 1343–1346 (3/1971)

[68] Remarks on the complex-ghost relativistic field theory

Phys. Rev. **D 3** 3235–3237 (6/1971)

[69] Vector-scalar sector solutions to the spinor-spinor Bethe-Salpeter equation

J. Math. Phys. **12** 1578–1582 (8/1971)

[70] Integral representation for the forward scattering amplitude

Phys. Rev. **D 4** 2571–2573 (10/1971)

[71] Massive vector field and the electromagnetic field in the Landau gauge

Phys. Rev. **D 5** 1324–1330 (3/1972)

[72] Covariant formulation of the complex-ghost relativistic field theory and the Lorentz noninvariance of the S-matrix

Phys. Rev. **D 5** 1968–1975 (4/1972)

[73] Remarks on the infinite-component solutions to the Bethe-Salpeter equation

Prog. Theor. Phys. **47** 2148–2150 (6/1972), with K. Seto

[74] Remarks on Scherk's paper entitled "Zero-slope limit of the dual resonance model"

Prog. Theor. Phys. **48** 355–356 (7/1972)

[75] On the Bethe-Salpeter amplitudes obtained by means of the stereographic projection in the Wick-Cutkosky model

Prog. Theor. Phys. **48** 2066–2076 (12/1972)

[76] Indefinite-metric quantum field theory of genuine and Higgs-type massive vector fields

Prog. Theor. Phys. **49** 640–651 (2/1973)

[77] Acausality and renormalizability

Prog. Theor. Phys. **49** 1376–1377 (4/1973)

[78]* Indefinite-metric quantum field theory

Prog. Theor. Phys. Suppl. **51** 1–95 (1972) (publ.5/1973)

[79] Quantum field theory and the coloring problem of graphs

Comm. Math. Phys. **32** 167–181 (7/1973)

[80] Quantum field theory with spontaneous breakdown of the chiral-gauge invariance
Prog. Theor. Phys. **50** 1388–1396 (10/1973)

[81] Is the two-particle scattering amplitude always a boundary value of a real analytic function?
Prog. Theor. Phys. **51** 912–919 (3/1974)

[82] A way out of a formal difficulty encountered in the Landau-gauge quantum electrodynamics
Prog. Theor. Phys. **51** 952–953 (3/1974)

[83] Ward-Takahashi identities in quantum field theory with spontaneously broken symmetry
Prog. Theor. Phys. **51** 1183–1192 (4/1974)

[84] Remarks on the asymptotic-field approach to the gauge theory
Prog. Theor. Phys. **52** 1072–1074 (9/1974), with K. R. Ito

[85] The Lehmann-Symanzik-Zimmermann formalism for manifestly covariant quantum electrodynamics
Prog. Theor. Phys. **52** 1929–1945 (12/1974)

[86] On the eigenvalues of the Wick-Cutkosky model
Prog. Theor. Phys. **53** 797–802 (3/1975), with F. Tanaka

[87] Dipole-ghost Goldstone bosons in the Higgs model and in the Schwinger model
Prog. Theor. Phys. **54** 840–847 (9/1975)

[88] A possible field-theoretical model of quark confinement
Prog. Theor. Phys. **54** 1213–1217 (10/1975)

[89] Remarks on the Bethe-Salpeter equation in a model with dynamical Higgs mechanism
Prog. Theor. Phys. **55** 604–609 (2/1976), with K. Yokoyama

[90] Complex-dimensional invariant delta functions and lightcone singularities
Comm. Math. Phys. **48** 97–118 (6/1976)

[91] Vector field with a bare mass and the Higgs mechanism
Prog. Theor. Phys. **56** 972–980 (9/1976), with M. Konoue

[92] Free massless scalar field in two-dimensional space-time
Prog. Theor. Phys. **57** 269–278 (1/1977)

[93] Operator solutions in terms of asymptotic fields in the Thirring and Schwinger models
Prog. Theor. Phys. **57** 580–592 (2/1977)

[94] Operator solutions in terms of asymptotic fields in the Thirring and Schwinger models. II
Prog. Theor. Phys. **57** 1025–1037 (3/1977)

[95] Operator solutions in terms of asymptotic fields in the Schroer model
Prog. Theor. Phys. **57** 1079–1081 (3/1977)

[96] Two-dimensional quantum field theories containing a massless scalar field

Letters Math. Phys. **1** 361–366 (4/1977)

