数理解析研究所講究録
1525巻 2006年 15-34

Hrushovski, Wilkie そして Zilber

数学基礎論とその応用
代数幾何，実代数幾何，解析幾何とモデル理論の交流

東海大学理学部　情報数理学科　板井　昌典 (Masanori ITAI)
Department of Mathematical Sciences
Tokai University, Hiratsuka, Japan

目次

1 最近の傾向

1990年代前半は，モデル理論にとって大きな事件が続いた．それらの中でも特に重要なものは，

(1) $\mathbb{R}_{\exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, \exp, 0, 1)$ は，モデル完全かつ順序極小であることの証明．(Wilkieが1991年にChicagoで結果を発表した)

(2) 幾何的モーデル・ラング予想の解決．(Hrushovskiが1993年にNotre Dame大学で発表した)

の2つである．私事で恐縮だが，いずれも最初に結果が発表された学会あるいは研究集会で直接結果を聞く機会に恵まれたので，その点からも強く印象に残っている．またこの2つの結果は，以後モデル理論が実代数幾何，代数幾何へより本格的に応用される道を切り開いた点からも高く評価されるべきである．

一方，Zilberは，一言で言ってしまえば代数曲線のモデル理論と呼べるザリスキー幾何の理論を完成させた後，1990年代半ばからは解析幾何へのモデル理論の応用を構想していた．

彼の提唱した予想の1つに，複素数体 $\mathbb{C}$ に通常の指数関数 exp を付け加えた構造に関するものがある．すなわち，次のような予想をしている．

予想 1 (Zilber, 1996) $\mathbb{C}_{\exp} = (\mathbb{C}, +, \cdot, \exp, 0, 1)$ は擬極小である．

ここで，非可算な1階構造 M は，任意の定義可能部分集合（パラメーターを用いてもよい）X が，$|X| \leq \aleph_0$ または $|M - X| \leq \aleph_0$ をみたすとき M を擬極小と呼ぶ．

本稿では，体に関するモデル理論について，Hrushovski, Wilkie, Zilber の結果および関連する研究成果を中心に現状を概観したい．

1. 代数的閉体に関するもの
    - ACFA と Manin-Mumford 予想の別証明
    - ACVF の仮想元消去
    - Bad field の構成
2. 有限体において Frobenius automorphism が持つ意味について
3. 実数体，実閉体について
    - o-minimal field と実代数幾何
4. 解析的構造のモデル理論について
    - Analytic Zariski structures

2 Hrushovski

Hrushovski の研究は純粋モデル理論から応用モデル理論にわたって幅広くまた深い．ここでは，代数的閉体と有限体に関する研究について解説する．

2.1 代数的閉体に関連した話題

代数的閉体のモデル理論は，数学的構造をモデル理論的視点から研究するという姿勢の原点である．

代数的閉体の性質を環の言語 $\mathcal{L}_{ring} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ を用いて公理化した理論 ACF_p は，Tarski によって量化記号を消去することが証明された．この量化記号消去により，ACF_p の任意のモデル F において，1 階定義可能な部分集合 $X \subseteq F$ は，X または $F - X$ が有限集合であるという性質を持つ．このような性質を持つ理論を強極小理論と呼ぶが，ACF_p は強極小理論の典型例である．

ACF_p は，$\aleph_1$-categorical で $\aleph_0$-categorical でない理論の典型例にもなっている．かくして ACF_p は，謂わば「モデル理論の楽園」であるが，この楽園を出て

- 代数的閉体 K に自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ を付け加えた構造のモデル理論 (ACFA)
- 付値の入った代数的閉体のモデル理論 (ACVF)

が Hrushovski らによって精力的に研究されている．

2.1.1 ACFA

ACFA の華々しい成功例として，Hrushovski による Manin-Mumford 予想 (Raynaud の定理) に対する新証明について概説しよう．

標数 0 の代数閉体 K と $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$ に対して (K, σ) をモデル理論的に考察する．

すなわち，次の性質 $(*)$ をもつような (K, σ) の集まり (クラス) を考える．

$(*)$ K 上定義された，代数的な σ-方程式が，K の拡大モデルで解を持てば
　K でも解を持つ．

このような性質をもつ (K, σ) たちのクラスの性質を 1 階の論理式で書いたものを **ACFA** とおく．ACFA は安定な理論ではなく，単純理論と呼ばれるものの 1 つになっている．

定理 2 (Manin-Mumford 予想，Raynaud の定理 (1983))

- k を数体とする．すなわち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次各大体とする．
- G は k 上定義された代数群で，可換かつ連結とする．
- X を G の部分多様体とする．

このとき G の等分点 $a_1, \cdots, a_n$ と，部分代数群 $G_1, \cdots, G_n$ が存在して，次が成り立っている．

1. 各 i について $a_i + G_i \subseteq X$ かつ
2. $X(k^{\mathrm{alg}}) \cap \mathrm{Tor}(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(a_i + \mathrm{Tor}(G_i)\right)$

結論の 2 番目の主張は，モデル理論において「1 ー基底性」という概念と深く関わっている．

ここでは ACFA における 1-基底群の性質がどう応用されるかに着目し，数体 k 上定義された可換な代数群ではなく，より性質の良いアーベル多様体 A を考えたとき，

$$\mathrm{Tor}_{p'}(A) = \{a \in \mathrm{Tor}(A) : \exists n(na = 0 \wedge p \not| n)\}$$

に対して Manin-Mumford 予想 (Raynaud の定理) が成り立つ様子を概観する．
設定：

- 数体 k の整数環の素イデアルを $\wp$ とする．
- 剰余体 $k_\wp$ (標数 p，元の個数 q の有限体) を考える．
- A の $\wp$ による還元 $A_\wp$ が $k_\wp$ 上定義されたアーベル多様体として，A の次元と同じ次元を持つとき，$\wp$ は A の良い還元 (good reduction) を与えるという．

このような素イデアル $\wp$ を 1 つ固定する．

補題 3 • 自己同型 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}/k)$ と，
1 の冪乗根を根に持たない多項式 $F[T] \in \mathbb{Z}[T]$ が存在して，

