数理解析研究所講究録
1525巻 2006年 35-50

定常集合の分割問題について

薄葉 季路 (Toshimichi Usuba)*
名古屋大学大学院情報科学研究科
(Graduate School of Information Science, Nagoya University)

概要

集合論研究においては非常に基本的だが重要な概念に stationary set(定常集合) と呼ばれるものがある. 本論説では stationary set に関して, 特に古典的な stationary set の分割問題, 巨大基数との関係, GCH(一般連続体仮説) との関連等に焦点をあわせて解説を行う. また, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set の分割問題の最近の結果についても説明する.

1 導入

用語, 記号等については Kunen [17], Kanamori [14] 等でも使われている標準的なものを使うが, 読者の便宜のためにそれらを列挙しておく.

- 集合 X に対して, $|X|$ で X の濃度を表す.
- ordinal γ と $X \subseteq \gamma$ に対して, X が γ で **unbounded** とは $\forall\alpha \in \gamma\exists\beta \in X\ (\alpha \leq \beta)$ を満たすこと.
- 集合 X, Y に対して ${}^XY = \{f : f$ は X から Y への関数$\}$,
- cardinal μ, ν に対して,
  - $\mu^\nu = |{}^\nu\mu|$,
  - $\mu^{<\nu} = \left|\bigcup_{\alpha<\nu} {}^\alpha\mu\right|$.
- ordinal γ に対して, $\mathrm{cf}(\gamma) = \min\{|X| : X \subseteq \gamma, X$ は γ で unbounded$\}$.

  $\mathrm{cf}(\gamma)$ は γ の **cofinality** と呼ばれている.
  - γ は **regular** $\iff$ $\mathrm{cf}(\gamma) = \gamma$,
  - γ は **singular** $\iff$ $\mathrm{cf}(\gamma) < \gamma$.

Fact 1.1 (1) regular ordinal は cardinal である,

(2) successor cardinal は regular である.

*E-mail:usuba@info.human.nagoya-u.ac.jp

(3) cardinal μ に対して, $\mu^{\mathrm{cf}(\mu)} > \mu$. □

Cardinal κ が strong limit とは $\forall\alpha < \kappa\,(2^\alpha < \kappa)$ を満たすことである. また, weakly inaccessible cardinal とは regular limit cardinal のことであり, strongly inaccessible cardinal とは regular strong limit cardinal のことである.

Gödel の不完全性定理関係で問題になることではあるが, この論説では常に "公理系 ZFC は無矛盾である" と仮定し, 必要がない限りは特に明記しない. また, "命題 φ が無矛盾である" と単に書いたときにはそれは ZFC に φ を付け加えた理論が無矛盾であることを意味するものとする.

本論説に出てくる基本的な Fact の証明は Kunen[17], Kanamori[14] 等にほぼ全て記載されている. 興味を持たれた方は参照されたし.

2 Stationary set and club set

まず最初に, regular uncountable cardinal の stationary set の概念, 及び巨大基数と saturated ideal との基本的な関係について解説する.

簡便のため, これ以後, 特に明記がない限りは κ は常に regular uncountable cardinal を表すとする.

Definition 2.1 Limit ordinal γ と $X \subseteq \gamma$ に対して, X が γ で **closed** $\iff$ $\forall\alpha < \gamma$(α は limit ordinal かつ $X \cap \alpha$ が α で unbounded $\Rightarrow \alpha \in X$).

$C \subseteq \gamma$ に対して, C は γ の **club** $\iff$ C は γ で closed かつ unbounded. □

Definition 2.2 limit ordinal γ と $S \subseteq \gamma$ に対して, S が γ で **stationary** $\iff$ $S \cap C \neq \emptyset$ が γ の任意の club C に対して成立する.

S は non-stationary $\iff$ S は stationary でない, 即ち, ある club set C で $C \cap S = \emptyset$ が成立する. □

われわれの主な興味は, regular uncountable cardinal の stationary set であるので, 文脈から明らかな場合は club, stationary 等に関して "κ で (の)" を明記しないことにする.