[97] Null-plane quantization and Haag's theorem

Letters Math. Phys. **1** 371–374 (4/1977), with H. Yabuki

[98] A consistent formulation of the null-plane quantum field theory

Nucl. Phys. **B 122** 15–28 (4/1977), with K. Yamawaki

[99] Lorentz transformation properties in the Thirring and Schwinger models

Prog. Theor. Phys. **58** 1007–1013 (9/1977)

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **60** 326 (1978)

[100] Operator solutions in terms of asymptotic fields in the pre-Schwinger model

Prog. Theor. Phys. **58** 1580–1584 (11/1977)

[101] Reconstruction of the Lowenstein-Swieca solution from the asymptotic-field one in the Schwinger model

Prog. Theor. Phys. **58** 1927–1934 (12/1977)

[102] Remarks on the Robinson-Greenberg theorem and fundamental properties of the asymptotic field

Prog. Theor. Phys. **59** 242–247 (1/1978), with I. Ojima

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **59** 681 (1978)

[103] Asymptotic completeness and confinement in the massive Schwinger model

Prog. Theor. Phys. **59** 607–618 (2/1978)

[104] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity

Prog. Theor. Phys. **59** 972–985 (3/1978)

[105] Dipole-ghost gauge theory as a possible model of the gluon

Prog. Theor. Phys. **59** 1043–1044 (4/1978)

[106] Remarks on the indefinite-metric quantum field theory of general relativity

Prog. Theor. Phys. **59** 2175–2177 (6/1978)

[107] A new way of describing the Lie algebras encountered in quantum field theory

Prog. Theor. Phys. **60** 284–294 (7/1978)

[108] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. II – Commutation relations –

Prog. Theor. Phys. **60** 1190–1203 (10/1978)

[109] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. III – Poincaré generators –

Prog. Theor. Phys. **60** 1890–1899 (12/1978)

[110] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. IV – Background curved space-time –

Prog. Theor. Phys. **61** 1536–1549 (5/1979)

[111] Proof of the exact masslessness of gravitons

Phys. Rev. Letters **43** 91–92 (7/1979), with I. Ojima

[112] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. V – Vierbein formalism –

Prog. Theor. Phys. **62** 779–792 (9/1979)

[113] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. VI – Commutation relations in the vierbein formalism –

Prog. Theor. Phys. **62** 1101–1111 (10/1979)

[114] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. VII – Supplementary remarks –

Prog. Theor. Phys. **62** 1385–1395 (11/1979)

[115] On the general validity of the unitarity proof in the Kugo-Ojima formalism of gauge theories

Prog. Theor. Phys. **62** 1396–1402 (11/1979)

[116] Free massless scalar field in two-dimensional space-time: revisited

Z. Physik **C 4** 17–25 (2/1980)

[117] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. VIII – Commutators involving b_ρ –

Prog. Theor. Phys. **63** 656–667 (2/1980)

[118] Possible resolution of the Goto-Imamura difficulty without introducing the Schwinger term

Prog. Theor. Phys. **63** 1823–1826 (5/1980)

[119] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. IX – "Choral" of symmetries –

Prog. Theor. Phys. **63** 2078–2094 (6/1980)

[120] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. X – Sixteen-dimensional superspace –

Prog. Theor. Phys. **64** 639–650 (8/1980)

[121] Superalgebras of non-Abelian gauge theories in the manifestly-covariant canonical formalism

Z. Physik **C 6** 155–160 (10/1980), with I. Ojima

Erratum: *Z. Physik* **8** 94 (1981)

[122] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XI – Structure of spontaneous breakdown of the superalgebra –

Prog. Theor. Phys. **65** 728–739 (2/1980), with I. Ojima

[123] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XII – Extended superalgebra and its spontaneous breakdown –

Prog. Theor. Phys. **65** 1041–1051 (3/1981), with I. Ojima

[124] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XIII – Perturbation-theoretical approach –
Prog. Theor. Phys. **65** 1719–1731 (5/1981), with K. Yamagishi

[125] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XIV – Sixteen-dimensional Noether supercurrents and general linear invariance –
Prog. Theor. Phys. **66** 1843–1857 (11/1981)

[126] Singularity-free canonical theory of gauge fields in the axial gauge
Prog. Theor. Phys. **67** 965–976 (3/1982)

[127] Comments on the bosonization in massless two-dimensional models
Prog. Theor. Phys. **68** 287–293 (7/1982)

[128] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XV – Tensorlike four-dimensional commutation relation –
Prog. Theor. Phys. **68** 947–959 (9/1982)