- $F(\sigma)$ を $\mathrm{End}(A(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}))$ の元と考えたとき，
- 任意の $a \in \mathrm{Tor}_{p'}(A)$ に対して $F(\sigma)(a) = 0$ となるようにできる．

このような σ の存在は，Weil の古典的な定理によって与えられる．すなわち，$k_\wp$ の Frobenius 自己同型 $\Phi_q : x \longrightarrow x^q$ にたいして，

$$F(\Phi_q)(a) = 0 \quad (\forall a \in A_\wp(k^{\mathrm{alg}}))$$

をみたすような 多項式 $F[T] \in \mathbb{Z}[T]$ の存在は，

- 有限体上定義されたアーベル多様体の自己同型と，
- Frobenius 自己同型の特性多項式に関する Weil の定理

から導かれる．

$\wp$ は A の良い還元を与えているので Φ_q を $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{alg}}/k)$ に持ち上げることができる．Hensel の定理より $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ から $\mathrm{Tor}_{p'}(A_\wp)$ への同型が得られるので，$F(\sigma)$ は $\mathrm{Tor}_{p'}(A)$ で 0 になる．

σ-定義可能な群の 1-基底性については，次の補題が基本的である．

補題 4 • 上で考えた σ の固定体 $\mathrm{Fix}(\sigma) = \{x : \sigma(x) = x\}$ 上定義されたアーベル多様体を A とする．

- $F(T) \in \mathbb{Z}[T]$ とする．
- $H_\sigma = \ker(F(\sigma)) = \{a \in A : F(\sigma)(a) = 0\}$ とおく．

このとき，(1) と (2) は同値である．
(1) H_σ が 1-基底的であること
(2) F が 1 の冪乗根を根に持たないこと

これら２つの補題3, 4を用いて次が証明される．

定理 5

$$\mathrm{Tor}_{p'}(A) \cap X = \bigcup_{i=1}^{M} a_i + \mathrm{Tor}_{p'}(B_i)$$

- 各 B_i は A の部分アーベル多様体で，
- $M \leq c\deg(X)^{(2d+1)(2^{d\cdot\dim(X)})}$．
- 定数 c は A だけに依存する．

したがって，ACFA における「1－基底群」の構造定理の系として，Manin-Mumford 予想が解けるわけである．

2.1.2 ACVF

付値の入った代数的閉体としては，$\mathbb{C}_p$ が典型的な例である．

よく知られているように，p-進体 $\mathbb{Q}_p$ は代数的に閉じていない．$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ をとると，今度は p-進付値に関して完備でない．そこで $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{alg}}$ を完備化した付値体を考えると，代数的に閉じている．この付値体を $\mathbb{C}_p$ と書く．

この $\mathbb{C}_p$ は，代数的に閉じておりかつ付値から定まる位相に関して完備である．また Rigid Analytic Geometry の対象としても重要な体であり，モデル理論的にも興味深い研究対象である．

付値体を研究する場合，基礎になっている体自身の他に，値群 (value group)，剰余体も同時に考察しなければならないから，どのような言語でモデル理論を展開するかが問題になる．

ACVF = Algebraically closed valued fields

の理論では，付値環を用いて付値の性質（たとえば付値の大小）を記述できることを利用して，環の言語に付値環に対応する１変数述語記号だけを付け加えた言語でモデル理論を展開する．

実際，

Definable sets in algebraically closed valued fields.
Part I: elimination of imaginaries.
D. Haskell, E. Hrushovski, D. Macpherson (October 10, 2003)

においてつぎの定理が示されている．

Theorem 1.0.2 Let $(K, R, +, \cdot)$ be an algebraically closed field, with valuation ring R. Then for any imaginary e of K, there is for some n a definable R-submodule of K^n with a code interdefinable with e.

この定理にでてくる仮想元 (imaginary)e というのは，パラメーターを用いずに定義される K の同値関係の同値類のことである．同値類を特定する（規定する）符号の存在を主張するのが仮想元消去である．同値類 e に対して，どのような符号がとれるかを説明するのがこの定理であり，今後，ACVF において幾何的な議論を展開する際には，強力な武器となると思われる．

前述の $\mathbb{C}_p$ の場合，たしかに付値の入った代数的閉体であるからこの定理を適用することができる．その結果，$\mathbb{C}_p$ についてどのような性質が明らかになるかを具体的に考えることは今後の課題である．

さて，上記論文 Part I の続編である

Part II: stable domination and independence

では，さらに議論が発展し

> In ACVF, stable domination coincides with a natural notion of 'orthogonality to the value group'. All notions of independence agree and are well-behaved for stably dominated types. Moreover, if arbitrary base change is allowed, every type becomes stably dominated over its image in the value group.

ということまで分かっている．

このようにして，全体としては「非安定」な構造の中に「安定」な構造を見出すことが可能になってきている．この研究方針は，ACFA の研究においても同様である．

2.2 有限体

Hrushovski の結果を報告する前に，いくつか古典的な結果を復習しておこう．

定理 6 (Hasse) $q = p^n$ とし，有限体 F_q を考える．F_q 上の楕円曲線を E とすると，E の F_q-有理点の個数 N は，

$$|q + 1 - N| \leq 2\sqrt{q}$$

という不等式を満たす．

それはやがて，Lang と Weil によって次の形まで一般化される．

射影空間 P^n の多様体 V が，次元 r，次数 d を持つとき $V_{n,d,r}$ と書くことにする．

定理 7 (Lang, Weil) n, d, r だけに依存する定数 $A(n,d,r)$ が存在して，どんな多様体 $V = V_{n,d,r}$ に対しても，V の F_q-有理点の個数 N に対して

$$|N - q^r| \leq \delta^{r-\frac{1}{2}} + A(n,d,r)q^{r-1}$$

が成り立つ．ただし $\delta = (d-1)(d-2)$ とする．

これら 2 つの定理は，いずれも有限体上で定義された曲線や多様体の「有理点」の個数に関する主張である．

曲線や多様体はいずれもモデル理論的には「定義可能」な対象なので，次の一般化が可能になる．

定理 8 (Chatzidakis, van den Dries, Macintyre, 1992) $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ を論理式とする．ただし，$\overline{x} = (x_1, \cdots, x_n), \overline{y} = (y_1, \cdots, y_m)$.