直感的に言えば, κ の club set は κ の部分集合で大きい集合であり, 逆に non-stationary set は小さい集合, stationary set は小さくない集合である.

以下, その直感を対応する club, stationary の基本的性質を列挙する.

Fact 2.3 (1) κ 自体は club である,

(2) もし $C, D \subseteq \kappa$ が両方とも club set であるならば, $C \cap D$ もまた club set である. よって特に, club set は stationary set でもある.

(3) S が stationary set, C が club ならば $S \cap C$ も stationary である,

(4) もし $S \subseteq \kappa$ が stationary set ならば S は unbounded である. よって $|S| = \kappa$ となる. □

stationary set に対してはモデル理論的な特徴づけができる. 次の事実は簡単だが重要であり, 集合論の研究においては空気のように使われている.

Fact 2.4 $S \subseteq \kappa$ に対して, 次は同値である.

(1) S は stationary,

(2) 任意の一階可算言語構造 M で $\kappa \subseteq M$ となるものに対して, 初等的部分構造 $N \prec M$ で $N \cap \kappa \in S$ となるものが存在する. □

上の事実より, club set に対しても同様な定義が与えられる: $X \subseteq \kappa$ が club set を部分集合として持つことと, ある一階可算言語構造 M で $\kappa \subseteq M$ かつ $\{N \cap \kappa \in \kappa : N \prec M\} \subseteq X$ となるものが存在することは同値である.

また, "Fodor の補題" として知られている次の事実も集合論研究において頻繁に使われるものである.

Fact 2.5 (Fodor[3]) $S \subseteq \kappa$ を stationary set とする. もし function $f : S \to \kappa$ が $\forall \alpha \in S\,(f(\alpha) < \alpha)$ を満たすならば, ある $\beta < \kappa$ に対して $\{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta\}$ がまた stationary となる. □

実際には, $S \subseteq \kappa$ に対して Fodor の補題が成り立つことと S が stationary であることはほど同値となる. 歴史的には stationary set の概念は, Fodor の補題が成り立つための必要十分条件として導入されている.

Fact 2.6 $S \subseteq \kappa$ に対して次は同値である:

(1) S は stationary,

(2) 任意の function $f : S \to \kappa$ に対して, もし $\forall \alpha \in S\,(f(\alpha) < \alpha)$ を満たすならばある $\beta < \kappa$ に対して $\{\alpha \in S : f(\alpha) = \beta\}$ が unbounded となる. □

ここで, stationary set の簡単な例を幾つかあげておく.

(1) κ 自体,

(2) $\{\alpha < \kappa : \alpha$ は limit ordinal$\}$,

(3) $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$, ここで $\mu < \kappa$ はある無限 cardinal である.

(1) は自明である. (2) については, club set $C \subseteq \kappa$ が与えられたならば C の元で, 小さいほうから数えていって ω 番目の元を考えればよい. C が closed ゆえ, それは limit ordinal となっている. (3) については, 下から数えて μ 番目の元を考えればよい.

上の事実より, 特に次のことが分かる.

- 任意の ω_1 より大きい regular uncountable cardinal κ は二つの 互いに素な stationary set を持っている: $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ と $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_1\}$.

- もし κ が weakly inaccessible cardinal ならば, κ 個の互いに素な stationary set がある: $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$, ここで $\mu < \kappa$ はある regular cardinal. □

これにより次のような疑問が生じる.

Question 2.7 κ の任意の stationary set は二つの互いに素な stationary set に常に分割可能であるか? もっといえば κ 個に分割可能であるか?

この問題は Foder-Hajnal[4] によって取り上げられている. 文面だけを取り上げればこれは単純な組み合わせ論的な問題であり, 実際 Foder-Hajnal での意識もそこにあった. しかし, この問題を 60 年代以降発展してきた巨大基数理論と絡めて見ると, 単純な組み合わせ論を超えた別の側面が浮き彫りになってくる.