[129] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XVI – Extension of tensorlike commutation relations –
Prog. Theor. Phys. **69** 1617–1630 (5/1983)

[130] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XVII – Geometric commutation relation and four-dimensional (anti-)commutator between supercoordinates –
Prog. Theor. Phys. **70** 551–562 (8/1983)

[131] Eikonal and exact identities in the problem of infrared-divergence cancellation
Phys. Rev. **D 28** 2112–2113 (10/1983)

[132] Indispensability of indefinite metric in the axial gauge
Phys. Letters **B 131** 381–382 (11/1983)

[133]* Manifestly covariant canonical formalism of quantum gravity – Systematic presentation of the theory –
Publications RIMS **19** 1095–1137 (11/1983)

[134] Color confinement in quantum chromodynamics
Prog. Theor. Phys. **71** 1359–1365 (6/1984), with I. Ojima

[135] Inequivalent canonical quantization in quantum gravity
Prog. Theor. Phys. **71** 1385–1396 (6/1984)

[136] Color confinement in quantum chromodynamics. II
Prog. Theor. Phys. **72** 1197–1206 (12/1984), with I. Ojima

[137] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XVIII – Proof of the geometric commutation relation –
Prog. Theor. Phys. **72** 1233–1239 (12/1984)

[138] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XIX – Gravitational Pauli-Jordan D function –
Prog. Theor. Phys. **73** 496–503 (2/1985), with H. Kanno

[139] Local-gauge commutation relation for general gauge fixing in the non-Abelian gauge theory
Prog. Theor. Phys. **73** 1016–1024 (4/1985)

[140] Four-dimensional commutation relation realizing the local gauge transformation property in the non-Abelian gauge theory
Z. Physik **C 28** 407–412 (8/1985), with H. Kanno

[141] Indefinite-metric quantum field theory of general relativity. XX – Superalgebra unifying quantum gravity and quantum Yang-Mills field in the Suzuki gauge –
Prog. Theor. Phys. **74** 881–888 (10/1985), with M. Abe

[142] De Donder condition and the gravitational energy-momentum pseudotensor in general relativity
Prog. Theor. Phys. **75** 1351–1358 (6/1986)

[143]* On the unification of quantum gravity and particle physics
Prog. Theor. Phys. Suppl. **86** 203–207 (8/1986)

[144]* Quantum gravity and spacetime structure
Particles and Nuclei, Essays in honor of the 60th birthday of Professor Yoshio Yamaguchi, edited by H. Terazawa (World Scientific, 1986) 297–303

[145] Local supersymmetry different from supergravity
Prog. Theor. Phys. **77** 1533–1541 (6/1987)

[146]* Nishijima's work on gauge theory
Wandering in the Fields, Festschrift for Professor Kazuhiro Nishijima on the occasion of his sixtieth birthday, edited by K. Kawarabayashi and A. Ukawa (World Scientific, 1987) 95–111

[147] New local supersymmetry of the vierbein formalism and the Dirac theory
Prog. Theor. Phys. **78** 704–718 (9/1987), with M. Abe

[148] Kerr metric, de Donder condition and gravitational energy density
Prog. Theor. Phys. **78** 1186–1201 (11/1987) , with M. Abe and S. Ichinose

[149] Complete gauge fixing in the new local supersymmetry of the vierbein formalism of Einstein gravity
Prog. Theor. Phys. **79** 227–239 (1/1988), with M. Abe

[150] BRS-invariant Lagrangian density in the new local supersymmetry of the vierbein formalism of Einstein gravity
Prog. Theor. Phys. **79** 240–249 (1/1988), with M. Abe

[151]* Review of the Wick-Cutkosky model

Prog. Theor. Phys. Suppl. **95** 1–24 (10/1988)

[152] Supercurvature in the $OSp(N,2;\mathrm{C})$ extension of local Lorentz symmetry
Prog. Theor. Phys. **80** 731–741 (10/1988), with M. Abe

[153] Supersymmetric extension of the three-dimensional local Lorentz symmetry and the Chern-Simons term
Prog. Theor. Phys. **80** 913–921 (11/1988), with M. Abe

[154] Asymptotic completeness and the three-dimensional gauge theory having the Chern-Simon term
Int. J. Mod. Phys. **A 4** 1055–1064 (3/1989)

[155] Supersymmetric extension of local Lorentz symmetry
Int. J. Mod. Phys. **A 4** 2837–2859 (7/1989), with M. Abe