つぎの性質を持つ有限集合 $D \subset \{0, 1, \cdots, n\} \times \mathbb{Q}^{>0}$ と正の定数 C が存在する．すなわち，各有限体 $\mathbb{F}_q$ と $\overline{a} \in \mathbb{F}^m$ に対して，$\varphi(\mathbb{F}_q^n, \overline{a}) \neq \emptyset$ ならば，

$$(*) \qquad |card(\varphi(\mathbb{F}_q^n, \overline{a})) - \mu q^d| < Cd^{d-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ $(d, \mu) \in D$ が存在する．

さらに各 $(d, \mu) \in D$ に対して，$(*)$ を満たすような $\overline{a} \in \mathbb{F}_q^m$ の集合を定義する論理式が存在する．

このような流れのなかで，Hrushovski はさらにつぎの結果に到達する．
設定：

- V は 代数的閉体 k 上の多様体，$\sigma \in \mathrm{Aut}(\sigma)$
- V^σ は V の定義多項式のパラメーターに σ を施した多項式によって定義される多様体
- $\Phi_q : x \mapsto x^q$, Frobenius 自己同型

定理 9 (Hrushovski, 2004) X を k 上のアフィン多様体，$S \subset (X \times X^{\Phi_q})$ を既約多様体とする．
$\dim(S) = \dim(X) = d, a = [S : X]/[S : X']$ とすると，

$$|S(k) \cap \Phi_q(k)| = aq^d + O(q^{d-\frac{1}{2}})$$

The Elementary Theory of the Frobenius Automorphisms,
E. Hrushovski, arXiv:math. LO/0406514 v1 25 Jun 2004

この定理から，次のモデル理論的な結果が得られる．
設定：

- K は代数的閉体
- $K_q = (K, \Phi_q)$, Frobenius difference field
- $T_\infty = \{\theta : K_q \models \theta(all\ sufficientry\ large)\}$

定理 10 1. T_∞ は決定可能である．

2. $F = \mathbb{F}_q^{\mathrm{alg}}$ とおく．ほとんどすべての $\sigma \in \mathrm{Aut}(\sigma)$ に対して $(F, \sigma) \models \mathrm{ACFA}$

上の主張2において,「ほとんどすべて」というのは，$\mathrm{Aut}(\sigma)$ を Polish group と考え，co-meager を「ほとんどすべて」と考える．

2.3 Bad field（標数 0）の構成

Hrushovski 自身の結果ではないが，彼の「generic construction」によってごく最近構成された（と主張されている）標数 0 の Bad field に関して簡単に報告する．
(DIE BÖSE FARE, Baudisch, Hills, Martin-Pizzaro and Wagner)

ω-安定な群に関する予想として

予想 11 (Cherlin-Zilber) Morley 階数が有限な無限単純群は，代数群である．

が有名である．

定義 12 (Bad field) つぎの性質を持つ Morley 階数が有限な体 F を bad field と呼ぶ．
F は，定義可能で非自明な F より真に小さい，divisible な乗法群を持つ．

Bad field が存在しなければ，Cherlin-Zilber 予想の解決へ大きな前進が期待できる．

予想 13 (Poizat) Bad field は存在するか？

今回，標数 0 の bad fields の存在が示されたことにより．Morley 階数有限な群が従来考えられていたよりさらに複雑なものである可能性が大きくなった．

3 Wilkie

ここでは，順序極小構造および理論の簡単な復習を行ったのち，$\mathbb{R}_{\exp}$ がモデル完全であるという Wilkie の定理の背景と，どのような道具立てのもとで証明が展開されるかを概観する．

3.1 順序極小構造

複素数 $\mathbb{C}$ と実数 $\mathbb{R}$ の違いの 1 つは，順序（大小関係）の有無にある．この点に注意して，つぎのような概念を考えることにする．

まず $\mathbb{C}^n$ の部分集合で多項式の零点集合として定義される集合を「代数的集合」と呼ぶ．ついで，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えて「実代数的集合」という概念が定義される．

実数の場合は，初めに述べたように，多項式とさらに「不等号」を用いて定義される集合を考えることが出来るので，これらを「半実代数的集合 (semi real algebraic sets)」と呼ぶことにする．グラフが半実代数的集合であるような写像を，半実代数的写像と呼ぶ．

半実代数的集合や半実代数的写像の性質が，簡単な公理から導き出されることに 1980 年代初めに van den Dries が気付き，Pillay, Steinhorn によってモデル理論的基礎付けが行われた．

定義 14 (順序極小構造) 構造 $\mathcal{M} = (M, <, \cdots)$ において，$<$ は線形順序とする．

- $a \neq b \in M$ に対し，様々な形の区間 (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, (a,∞), $[a,\infty)$ $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ を総称して単に区間と呼ぶ．
- パラメーターを用いて 1 階定義可能な集合を，単に定義可能集合と呼ぶ．
- M の任意の定義可能部分集合が，有限個の区間と有限部分集合との和集合になっているとき，$\mathcal{M}$ を順序極小構造という．

命題 15 (Pillay-Steinhorn) $\mathcal{M}_1 = (M_1, <, \cdots)$ を順序極小構造とし，$\mathcal{M}_2 = (M_2, <, \cdots)$ を $\mathcal{M}_1$ と初等同値な構造とする．このとき，$\mathcal{M}_2$ も順序極小構造になる

この定理によって，「構造が順序極小」であるという性質と，「理論が順序極小」である性質が同値になることが分かる．この事実に基づいて次の定義をする．

定義 16 (順序極小理論) $L = \{<, \cdots\}$ を言語，T を完全な L-理論とする．T の任意のモデル $\mathcal{M}$ が順序極小構造になっているとき，T を順序極小理論 (o-minimal theory) と呼ぶ．