以下, この問題と巨大基数理論とがどのように関わっていくのかを見ていくが, そのために、現在では巨大基数理論の中核をなしている ideal 理論の用語を幾つか定義していく.

Definition 2.8 infinte set A と $I \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して, I が A 上の **ideal** とは次を満たすことである:

(1) $\forall X \in I \forall Y \in \mathcal{P}(A)(Y \subseteq X \Rightarrow Y \in I)$,

(2) $\forall X, Y \in I\,(X \cup Y \in I)$,

(3) $\emptyset \in I$ かつ $A \notin I$,

(4) $\forall a \in A\,(\{a\} \in I)$. □

(1)–(3) は, I がブール代数 $\mathcal{P}(A)$ 上の proper ideal であることを主張している. 一般的なブール代数では (4) は仮定されないが, 巨大基数理論ではこれを仮定すると色々と都合がよい. 以下, ideal に対して少々技術的な定義を行う.

Definition 2.9 infinite cardinal μ と A 上の ideal I に対して, I が **μ-complete** とは $\forall \mathcal{B} \subseteq I\,(|\mathcal{B}| < \mu \rightarrow \bigcup \mathcal{B} \in I)$ を満たすこと. □

Definition 2.10 A 上の ideal I に対して,

- $I^+ = \mathcal{P}(A) \setminus I$. I^+ の元は **I-positive set** と呼ばれる.

- $X \in I^+$ に対して, $I|X = \{Y \subseteq A : Y \cap X \in I\}$. $I|X$ は I の X 上への制限と呼ばれ, やはり A 上の ideal となる. □

stationary set の時と同様, ここで ideal の具体例を与える.

- $\mathrm{I}_\kappa = \{X \subseteq \kappa : X$ は κ で bounded$\}$ は κ 上の κ-complete ideal を成している.

- $\mathrm{NS}_\kappa = \{X \subseteq \kappa : X$ は κ で non-stationary$\}$ は κ 上の κ-complete ideal を成している.

I_κ は bounded ideal, NS_κ は non-stationary ideal とそれぞれ呼ばれている．定義より，I_κ^+ は unbounded set 全体，NS_κ^+ は stationary set 全体に一致することが分かる．

ここで Tarski によって導入された "saturated ideal" の概念を導入する．

Definition 2.11 (Tarski[27]) cardinal μ と A 上の ideal I に対して，I は μ-**saturated** $\iff$ $\forall \mathcal{B} \subseteq I^+ (|\mathcal{B}| \geq \mu \Rightarrow \exists X, Y \in \mathcal{B} (X \neq Y \land X \cap Y \in I^+)$.

特に，A 上の ideal I が 2-saturated であることは I が maximal ideal である，即ち $\forall X \subseteq A (X \in I \lor A \setminus X \in I)$ となることと同値であり，明らかに A 上のどんな ideal も $(2^{|A|})^+$-saturated である．これらのことから窺い知れるが，saturation の概念は ideal がどれだけ maximal ideal に近いか，という指標と見ることができる．

Fact 2.12 Stationary set $S \subseteq \kappa$ と cardinal $\mu \leq \kappa$ に対して，$\mathrm{NS}_\kappa | S$ が μ-saturated であることと S が μ 個の互いに素な stationary set に分割できないことは同値である．□

これにより，stationary set の分割問題は saturated ideal の問題に還元できる：

Question 2.13 ある stationary set $S \subseteq \kappa$ に対して $\mathrm{NS}_\kappa | S$ が 2-saturated (または κ-saturated) となることはあるか?