[156]* New local supersymmetry in the framework of Einstein gravity
Algebraic Analysis, Papers dedicated to Professor Mikio Sato on the occasion of his sixtieth birthday, edited by M. Kashiwara and T. Kawai (Academic Press, 1988) Vol.2 517–526

[157]* Brief review of the new local supersymmetry in the vierbein formalism of Einstein gravity
Perspectives on Particle Physics, In commemoration of the sixtieth birthday of Professor H. Miyazawa, edited by S. Matsuda, T. Muta and R. Sasaki (World Scientific, 1989) 338–350

[158] BRS transformation as a nonlinear realization of the BRS algebra and its extended one
Prog. Theor. Phys. **82** 420–432 (8/1989), with M. Abe

[159] Interchanging the roles of spacetime and Faddeev-Popov ghost in quantum Einstein gravity
Prog. Theor. Phys. **83** 151–160 (1/1990)

[160] Interchanging the roles of spacetime and Faddeev-Popov ghost in quantum Einstein gravity. II
Prog. Theor. Phys. **83** 1054–1063 (5/1990)

[161]* Critical review of the theory of quantum electrodynamics
Quantum Electrodynamics, edited by T. Kinoshita (World Scientific, 1990) 36–80

[162] How to solve the operator formalism of quantum Einstein gravity
Prog. Theor. Phys. **85** 391–405 (2/1991), with M. Abe

[163] Zweibein operator formalism of two-dimensional quantum gravity
Prog. Theor. Phys. **86** 517–545 (8/1991), with M. Abe

[164] Unitary theory of two-dimensional quantum gravity and its exact covariant operator solution

Int. J. Mod. Phys. **A 6** 3955–3971 (9/1991), with M. Abe

[165] Wightman functions in covariant operator formalism of two-dimensional quantum gravity

Prog. Theor. Phys. **86** 1087–1109 (11/1991), with M. Abe

[166] Wightman functions in covariant operator formalism of two-dimensional quantum gravity. II – Composite fields –

Prog. Theor. Phys. **87** 495–505 (2/1992), with M. Abe

[167] Wightman functions in covariant operator formalism of two-dimensional quantum gravity. III – New definition –

Prog. Theor. Phys. **87** 757–769 (3/1992), with M. Abe

[168] Indefiniteness of the conformal anomaly of the string theory in the harmonic gauge

Mod. Phys. Letters **A 7** 1799–1804 (6/1992) , with M. Abe

[169] Perturbative reconstruction of the exact covariant solution to the two-dimensional quantum gravity

Int. J. Mod. Phys. **A 7** 6405–6420 (10/1992), with M. Abe

[170] How to solve the operator formalism of gauge theories and quantum gravity in the Heisenberg picture. I – Quantum electrodynamics –

Prog. Theor. Phys. **88** 975–991 (11/1992), with M. Abe

[171] How to solve the operator formalism of gauge theories and quantum gravity in the Heisenberg picture. II – Generally covariantized Liouville-like theory –

Prog. Theor. Phys. **89** 231–244 (1/1993), with M. Abe

[172] How to solve the operator formalism of gauge theories and quantum gravity in the Heisenberg picture. III – Two-dimensional nonabelian BF theory –

Prog. Theor. Phys. **89** 501–522 (2/1993), with M. Abe

[173] How to solve the operator formalism of gauge theories and quantum gravity in the Heisenberg picture. IV – Cauchy problem involving noncommutative quantities –

Prog. Theor. Phys. **90** 705–716 (9/1993), with M. Abe

[174] New diagrammatic method for quantum field theory in the Heisenberg picture. I – Two-dimensional quantum gravity –

Prog. Theor. Phys. **90** 109–1109 (11/1993), with M. Abe

Errata: *Prog. Theor. Phys.* **91** 188 (1994)

[175] 非可換量を含む線形常微分方程式に対する演算子法

日本応用数理学会論文誌 **3** 445–450 (12/1993), with M. Abe

[176] New diagrammatic method for quantum field theory in the Heisenberg picture. II – Various models –

Prog. Theor. Phys. **90** 1319–1342 (12/1993), with M. Abe

[177] New diagrammatic method for quantum field theory in the Heisenberg picture. III

– Its proof in two-dimensional quantum gravity –

Prog. Theor. Phys. **92** 449–464 (8/1994), with M. Abe

[178] Reply to "On the uniqueness of the conformal anomaly in nonconformal gauges"