$\mathcal{M}$ が順序極小構造であるとき，M の開区間を基底とする位相を M に導入することができる．さらに積位相を考えることによって M^n に位相を導入することができる．

$A \subseteq M^n$ を 1 階論理式で定義可な能部分集合とすると，その閉包 $\mathrm{Cl}(A)$ や内部 $\mathrm{Int}(A)$ も 1 階定義可能集合となる．

例えば，閉包については，まず $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して，

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = r \longleftrightarrow r \geq 0 \wedge r^2 = \sum_{1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

とすると，

$$\mathrm{Cl}(A) = \{\bar{x} : \forall \varepsilon > 0 \, \exists \bar{y} \in A \, \exists r \geq 0 \, (d(\bar{x}, \bar{y}) = r \wedge r < \varepsilon)\}$$

という具合に，1 階論理式で定義される．もし M の理論が量化記号消去を持てば（例えば実閉体の場合など）閉包などの概念が半実代数的集合として表現できることが分かる．このように基本的な位相概念がモデル理論の意味で定義可能になるのは極めて好都合な性質である．

さて，$\mathbb{R}_{\exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1, \exp)$ が順序極小かつモデル完全であるという Wilkie の定理はもちろん一朝にして得られた訳ではない．Wilkie の結果が得られる前には，順序極小の具体例としては実閉体とか，実数に解析的関数（定義域は制限されている）を付け加えた構造ぐらいしか知られていなかった．順序極小構造にかんする一般論が整備されつつあった 1980 年代に欠けていたのは，「より面白い」具体例であった．

具体的な構造，例えば $\mathbb{R}_{\exp}$ が順序極小であることを示すには，モデル理論の一般論だけでは不十分である．

Wilkie の定理の証明に，どのような概念や結果が必要であったかをみてみよう．

注 17 (微分閉体) 「代数的微分方程式がいつでも解ける」という性質を持つ，微分閉体という構造が考えられている．微分閉体のモデル理論はすでに成熟した分野であるが，「自然なモデル」は知られていない．

3.2 Wilkie の定理

Wilkie の定理が，実数のモデル理論に関するどのような問題意識の下で証明されたかをまず説明する．

Tarski によって $\mathbb{R}_< = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1)$ の理論が量化記号消去を持つことが 1950 年代に証明された訳であるが，この $\mathbb{R}_<$ では実数のいわば代数的な側面しか捉えられていない．実数の解析的構造のモデル理論をどのように構築すればよいかを考えると，例えば解析関数を付け加えた構造のモデル理論（やや大雑把に $\mathbb{R}_{an}$ と呼ぶ）について考察するのはごく自然な発想である．

1960 年代に入って，しかしながら $\mathbb{R}_{an}$ の理論が，特別な場合を除き一般には量化記号消去を持たないことが，Lojasiewicz，Osgood らの研究によって明らかにされた．

では $\mathbb{R}_{an}$ の理論は，モデル理論的にみてどのような性質を持つのであろうか．この疑問に答えるのが Gabrielov の定理である．

3.2.1 Gabrielov の定理

ここでは，多様体といえば，Hausdorff 的実解析的多様体でどの点の次元も等しいとする．

定義 18 (semi-analytic, sub-analytic) $\mathcal{M}$ を多様体とする．

1. $S \subset \mathcal{M}$ の各点の近傍が，解析的関数と不等式で定義されているとき，S を semi-analytic という．

2. コンパクトな semi-analytic な集合の射影になっているような集合を sub-analytic という．

射影をとる操作は正に存在記号 $\exists$ そのものによって定義される．したがって，semi-analytic な集合や，sub-analytic な集合をモデル理論的に考察する場合には，射影をとる操作と補集合をとる操作の関係が問題になってくる．

射影をとる操作と補集合をとる操作，つまり存在量化記号 $\exists$ と否定記号 $\neg$ の交換可能性を示したのが次の定理である．

定理 19 (Gabrielov, 1968) $\mathcal{M}$ を多様体とし，$S \subset \mathcal{M}$ を *sub-analytic* な集合とする．このとき $\mathcal{M} - S$ も *sub-analytic* である．

モデル理論的観点からは，つぎのように言い換えることが出来る．自然数 m に対して，U を $[0,1]^m$ の開近傍とし，解析的関数 $f: U \to \mathbb{R}$ を考える．この f に対して，$\tilde{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ を

$$\tilde{f}(\overline{x}) = \begin{cases} f(\overline{x}) & \overline{x} \in [0,1]^m \\ 0 & \overline{x} \notin [0,1]^m \end{cases}$$

によって定義する．

すべての自然数 m とすべての解析的関数 $f: U \to \mathbb{R}$ に対して対応する関数 $\tilde{f}$ を考え，順序環の言語 $L_{ring} = \{+, -, \cdot, <, 0, 1\}$ に，$\tilde{f}$ に対応する関数記号を付け加えた言語を L_{an} とおく．

Gabrielov の定理が主張するのは，モデル理論の観点からはつぎのことに他ならない．

定理 20 (モデル理論版 Gavrielov の定理) $\mathbb{R}^m$ の部分集合 S が L_{an}-定義可能ならば，S は $\exists$-論理式によって定義可能である．すなわち，量化記号を含まない論理式の前に $\exists$-記号が付いただけの論理式によって集合 S を定義することが出来る．

これは「モデル完全性」に他ならない．すなわち L_{an}-構造としての $\mathbb{R}_{an}$ を考え，その理論を T_{an} とするとき T_{an} のモデル完全性を証明しているのが Gavrielov の定理である．前述したとおり T_{an} は量化記号消去を持たないので，モデル完全性は，量化記号消去に次ぐ最良の結果である．

Gabrielov 自身が「モデル完全性」という概念を意識していた訳ではないと思われるが，この「モデル完全性」という概念は 1960 年代に A. Robinson によって考えられていた．