もちろん，これは分割問題を言い換えたものに過ぎないが，このような言い換えを行うことにより分割問題と巨大基数理論との関連がより見やすくなるという利点がある．というのも，巨大基数の幾つかは "ある集合上に強い性質を持つ 2-saturated ideal が存在する" という形で定義されているからである[1]．ここで，そのようなものの中で代表的なものである measurable cardinal を考える．

Definition 2.14 κ が **measurable cardinal** とは κ 上に 2-saturated κ-complete ideal が存在することである．

次の事実は，measurable cardinal が巨大基数として比較的大きいものであることを示している．

Fact 2.15 κ を measurable cardinal する．

(1) κ は strongly inaccessible cardinal である，

(2) $\{\alpha < \kappa : \alpha$ は strongly inaccessible cardinal$\}$ は unbonded である．□

よく知られているように strongly inaccessible cardinal の存在より ZFC の集合モデルの存在が示される．一方で Gödel の第二不完全性定理により，ZFC からは ZFC の集合モデルの存在は証明できない．よって，ZFC からは strongly inaccessible cardinal の存在は証明できない[2]．さて，この事実によりわれわれは次の系を得ることができる．

---

[1]普通は ideal ではなく，双対概念である filter を用いて定義するが，本質的な違いはない．

[2]実際のところはもっと強く，"ZFC が無矛盾ならば ZFC に strongly inaccessible cardinal の存在を付け加えた理論もまた無矛盾である" と言う命題が ZFC から証明不可能である．一方で "ZFC が無矛盾ならば ZFC に strongly inaccessible cardinal の非存在を付け加えた理論もまた無矛盾である" は ZFC で証明可能である．

Cor. 2.16 “ある stationary set $S \subseteq \kappa$ で $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が 2-saturated になる” という命題は ZFC から証明不可能である.

Proof: もしも証明可能であるならば, それは ZFC から measurable cardinal の存在が証明できてしまうことを意味しており, これは不完全性定理に反する. □

以上により “二つに分割不可能な stationary set の存在は ZFC からは証明不可能” という一応の結論が得られた. しかしながらこれは “二つに分割不可能な stationary set は存在しない” と言う命題が ZFC から証明できたということではない. 実際のところはどうなのであろうか?

実は, κ が successor cardinal の場合は古典的な Ulam matrix を応用することで次の結論が簡単に得られることが知られている.

Fact 2.17 (Ulam[28]) もし κ が successor cardinal ならば, κ 上の κ-complete κ-saturated ideal は存在しない. □

κ 上の ideal が κ-saturated ならば当然 κ^+-saturated でもあるので, このことから successor cardinal κ の stationary set は常に κ 個に分割可能であることが帰結できる. 残された問題は κ が weakly inaccessible cardinal の場合であるが, これも Solovay によって解決されている.

Fact 2.18 (Solovay[25]) Stationary set $S \subseteq \kappa$ に対して, $\mathrm{NS}_\kappa|S$ は κ-saturated ではない. よって特に, stationary set S は κ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

Solovay は, κ 上の κ-complete 2-saturated ideal (つまり κ は measurable cardinal) の存在から導けるような強い性質の多くが κ-complete κ-saturated ideal の存在からも導けることを示し, それらを用いて上の Fact 2.18 を示している. ここでは (ZFC とは独立な) 巨大基数から発生した直感を用いて ZFC の定理がえられる, という不思議な現象が生じている. これに対して, Kanamori は次のように述べている (Kanamori[15]):

> これらの結果は, 巨大基数の理論の研究を通じて開発された技術により, 巨大基数と直接には関係のない集合論の重要な結果が得られている, という意味で, この理論の “実用的な意味での有用性” を実証するものとなっている.

さて, 以上をまとめることで, われわれは次の最終的な結論に到達することができた.

Cor. 2.19 任意の κ の stationary set は κ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

この結果は, 現在では無限組み合わせ論の標準的な道具となっている.

3 κ^+-saturation and GCH

κ 個への分割可能性については ZFC の定理であることが分かったわけであるが, 依然として次のような弱い形の分割問題が残されている.