Mod. Phys. Letters **A 9** 3505–3507 (12/1994), with M. Abe

[179] Unreasonable postulate in the perturbative approach to quantum gravity

Gen. Rel. Grav. **27** 65–69 (1/1995)

[180] Nonrenormalizability may be superficial in the covariant formalism of quantum gravity

Mod. Phys. Letters **A 10** 1501–1506 (7/1995), with M. Abe

[181] Operator-formalism approach to two-dimensional quantum gravity in the lightcone gauge

Prog. Theor. Phys. **94** 621–635 (10/1995), with M. Abe

[182] A simple example of BRS singlet pair

Prog. Theor. Phys. **95** 831–834 (4/1996), with M. Abe

[183] Huge space-dependent symmetry in the lightcone-gauge two- dimensional quantum gravity

Int. J. Mod. Phys. **A 11** 2623–2642 (6/1996), with M. Abe

[184] Subtlety in the anomaly calculation of string theory in the harmonic gauge

Prog. Theor. Phys. **96** 1281–1290 (12/1996) , with M. Abe

[185] Resolution of the BRS-singlet-pair problem in quantum Einstein gravity

Nucl. Phys. (Particle Physics) **B486** 466–478 (2/1997), with M. Abe and I. Ojima

[186] Operator ordering index method for multiple commutators and Suzuki's quantum analysis

J. Math. Phys. **38** 547–555 (2/1997), with M. Abe and N. Ikeda

[187] Question on $D = 26$ – String theory *versus* quantum gravity –

Int. J. Mod. Phys. **A 13** 3081–3099 (7/1998), with M. Abe

[188] Proof of the gauge independence of the conformal anomaly of bosonic string in the sense of Kraemmer and Rebhan

Prog. Theor. Phys. **100** 411–421 (8/1998), with M. Abe

[189] Anomaly problem in a simple model analogous to the lightcone-gauge two-dimensional quantum gravity

Prog. Theor. Phys. **100** 1063–1075 (11/1998), with M. Abe

[190] $D = 26$ and exact solution to the conformal-gauge two-dimensional quantum gravity

Int. J. Mod. Phys. **A 14** 521–536 (2/1999), with M. Abe

[191] Construction of an identically nilpotent BRS charge in the Kato-Ogawa string theory

Int. J. Mod. Phys. **A 14** 1357–1377 (4/1999), with M. Abe

[192] Perturbative or path-integral approach *versus* operator-formalism approach

Prog. Theor. Phys. **102** 1187–1200 (12/1999), with M. Abe

[193] T*-product and false non-conservation of angular momentum in the pion decay
Mod. Phys. Letters **A 17** 89–93 (2/2002)

[194] Exact solution to the two-dimensional BF and Yang-Mills theories in the light-cone gauge
Int. J. Mod. Phys. **A 17** 1491–1502 (6/2002), with M. Abe

[195]* Method for solving quantum field theory in the Heisenberg picture
Prog. Theor. Phys. **111** 301–337 (3/2004)

[196] Question on the existence of gravitational anomalies
Prog. Theor. Phys. **115** 1151–1166 (6/2006), with M. Abe

著　書

[B1] Graph Theory and Feynman Integrals
Gordon and Breach, 1971; 223pp.

[B2] 場の量子論
培風館、新物理学シリーズ 19, 1975; 329pp.

[B3] 相対論的量子論 – 重力と光の中にひそむ「お化け」 –
講談社、ブルーバックス B470, 1981; 236pp.

[B4] 重力場の量子論,「物理学最前線 3」中
大槻義彦編、共立出版、 1983; 75–161

[B5] Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity
with I. Ojima, World Scientific, World Scientific Lecture Notes in Physics 27, 1990; 434pp.

[B6] 場と時空
日本評論社、1992; 172pp.

[B7] ファインマン・ダイアグラム
大槻義彦編、パリティ物理学コース　クローズアップ、1993; 117pp.