T_{an} では，実数にすべての解析的関数（のコンパクト集合への制限）を付け加えた構造を考えているが，順序極小理論を構築する過程で van den Dries は

$$(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1, \sin|[0,1], \exp|[0,1], r)_{r \in \mathbb{R}}$$

の理論がモデル完全であることを示している．

3.2.2 Pfaffian 関数と Khovanski の定理

すべての解析的関数ではなく，なんらかの「よい性質」を持つ解析的関数を付け加えた構造を考え，その構造の理論がモデル完全になる場合はあるか，という問題設定は興味ある設定である．「よい性質」のひとつとして，次の概念が考えられる．

定義 21 (Pfaffian 鎖, Pfaffian 関数) 1. $f_1, \cdots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をそれぞれ C^1 級関数とする．各 $i = 1, \cdots, s$ と $j = 1, \cdots, n$ にたいして，

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n, f_1, \cdots, f_i]$$

が成り立つとき，関数列 $(f_1, \cdots, f_s)$ を **Pfaffian 鎖**とよぶ．

2. 関数 $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を考える．ただし

- $F(x) = (F_1(x), \cdots, F_m(x))$

- 各 $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とし $F_1, \cdots, F_m \in \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n, f_1, \cdots, f_s]$
- $(f_1, \cdots, f_s)$ は Pfaffian 鎖

このとき，F を **Pfaffian 関数**という.

例 **22** Pfaffian 鎖の例としては，つぎのようなものがある.

- $\exp(x)$
- $\exp(x^2), \int_0^x t^2 dt$
- $\exp(x), \exp(\exp(x))$

注 **23** 1. $\exp(x)$ は Pfaffian 関数である.

2. Pfaffian 関数は解析的である.

Pfaffian 関数に関しては，Khovannski によって得られた次の定理が非常に重要である.

定理 **24 (Khovanski, 1980)** $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を Pfaffian 関数とする.

1. F の正則的な零点の集合，すなわち $\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0$ かつ x は正則点 $\}$ は有限集合で，その要素の個数は F の複雑さによって一様に上から押さえられている.
2. $F^{-1}(0)$ は有限個の連結成分しかもたず，その個数は F の複雑さによって一様に抑えられている.

定理の内容は，順序極小性そのものであるが，この定理は $\mathbb{R}_{\exp}$ がモデル完全であることの証明において重要な働きをしている．また定義域を制限した Pfaffian 関数を $\mathbb{R}$ に加えても順序極小かつ，モデル完全になる証明において重要な働きをする.

注 **25** $\mathbb{R}_{\exp}$ が順序極小であることは，Khovanski の定理なしでも証明可能である．(van den Dries, Macintyre, Marker)

3.2.3 $\mathbb{R}_{an}$ の順序極小性

$\mathbb{R}_{an}$ のモデル完全性は Gabrielov の定理によって得られた訳であるが，van den Dries は $\mathbb{R}_{an}$ が順序極小であることを [vdD] で Lojasiewicz の結果として簡単に指摘している.

まず Lojasiewicz の結果から $\mathbb{R}^m$ における制限（bound）された semi-analytic 集合は，有限個の連結成分を持ち，各成分は semi-analytic であることに注意する．次に，$\mathbb{R}^m$ の bounded subanalytic 集合は $\mathbb{R}^{m+n}$ における bounded semi-amalytic 集合の射影である.

ついで $\mathbb{R}_{an}$ のモデル完全性より $\mathbb{R}$ における L_{an} 定義可能集合は，$\mathbb{R}^m$ の bounded subsnalytic 集合の射影になっているので，連結成分（すなわち区間）は有限個である.

ということで，$\mathbb{R}_{an}$ のモデル完全性は Gabrielov により，順序極小性は Lojasiewicz によると言ってよい.

3.2.4 Wilkie の定理の証明の構造

ここでは，論文 [Wi] において，どのように $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ のモデル完全性が示されるかを簡単に説明する．

論文 [Wi] は 2 部構成になっており，実数に Pfaffian 関数の制限を加えた構造 $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaf}}$ のモデル完全性の証明が前半で，後半が $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ のモデル完全性の証明である．ただし，後者の分量は全体の 4 分の 1 程度であり，大半は前者の証明に費やされている．

また実数に Pfaffian 関数の制限を加えた構造は $\mathbb{R}_{an}$ なかで定義可能であるので，$\mathbb{R}_{an}$ の順序極小性から $\mathbb{R}_{\mathrm{Pfaf}}$ の順序極小性が得られる（[Wi], p. 1061 参照).

$\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ のモデル完全性は数学的帰納法で行われるが，出発点となるケースでは

$$(\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1, \exp|[0,1])$$

のモデル完全性が必要になる．この構造のモデル完全性は，$\exp(x)$ が Pfaffian 関数であることから前半の結果により保障されている．

モデル理論の一般論により，$k, K \models T_{\mathrm{exp}}$ かつ k が K の部分構造であるとき，$k \prec K$ を示せばよい．そのためには，次が成り立つことを証明する．

命題 26 $f_1, \cdots, f_n \in k[x_1, \cdots, x_n, \exp(x_1), \cdots, \exp(x_n)]$ に対して $b \in k$ が存在し，任意の $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$ に対し

$$f_1(\alpha) = \cdots = f_n(\alpha) = 0 \bigwedge J(f_1, \cdots, f_n)(\alpha) \neq 0$$

ならば，各 i について $|a_i| < b$ が成り立つ．ただし J はヤコビ行列式である．

ここでひとつ定義が必要である．

定義 27 $n \in \mathbb{N}, s \subseteq \{1, \cdots, n\}$ とする．

$$M_n^s = k[x_i, (1+x_i^2)^{-1}, \exp((1+x_i^2)^{-1}), \exp(x_i)]_{i \in s}$$

とおく．M_n^s は微分に関して閉じているので，$f_1, \cdots, f_n \in M_n^s$ ならば $J(f_1, \cdots, f_n) \in M_n^s$ であることに注意する．