Question 3.1 ある stationary set $S \subseteq \kappa$ で NS_κ が κ^+-saturated となることはありえるか?

ここでなぜ κ^+-saturated に注目するのか説明する. 前節の最後で述べたことであるが, κ 上に κ-complete κ-saturated ideal が存在すれば κ は "ほぼ" measurable cardinal と考えてよい. しかしながら, 実は κ-complete κ^+-saturated ideal が存在するということだけで, κ はかなり measurable cardinal に近い, すなわち measurable cardinal の存在から帰結される性質の幾つかが κ^+-saturated ideal の存在から引き出せるのである. すなわち, κ-complete κ^+-saturated ideal が存在しているような κ は "潜在的な" 巨大基数とみなせる.

また, measurable cardinal は常に inaccessible cardinal のため, たとえば ω_1 上に $\aleph_1$-complete 2-saturated ideal は存在しない ($\aleph_1$-saturated も不可能である). 一方で ω_1 上に $\aleph_1$-complete $\aleph_2$-saturated ideal は存在しうるのである. このように κ^+-saturated ideal は小さな基数上にも存在しえ, その意味で "より一般化された" 巨大基数理論を展開することが可能なのである.

話を NS_κ, あるいは $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated になりうるかどうかに絞る. 無矛盾性に関しては次のような結果が, ZFC の内部モデル理論と forcing 理論を組み合わせることにより得られている.

Fact 3.2 (Jech-Magidor-Mitchell-Prikry[12]) 次は equiconsistent である.

(1) measurable cardinal が存在する,

(2) ある κ に対して κ 上の κ-complete κ^+-saturated ideal が存在する.

ここで, 理論 T と T' が equiconsistent であるとは "T が無矛盾であることと T' が無矛盾であることは同値である" と言う命題が ZFC から証明可能であることである. □

したがって特に, $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated となるような stationary set S の存在は ZFC からは証明不可能である. 一方で, 組み合わせ論的方法によって次が示されている.

Fact 3.3 (Shelah[22], Gitik-Shelah[10])

(1) $\kappa > \omega_1$ ならば NS_κ は κ^+-saturated でない,

(2) $\mu < \kappa$ が regular cardinal で $\mu^+ < \kappa$ ならば, $\mathrm{NS}_\kappa|\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$ は κ^+-saturated ではない. □

これらの結果により, $\kappa > \omega_1$ の時は NS_κ や, NS_κ を自然な stationary set 上に制限したものは κ^+-saturated にはならない. では, NS_{ω_1} が $\aleph_2$-saturated になる, 或いは $\kappa > \omega_1$ で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ が κ^+-saturated になるようなことがあるのであるのか? この疑問に対する答えは, 巨大基数理論と強制法の発展によってえられた.

Fact 3.4 適当な巨大基数公理の無矛盾性を仮定ならば, 次もまた無矛盾である.

(1) NS_{ω_1} が $\aleph_2$-saturated,

(2) $\kappa > \omega_1$ かつある stationary set $S \subseteq \kappa$ で $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated となる. □

(1) は Steel-Van Wesep[26], Foreman-Magidor-Shelah[7], Shelah[23] による結果であり, (2) は Foreman[5], Jech-Woodin[13], Gitik[9], Shelah[23] 等によるものである[3].

Fact 3.3 の (2) により, stationary set S で $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated になる場合でも, S は $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$ のような典型的な形をすることはできない. 実際に Fact 3.4 の (2) で saturate している S は $\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$ の真の subset となっている. どのような stationary set S ならば $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated になるかを決定することは今後に残された重要な課題であると思われる. また, Fact 3.3 でも残されている $\kappa = \mu^+$ で $\mathrm{NS}_\kappa|\{\alpha < \kappa : \mathrm{cf}(\alpha) = \mu\}$ が κ^+-saturated になりうるか? という問題も以前未解決である.