[B8] 場の量子論による素粒子の記述「大学院素粒子物理 1　素粒子の基本的性質」中
中村誠太郎編、講談社サイエンティフィク、1997; 55–96

国際会議報告

[C1] Daughter trajectories and Bethe-Salpeter ghost
1967 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics – Fundamental Particle Physics – ,
edited by G. Takeda and Y. Hara, Syōkabō, 161–167 (1968)

[C2] Indefinite-metric quantum field theory with spontaneously broken gauge invariance
Proceedings of the International Symposium on High Energy Physics,
edited by Y. Hara *et al.*, University of Tokyo, 578–591 (1973)

[C3] Quantum field-theoretical approach to spontaneously broken gauge invariance
Proceedings of the International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics,
edited by H. Araki, Springer Verlag, 245–248 (1975)

[C4] Complex-dimensional integral and light-cone singularities
Publications of RIMS Vol. 12, Supplement; Proceedings of Oji Seminar on Algebraic Analysis, 1976,
edited by M. Sato, 343–346 (1977)

[C5] Manifestly-covariant canonical formalism of non-Abelian gauge theory and quantum gravity
Proceedings of the 19th International Conference on High Energy Physics, Tokyo, 1978,
edited by S. Homma *et al.*, Physical Society of Japan, 523–536 (1979)

[C6] Manifestly-covariant canonical formalism of quantum gravity
Proceedings of the Japan-Italy Symposium on Fundamental Physics, Tokyo, 1981,
edited by S. Fukui and T. Toyoda, 90–98 (1981)

[C7] Manifestly-covariant canonical formalism of quantum gravity – A brief survey –
Proceedings of the International Symposium on Gauge Theory and Gravitation, Nara, 1982,
edited by K. Kikkawa, N. Nakanishi and H. Nariai, Springer-Verlag, 171–183 (1983)

[C8] Manifestly covariant canonical formalism of quantum gravity
Proceedings of the Third Marcel Grossmann International Conference on the Recent Developments of General Relativity, Shanghai, 1982,
edited by Hu Ning, Science Press and North Holland, 1161–1164 (1983)

[C9] Symmetry properties of the manifestly covariant canonical formalism of quantum gravity
XIIIth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, College Park, 1984,
edited by W. W. Zachary, World Scientific, 512–515 (1984)

[C10] Local-gauge commutation relation in non-Abelian gauge theory
Proceedings of 14th ICGTMP, Seoul, 1985,
edited by Y. M. Cho, World Scientific, 591–594 (1986)

[C11] Local supersymmetry of gravity different from supergravity
Proceedings of the Fifth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Perth, 1988,
edited by D. G. Blair, M. J. Buckingham and R. Ruffini, World Scientific, 861–864 (1989)

[C12] Review of the Bethe-Salpeter equation
1991 Nagoya Spring School on Dynamical Symmetry Breaking, Nakatsugawa, 1991,
edited by K. Yamawaki, World Scientific, 246–271 (1992)

[C13] How to solve the operator formalism of quantum Einstein gravity without using c-number background metric
Proceedings of the Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Kyoto, 1991,
edited by H. Sato, T. Nakamura and R. Ruffini, World Scientific, 1249–1252 (1992)

[C14] Relative time and abnormal solutions in the theory of the Bethe-Salpeter equation
Proceedings of the International Symposium on Extended Objects and Bound Systems, Karuizawa, 1992,
edited by O. Hara *et al.*, World Scientific, 109–115 (1992)

[C15] How to solve the covariant operator formalism of gauge theories and quantum gravity in the Heisenberg picture
Proceeding of the XIXth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physica, Salamanca, 1992,
edited by J. Mateos-Guilarte *et al.*, CIEMAT, Vol. II, 142–145 (1993)

[C16] Covariant operator formalism of two-dimensional quantum gravity
Proceedings of YAMADA CONFERENCE 20th ICGTMP, Toyonaka, 1994,
edited by A. Arima, T. Eguchi and N. Nakanishi, World Scientific, 121–124 (1995)

[C17] BRS symmetry in quantum gravity – Covariant operator formalism of quantum Einstein gravity –
Proceedings of the International Symposium on the BRS symmetry on the Occasion of Its 20th Anniversary, Kyoto, 1995,
edited by M. Abe, N. Nakanishi and I. Ojima, Universal Academy Press, 63–80 (1996)

[C18] Illusory are the conventional anomalies in the conformal-gauge two-dimensional quantum gravity
Proceedings of the 30th International Conference on HIGH ENERGY PHYSICS, Vol. II, *Osaka, 2000,*
edited by C. S. Lim and T. Yamanaka, World Scientific, 1402–1404 (2001)

[C19] Theory of a clothed unstable particle
Proceedings of the International Symposium on Hadron Spectroscopy Chiral Symmetry and Relativistic Description of Bound Systems, Tokyo 2003,
edited by S. Ishida *et al.*, KEK, 38–43 (2003)