命題26の証明は背理法で行う．すこし議論が必要であるが背理法の仮定として，つぎのような自然数 m が存在することを仮定する．

> $(*)_m$　ある自然数 $n \geq m$ と $\alpha = (a_1, \cdots, a_n) \in K^n$, $l \in \{1, \cdots .n\}, s \subseteq \{1, \cdots, n\}$,
> そして関数 $f_1, \ldots, f_n \in M_n^s$（ただし s は m 個の要素を持つ）が存在し，
>
> $$f_1(\alpha) = \cdots = f_n(\alpha) = 0 \wedge J(f_1, \cdots, f_n)(\alpha) \neq 0$$
>
> かつ，任意の $b \in k$ に対して $|a_l| > b$ である．また m が正の場合は $l \in s$ である．

このような性質を持つ最小の m を固定し議論を始めるが

命題 28 $c \in k$ と各 $i \in s$ に対して自然数 n_i が存在し，$0 < c + \sum_{i \in s} n_1 a_i < 1$ が成り立つ．ただし，すくなくともひとつの $i \in s$ に対して $n_i \neq 0$ である．

が成り立つことから，m より小さい m' に対して上述の性質 $(*)_{m'}$ が成り立つことが導かれて矛盾が生じるというのが，$\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ の証明の骨格である．

命題28の証明には，$\mathbb{R}_{ex} = (\mathbb{R}, +, -, \cdot, <, 0, 1, ex)$，ただし $ex : x \mapsto \exp((1+x^2)^{-1})$ という構造の理論 T_{ex} がモデル完全かつ「滑らかな」順序極小理論であるという定理が用いられている．T_{ex} のモデル完全性は Pfaffian 関数に関する前半の結果から得られる．

3.2.5 Schanuel 予想と $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\exp})$ の決定性

$T_{\exp} = \mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\exp})$ とおく．Wilkie と Macintyre によって $T_{\exp}$ が決定的であることが証明された (1996) が，その証明には，解析的数論の大予想である

予想 29 (Schanuel 予想) $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上 *1* 次独立とする．このとき，

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\gamma_1, \cdots, \gamma_n, e^{\gamma_1}, \cdots, e^{\gamma_n}) \geq n$$

が必要であった．

$T_{\exp}$ の決定可能性を論じるということは，$p(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{2n}) \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_{2n}]$ に対して，

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \, p(x_1, \cdots, x_n, e^{x_1}, \cdots, e^{x_n}) = 0$$

が成り立つかどうかを決定する手続きの存在を問題にすることである．$n=1$ の場合は，Newton の古典的方法により解を求めることが出来るので問題ないが，$n=k+1$ のときの問題を $n=k$ の場合に帰着する際に Schanuel 予想が必要になってくる．

さて，この予想をモデル理論が解くというのは，「夢」であろうか？

3.3 Hardy の問題

$\mathbb{R}_{an,\exp} = (\mathbb{R}_{an}, \exp)$ とおく．

定義 30 (LE-関数) 指数関数，対数関数，代数的関数の組み合わせによって定義される関数 $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ を LE-関数と呼ぶ．

Hardy は 1920 年に次のような問題を投げかけている．まず関数 $x \mapsto x \log x$ の逆関数を $i(x)$ とおく．このとき $i(x) \sim \frac{x}{\log x}$ である．

問題 31 (Hardy, 1920) $e^{i(x)} \sim f(x)$ となる LE-関数 $f(x)$ は存在するか．

van den Dries, Macintyre, Marker は $\mathrm{Th}(\mathbb{R}_{an,\exp})$ の代数的な超準モデルを構成し，そのモデルの性質を巧みに利用することによって Hardy の問題に対する否定的解答を与えている．

定理 32 (van den Dries, Macintyre, Marker) $e^{i(x)} \sim f(x)$ となる LE-関数 $f(x)$ は存在しない．

3.4 Perterzil, Starchenko

複素数体 $\mathbb{C}$ と実数体 $\mathbb{R}$ の間には，いくつもの興味深い関係があるが，そのうちの 2 つに着目する．

1. $\mathbb{R}$ は実閉体であり，$\mathbb{C}$ は代数的閉体である．そして $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1})$ となっている．

2. 位相的には $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ である．

R を実閉体とし，$\mathcal{R} = \langle R, +, \cdots, ...\rangle$ を R の順序極小な拡張とする．つまり $\mathcal{R}$ の領域は R のままであるが，新たな関数とか関係，定数が付け加わった結果順序極小になっているものを考える．

$K = R(\sqrt{-1})$ とすると，K は R の代数閉包であり，$K \simeq R^2$ と同一視する．

このようにして K と K の代数的演算は $\mathcal{R}$ で定義可能であり K^n の代数的部分集合は $\mathcal{R}$ で定義可能である．

このようにして，実閉体の順序極小な拡張 $\mathcal{R}$ の枠組みのなかで，複素解析を展開することができる．古典的な結果がどこまでこのような枠組みで展開できるかについては，Perterzil と Starchenko が精力的に研究している．

1 例として，楕円曲線に関するものを紹介する．

楕円曲線は，どの体の上で考えるかによっていろいろな興味深い性質を現出する．複素数体上では，古典的な結果として，楕円曲線とトーラスのあいだの楕円関数を介した 1 対 1 対応が有名である．

この対応関係は，順序極小な文脈で「複素解析」を展開した場合には成り立たない．

定理 33 (Peterzil, Starchenko) K を $\mathbb{R}_{an,\exp}$ の初等拡大とする．このときどんな非特異射影代数曲線とも K-biholomorphic にならないような 1 次元 K-トーラスが存在する．

4 Zilber

Zarisiki structure の研究は，Hrushovski による幾何的モーデル・ラング予想の解決において重要な役割を果たしたが，このことは言ってみればZariski structure に関する研究の「副産物」のようなものと考える方が自然である．$\aleph_1$-categorical な理論に関する構造定理を研究する過程で，強極小集合によって定義される組み合わせ幾何の構造に関して Zilber 自身が予想したいくつもの問題を解決していくなかで，一般論が徐々に形成されていったと考えることが出来る．