ここで話を少し変えて, saturated ideal と GCH との関連について触れる. measurable cardinal の存在が基数の冪に対してある種の制約を課すことが古典的な事実として知られている. さて, 何度か触れていることだが measurable cardinal から引き出せる帰結は saturated ideal からも引き出せる (ことがある). したがって saturated ideal の存在が基数の冪にある種の制約をもたらすことが予想できる. 実際これは正しい予想である.

Fact 3.5 もし κ 上に κ-complete κ^+-saturated ideal が存在して, $\forall\alpha < \kappa\,(2^\alpha = \alpha^+)$ が存在するならば, $2^\kappa = \kappa^+$ が成立する. □

これは巨大基数現象としてよく現れる反映原理[4]であり, 十分予想されることではある. そのような中で, Woodin による次の結果はそのような反映原理とはまったく別の現象であり, saturated ideal に関して予想だにしなかった制約をもたらした.

Fact 3.6 (Woodin) NS_{ω_1} が $\aleph_2$-saturated であるとする. さらにもしも measurable cardinal が存在するならば $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ である. □

"measurable cardinal が存在する" という仮定はやや技術的な感があり, これが消去可能であるかは重要な未解決問題である. ついでに述べておくが, GCH と "ある stationary set $S \subseteq \kappa$ で $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated である" ことは, (適当な巨大基数公理の無矛盾性を仮定すれば) 無矛盾である.

Fact 3.7 適当な巨大基数公理の無矛盾性を仮定する. このとき,

(1) $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ とある stationary set $S \subseteq \omega_1$ で $\mathrm{NS}_{\omega_1}|S$ が $\aleph_2$-saturated となることは無矛盾である,

(2) $\kappa > \omega_1$ に対して, GCH とある stationary set $S \subseteq \kappa$ で $\mathrm{NS}_\kappa|S$ が κ^+-saturated となるものが存在することは無矛盾である. □

(1) は Shelah[7] によるものであり, (2) については, Fact 3.4 のモデルがそれになっている.

---

[3](1) について何人も名前が上がっているのは, 証明に使われた巨大基数公理の仮定がだんだんと弱められていった結果である. (2) については各人が様々な κ と stationary set に対してモデルを構成しているからである.

[4]正確な定義があるわけではないが, "巨大基数 κ で成立している事は, κ より小さいある基数上でも部分的に成立している" と言った現象. 例えば Fact 2.15 であり, measurable cardinal の strongly inaccessible 性が κ より小さい cardinal に反映している.

4 Stationary set of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$

今までは κ の club や stationary set について考察を行ってきたが, ここより $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ と呼ばれる構造について考えていきたい. $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は巨大基数理論の発展とともに注目されてきた構造であり, κ の様々な性質が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して自然に変換できる.

Definition 4.1 λ を κ 以上の基数とする. この時,

$$\mathcal{P}_\kappa\lambda = \{x \subseteq \lambda : |x| < \kappa\}.$$

以後, 簡便のために λ は常に κ 以上の cardinal を表すものとする. まず, 次に注意しておく.

Note 4.2 (1) $|\mathcal{P}_\kappa\lambda| = \lambda^{<\kappa}$ であり,

(a) $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ ならば $\lambda^{<\kappa} > \lambda$,

(b) GCH の下では $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ ならば $\lambda^{<\kappa} = \lambda$, $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ ならば $\lambda^{<\kappa} = \lambda^+$ である. □

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対する club, stationary は Jech により次のような形で導入されている.

Definition 4.3 (Jech[11]) $X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して,

- X は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で **unbounded** $\iff \forall x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda \exists y \in X\, (x \subseteq y)$,
- X は **closed** $\iff \forall Y \subseteq X\, (|Y| < \kappa \wedge \forall x, y \in Y \exists z \in Y\, (x \cup y \subseteq z) \Rightarrow \bigcup Y \in X)$.

$C \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が **club** $\iff$ C は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で closed かつ unbounded.