「素粒子論研究」掲載の論文

任意次数摂動項の一般積分公式及び Power-Counting Theorem	**12**	217-229	1956.7
摂動項の一般積分公式とその応用	**13**	89-104	1956.9
Lehmann 式くりこみについて	**13**	253-257	1956.11
2 成分 neutrino による弱い相互作用の systematization	**15**	118-126	1957.6
赤外発散の一般理論	**15**	344-359	1957.8
崩壊確率の計算について	**16**	164-167	1957.11
ニュートリノ交換で long range force がでるか	**17**	84-87	1958.3
着物を着た不安定粒子	**17**	153-168	1958.4
Blockhintsev の論文へのコメント	**17**	606-608	1958.8
分散公式の摂動論的証明	**18**	213-222	1958.11
Bethe-Salpeter 方程式の摂動論的解法	**21**	193-198	1960.2
[総合報告] 摂動論における解析性について	**21**	250-290	1960.2
[総合報告] ヤンミルズ場と重力場の不定計量の場の量子論	**56**	185-196	1978.2
九後の論文 "Schwinger model で *U(1)* 問題を考える"へのコメント	**60**	127-130	1979.11
アインシュタイン理論とディラック理論の融合	**60**	131-134	1979.12
グルーオンの閉じ込めについて	**60**	367-368	1980.3
[放談室] 超宇宙仮説	**68**	139-141	1984.1
[放談室] スーパーストリング病に関する所見	**72**	345-346	1986.3
[西島退官記念講演] *B* 場形式導入の背景	**81**	164-167	1986.6
Covariant operator formalism of quantum Einstein gravity — Brief review and recent development —	**86**	D64-D81	1993.1
[放談室] 臨界次元という概念はゲージによっては定義できない (阿部と共著)	**88**	8-10	1993.10
Metric signature in quantum gravity (阿部と共著)	**91**	191-193	1995.9
[放談室] 素粒子論における 10 の迷信	**100**	95-104	1999.11
T*積の怪 — 共変的摂動論 経路積分法による計算の落とし穴 —	**100**	167-173	1999.12
[放談室] Extra dimension は存在しうるのか — 基研研究会「場の量子論 2000」印象記 —	**101**	320-321	2000.9
[放談室] Extra dimension は存在しうるのか — 補足 —	**102**	43-44	2001.1
[放談室] T. D. Lee との確執	**106**	122-128	2003.2
[放談室] 究極理論における時空とはどんなものだろうか	**110**	50-66	2004.10
旧人類と新人類の重力アノーマリー	**113**		2006.7

学会誌・雑誌記事・分担執筆など

場の量子論における分散式について（最近の研究から） 日本物理学会誌 **14** 270-271 (1959.5)

異常しきい値（最近の研究から） 日本物理学会誌 **15** 330-331 (1960.6)

場の量子論における解析性（解説） 日本物理学会誌 **16** 454-462 (1961.7)

[翻訳] E. P. Wigner「自然科学における数学の (不合理な) 有効性について」
　岩波書店「科学」**31** 450-457 (1961.9)

Bethe-Salpeter 方程式と Regge Pole 理論（解説） 日本物理学会誌 **24** 444-449 (1969.7)

Feynman 積分（解説） 日本物理学会誌 **25** 42-46 (1970.1)

素粒子の数学的イメージ 中央公論社「自然」 1970年1月号 61-65

Bethe-Salpeter 方程式の無限成分の解（最近の研究から）
　日本物理学会誌 **28** 209-211 (1973.3)

数学に熱中した高校生のころ (特別寄稿「青春のまっただ中にいる高校進級の諸君に贈る」)
　旺文社「高二時代」1974年3月号 142-143

ファインマン積分について 現代数学社「現代数学」1974年4月号 14-16

ランダウゲージの量子電磁力学（最近の研究から） 日本物理学会誌 **29** 1019-1022 (1974.12)

[文献解説] 日本物理学会「物理学論文選集 189 場の理論 III」(1975.9) (藤川、宇川と共同執筆)

[書評] J. M. Jauch & F. Rohrlich “The Theory of Photons and Electrons” (2nd ed.)
　日本物理学会誌 **32** 74-75 (1977.1)

Goldstone の定理と Higgs 機構 岩波書店「科学」**47** 274-280 (1977.5)

[書評] C. リード (加藤瑞枝訳) 「クーラント 数学の不死鳥」
　中央公論社「自然」 1979年3月号 103

重力場の量子論（解説） 日本物理学会誌 **35** 29-34 (1980.1)