すこし乱暴ではあるが，Zariski structure を一言で特徴付ければ，

代数閉体上の代数曲線のモデル理論

ということになる．あるいは，

代数幾何のモデル理論化

とも言える．代数的集合を閉集合とするZariski 位相の性質に着目して，見事に1階のモデル理論を構築することが出来たのであった．

さて，Wilkie の結果を説明した際に，実数の場合には早くから Gabrielov の定理や Khovanski の定理により実解析的構造のモデル理論が1980年代以降着実に発展してきていることを説明した．

では複素解析的構造に目を向けると，状況はどうなっているであろうか．まず解析集合の定義を思い出そう．

定義 34 (解析集合) M を複素多様体，$A \subseteq M$ とする．
任意の $x \in A$ に対して，

- M における x の近傍 U
- U 上の正則関数 $f_1, \cdots, f_k$ が存在して，

$$U \cap A = \{z \in M \ : \ f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0\}$$

であるとき，A を解析集合という．

つまり局所的に見ると，各点の周りが有限個の解析関数の共通零点になっている．

命題 35 (基本的性質) 1. 解析集合は局所閉集合，すなわち
A が解析集合ならば，A の適当な近傍 U に対して $U \cap \overline{A} = A$

2. M, N 複素多様体，A は M の，B は N の解析集合

   i) $A \times B$ は $M \times N$ の解析集合
   ii) $\varphi : M \to N$ が正則ならば，$\varphi^{-1}(B)$ は M の解析集合

3. M は複素多様体，A_1, A_2 は M の解析集合

   i) $A_1 \cap A_2$ は解析集合
   ii) A_1, A_2 が閉集合ならば $A_1 \cup A_2$ は解析集合

この解析集合をモデル理論で扱う（モデル理論の観点から眺める）のが Analytic Zariski structure の理論である．

4.1 Analytic Zariski structure

解析的構造 $\mathcal{M}$ のモデル理論を構築する場合，大きな課題が 2 つある．

- どのような位相を考えるか．
  代数幾何の場合と異なり，ネーター性は仮定できない．
- 解析集合をどう定義するか．
  解析関数の零点として定義出来るわけではない．

Zilber の 解析的 Zariski structure ではこの点をどのように解決しようとしているかを，公理系のうち，位相と解析性の定義に関したところだけに着目して検討しよう．

定義 36 (公理系) $\mathcal{M} = (M, \mathcal{C}, \dim)$ が以下の公理系を満たすとき，$\mathcal{M}$ を解析的 Zariski 構造と呼ぶ．(ここでは一部のみ紹介)

(L)

1. 各 C_n は位相空間，特に閉集合族の共通部分は閉集合
2. 対角集合は閉集合
3. 1 点集合は閉集合
4. 閉集合の直積は閉集合
5. $a \in M^k$，$S \subseteq M^{k+l}$ は閉集合
   $S(a, M^l) = \{b \in M^l \mid (a, b) \in S\}$ は閉集合
6. 射影は連続写像

注：ネーター性を仮定していない点に注意．
既約性に関する公理

定義 37 (強既約構成可能集合) $S \subseteq M^n$ を構成可能集合，すなわち閉集合のブール和となっている集合とする．

$$\text{任意の閉集合 } S' \subsetneq S \text{ に対して } \dim S' < \dim S$$

が成り立つとき，S を強既約構成可能集合とよぶ．

(AF) S が強既約構成可能集合ならば

$$\dim S = \dim(\mathrm{pr}S) + \min_{a \in \mathrm{pr}S} \dim(\mathrm{pr}^{-1}(a) \cap S)$$

(FC) $S \subseteq M^n$ が既約構成可能集合ならば

$$\mathcal{P}^{\mathrm{pr}}(S, k) = \{a \in \mathrm{pr}S : \dim(S \cap \mathrm{pr}^{-1}(a) \geq k\}$$

は $\mathrm{pr}S$ の閉部分集合

解析集合に関する公理

定義 38 $S \subseteq U \subseteq_{op} M$ とする.

1. S は U の中で閉集合

2. 任意の $a \in S$ に対して開集合 V_a が存在して,

$$S \cap V_a = \bigcup_{\text{有限}} A_i \quad (\text{各 } A_i \text{ は強既約構成可能集合})$$

このとき S を解析集合とよぶ.

通常の「解析集合」と比較すると, A_i が解析関数の零点集合の代わりになっていることが分かる. したがって,「強既約構成可能」という性質が, 解析関数の零点集合の性質をどこまで表現出来ているかが問題になってくる.

Zilber は解析集合に関して以下のような性質を公理としている.

(INT) $S_1, S_2 \subseteq_{an} U$ が既約ならば $S_1 \cap S_2$ は解析集合である.

(CMP) $S \subseteq_{an} U$ かつ $a \in S$ とする.

$$a \in S_a - S'_a \text{ かつ } S = S_a \cup S'_a$$

となる, U の有限個の既約解析集合の和集合 $S_a \subseteq_{an} U$ と $S'_a \subseteq_{an}$ が存在する. S_a を a の既約成分とよぶ.

(CC) 任意の $S \subseteq_{an} U$ は高々可算個の既約成分の和集合である.

注 39 代数幾何では, 既約成分は高々有限個である.

解析的 Analytic zariski 構造を用いて, Zilber はどのような一般論を展開しようとしているのだろうか. 現在進行中なのでまだ未知の部分が多い. Zilber の講義ノート [Z1] ではコンパクトな解析的ザリスキー幾何の場合に次の proper map に関する定理を論じている.

定義 40 $S \subseteq_{an} W \subseteq_{op} M^n$ とし $\mathrm{pr}: M^n \to M^m$ を射影とする. ここで, $\mathrm{pr}(W) = U$ かつ $\mathrm{pr}(S) \subseteq_{op} M^m$ とする.

- S の任意の既約成分 S_i に対して $\mathrm{pr}(S_i)$ は U のなかでの閉集合
- 任意の $a \in \mathrm{pr}(S)$ に対して $\mathrm{pr}^{-1}(a) \cap S$ は M^n のコンパクト集合

であるとき, pr を S 上 proper な射影と呼ぶ.

つぎの定理が成り立つ.

定理 41 (Proper mapping theorem) $S \subseteq_{an} W \subseteq_{op} M^n$ とし $\mathrm{pr}: M^n \to M^m$ を射影とする．ここで，$\mathrm{pr}(W) = U$ かつ $\mathrm{pr}(S) \subseteq_{op} M^m$ とする．pr が S 上 proper ならば $\mathrm{pr}(S)$ は U で解析的である．(ここで M がコンパクトであることは重要である．)

つまり射影が proper な場合は解析的集合の像が解析的であることを示している．この種の定理は，普通の「解析幾何学」では解析関数の高度な性質を用いて証明されるが，もしある具体的な解析的構造が「解析的ザリスキー幾何」であることが示されれば，この Proper mapping theorem により解析的結果をモデル理論によって証明することが出来るわけである．

ところで，解析的ザリスキー幾何の場合には普通のザリスキー幾何の場合のように，「解析集合」の幾何的性質から体を再構成するようなことは難しいのではないかと考えられる．

4.2 Zilber's problems

解析的ザリスキー幾何に関しては具体例に乏しいのが現状であり，「面白い」例を探すことが急務である．

定理 42 (Peatfield) 擬指数関数を持つ，非可算な体 K_{ex} は *pre-smooth* な解析的ザリスキー構造である．

この定理を証明することは，MODNET(ヨーロッパにおけるモデル理論の研究ネットワーク，特に若手研究者の育成に力を入れている）の研究課題としても挙げられていたが，2006 年 7 月のプレプリントにおいて N. Peatfield が証明を与えた．非可算な体 K_{ex} は以下の性質を持つ．

1. 非可算な体 K は，標数 0 の代数的閉体である．
2. $ex: K^+ \longrightarrow K^\times$ は準同型であり，ex の核は $\mathbb{Z}$ と同型である．
3. （Schanuel 性）K の有限部分集合 A に対して，
$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}(A, \mathrm{ex}(A)) - \mathrm{lin.deg}_{\mathbb{Q}}(A) \geq 0$$
4. K の有限集合 A 上の，既約で free かつ normal な代数的多様体 $V \subset K^{2n}$ に対して $(\bar{z}, \mathrm{ex}(\bar{z}))$ が V の A 上 generic な解になっているような $\bar{z} \in K^n$ が存在する．
5. V を 4 と同様の多様体とし V の次元が n ならば $(\bar{z}, \mathrm{ex}(\bar{z}))$ が V の A 上 generic な解になるような $\bar{z}$ は可算個存在する．($V \subset K^{2n}$ に注意)

K_{ex} は Hrushovski の generic construction の手法を用いて Zilber が構成した非可算な代数的閉体である．

4.3 Generic analytic function を持つ，analytic Zariski 構造

K_{ex} という具体的な体が解析的ザリスキー幾何になることが示されたのはようやく 2006 年 7 月になってからであるが，この結果は Zilber と Peatfield のこれまでの結果の自然な延長になっていることが分かる．

1. B. Zilber.: A Theory of a generic function with derivations, Contemporary Mathematics, vol. 302, 85-99, 2002

2. N. Peatfield.: An analytic Zariski structure over a field, to appear in Archive for Mathematical Logic

- analytic Zariski 構造を持つ体をどうやって構成するかが，大きな課題である．
- Zilber は Hrushovski の generic construction を用いて作ろうと考えているようだが，その時に課題となるのが,「微分」や「位相（極限)」の扱いである．

上の 1 番の論文で，Zilber は次のようなトリックを考案している．

- 言語には，$f, f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots, f^{(n)}, \cdots$ を入れる．
  f が表題の a generic function で，$f^{(1)}, \cdots$ が derivations.
  したがって $f^{(n)}$ は n 次導関数のつもり．
- $f^{(n)}$ が n 次導関数であるということを表現するために 2 変数関数 $g_i(x_1, x_2)$ と 3 項関係 G_i を導入する．

$$g_i(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{f^{(i)}(x_1) - f^{(i)}(x_2)}{x_1 - x_2}, & \text{if } x_1 \neq x_2 \\ f^{(i+1)}(x_1), & \text{if } x_1 = x_2 \end{cases}$$

- $G_i(x_1, x_2, y) \equiv (g_i(x_1.x_2) = y$

このアイデアを発展させ，2 番の論文で Peatfield は analytic Zariski structure の構成を論じている．

参考文献

[Bo] Elisabeth Bouscaren (Ed.), Model Theory and Algebraic Geometry, LNM 1696, Springer, 1998

[FJ] Michael D. Fried, Moshe Jarden, Field Arithmetic 2nd Ed, Springer, 2005

[Ho] Wilfrid Hodges, Model Theory, Cambridge UP, 1993

[Ko] Neal Koblitz, p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions, 2nd ed., GTM 58, Springer, 1984

[La] Serge Lang, Algebra, Revised 3rd Ed., GTM 211, Springer, 2002

[Ma] David Marker, Model Theory: An Introduction, GTM 217, Springer, 2002

[Mu] M. Ram Murty, Introduction to p-adic Analytic Number Theory, AMS, 2002

[PR] Alexander Prestel, Peter Roquette, Formally p-adic Fields, LNM 1050, Springer, 1984

[Ro] Alain M. Robert, A Course in p-adic Analysis, GTM 198, Springer, 2000

[Sa] Gerald E. Sacks, Saturated Model Theory, Benjamin, 1972

[Wi] A. J. Wilkie, Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential functions, Jour. of the AMS, vol. 9, no. 3, 1051-1094

[vdD] Lou van den Dries, A generalization of the Tarski-Seidenberg Theorem and some nondefinability results, Bull. of the AMS, vol. 15, no. 2, 189-193

[Zl] Boris Zilber, Notes on Zariski Geometries, preprint

[Na] 永田　雅宜,『可換体論』(新版), 裳華房, 1985

[It] 板井　昌典,『幾何的モデル理論入門』, 日本評論社, 2002