[用語解説] 日本物理学会誌 **35** 59-64 (1980.1) (岩崎、藤川と共同執筆)

素粒子論の基本原理について 海洋出版「月刊フィジクス」1980年4月号 248-257

一般相対論とディラック理論の融合 サイエンス社「数理科学」1980年7月号 41-47
　「別冊 数理科学 場の物理と数理」(1991.4) に再録

重力場の量子論 I 理論構成の背景 岩波書店「科学」**50** 474-480 (1980.8)

重力場の量子論 II その概要と成果 岩波書店「科学」**50** 556-562 (1980.9)

湯川研究室の思い出 岩波書店「科学」**52** 123-125 (1982.2) (特集：湯川秀樹博士と物理学)

重力場の量子論における 16 次元超対称性 サイエンス社「数理科学」1982年6月号 55-59
　「別冊 数理科学 数理物理の展開」(1990.10) に再録

重力場の量子論の構成 三省堂「理科資料」(1982.7)

[書評] 高橋康「初等相対性理論：ジュニアからシニアまで」
　日本物理学会誌 **39** 391-392 (1984.5)

[用語解説] 培風館「物理学辞典」の 36 の項目 (1984.9)

ゲージ理論へのプロローグ 日本評論社「数学セミナー」1984年10月号 33-39

最近の統一理論への歩み　海洋出版「月刊フィジクス」1984 年 10 月号 606-608
一般座標変換と重力場の量子論　海洋出版「月刊フィジクス」1984 年 10 月号 634-638
[書評] 浅野四郎・浅野誠一「特殊相対性理論の新しい理解の仕方；時空間円線図法」(改訂増補版)
　　日本物理学会誌 **41** 77-78 (1986.1)
[書評] F. Strocchi "Elements of Quantum Mechanics of Infinite Systems"
　　日本物理学会誌 **41** 366 (1986.4)
"超弦理論"症候群　丸善「パリティ」1986 年 9 月号 66-68
並進不変性と場の量子論　サイエンス社「数理科学」1987 年 10 月号 17-21
　　「別冊 数理科学　場の物理と数理」(1991.4) に再録
[書評] 西島和彦「場の理論」 丸善「パリティ」1988 年 2 月号 97
[術語解説] 丸善「物理学大辞典」(1989.3) 309-312, 1100-1102
[書評] ジョルジュ・イフラー「数字の歴史」　朝日新聞社「科学朝日」1989 年 1 月号 92-93
あの頃のこと　岩波書店「湯川秀樹著作集 9　学術編 II」月報 (1989.12)
場　サイエンス社「数理科学」1990 年 5 月号 15-17
　　「別冊 数理科学　物理法則」(1995.10) に再録
場の量子論 (事典の項目) 大阪書籍「現代数理科学事典」71-80 (1991.3)
小学生時代と戦争 京都大学「京大広報」(1992.2) (洛書)
超弦理論は物理になるか　(談話室)　日本物理学会誌 **48** 44-45 (1993.1)
場の量子論 — いつも「正解」だった局所場の理論 —
　　サイエンス社「数理科学」1993 年 10 月号 78-84
　　「臨時別冊 数理科学　20 世紀の物理学」(1998.9) に再録. 追記：21 世紀への課題
[書評] 藤川和男「ゲージ場の理論」　日本物理学会誌 **49** 488 (1994.6) [訂正：**49** 589]
[術語解説] 朝倉書店「数理情報科学事典」873-875, 1067-1070 (1995.11)
正準形式による量子化　サイエンス社「数理科学」1996 年 8 月号 11-18
[書評] 桜井邦明「湯川秀樹　白紙の講義録」　京都民報社「京都民報」(2000.12.17)
数学・場の量子論におけるスピノール　サイエンス社「数理科学」2001 年 7 月号 6-12
プランク質量 — 量子重力に現れる巨大スケール —
　　サイエンス社「数理科学」2003 年 5 月号 49-56
素粒子物理学と重力理論　帝人奨学会 50 周年記念出版「科学技術と未来」239-241 (2003.9)
[分担執筆] **場の量子論へのアプローチ**　朝倉書店「現代物理学の歴史 I
　　— 素粒子・原子核・宇宙 — 」II 素粒子物理 (2004.5)
場の量子論における時間　サイエンス社「数理科学」2004 年 7 月号 30-35