$S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して, S が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で **stationary** $\iff$ $S \cap C \neq \emptyset$ が 任意の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の club C に対して成立する. □

κ の時と同様, 文脈から明らかなときは "$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ で" 等は省略する.

上のような形で導入された $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の club, stationary は通常の club, stationary と同じような性質を持っていることが示されている.

Fact 4.4 (1) もし $C, D \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が両方とも club ならば $C \cap D$ もまた club である. よって特に club は stationary 集合である,

(2) もし S が stationary ならば S は unbounded,

(3) X が unbounded ならば $|X| \geq \lambda$ であり, $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ ならば $|X| > \lambda$ である. □

また, 次の事実より, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary, club が κ のそれの拡張になっていることがわかる.

Fact 4.5 (1) κ の club は $\mathcal{P}_\kappa\kappa$ の club である,

(2) C が $\mathcal{P}_\kappa\kappa$ の club ならば $C \cap \kappa$ は κ の club になる. □

次の事実もまた, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set が κ の一般化であることを示している.

Fact 4.6 $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して次は同値:

(1) S は stationary,

(2) 任意の一階可算言語構造 M で $\lambda \subseteq M$ なるものに対して 初等的部分構造 $N \prec M$ で $N \cap \kappa \in \kappa$ かつ $N \cap \lambda \in S$ となるものが存在する. □

Fodor の補題の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 版も次のような形で成立する.

Fact 4.7 (Jech[11]) $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ を stationary set とする. この時 function $f : S \to \lambda$ で $\forall x \in S \setminus \{\emptyset\}\,(f(x) \in x)$ を満たすものに対して, $\beta < \lambda$ で $\{x \in S : f(x) = \beta\}$ が再び stationary となるものが存在する. □

一方で, κ のときとは違い Foder の補題の成立と stationary であることの同値性は成り立たない.

Fact 4.8 (Menas[21]) $\lambda > \kappa$ とする. このとき $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の unbounded だが non-stationary set で次の性質を満たすものが存在する: 任意の function $f : S \to \lambda$ で $\forall x \in S \setminus \{\emptyset\}\,(f(x) \in x)$ を満たすものに対して, ある $\beta < \lambda$ で $\{x \in S : f(x) = \beta\}$ が unbounded になる. □

上のような例外はあるにしても, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary と κ の stationary はほぼ同じような性質を持っている. このことから, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set の分割可能性についても κ の場合の類推から, 次のような予想が自然に立てられることとなる:

> $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set は $\lambda^{<\kappa}$ 個の stationary set に分割可能である.

これは Menas[21] によって提唱されたことから **Menas' conjecture** と呼ばれている. ところが, このような定式化では少々まずい問題が生じてしまう. $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ は無矛盾であるが, このときには $|\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_1| = \aleph_1^{<\aleph_1} \geq 2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$ となる. 一方で $\mathcal{P}_{\omega_1}\omega_1$ には濃度 $\aleph_1$ の stationary set が存在することが簡単に示せるが, 当然ながらこの stationary set は $\aleph_1^{<\aleph_1}$ 個に分割することは不可能である. このような自明な反例を避けるために, Menas' conjecture を次のような形に再定式化してみる:

> $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set S は $\min\{|S \cap C| : C$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の club$\}$ 個の statinary set に分割可能である.

$|S|$ ではなく $|S \cap C|$ を考えているのは次のような理由による: stationary set S が $S = S_0 \cup S_1$, S_0 は stationary, S_1 は non-statinary だが $|S_0| < |S_1|$ のような形に分割できる場合, この S は $|S|$ 個の stationary set には分割不可能である.

上記のような形での Menas's conjecture を考えると, 確かにこの予想は $\lambda = \kappa$ の場合は真である. 注目すべきは, この自然な予想が実は大きく間違っていたことが Gitik によって証明されたことである. この結果については後述する.

まずは κ の時と同様に stationary set の分割可能性が ideal の saturation に還元可能であり, これによりこの問題が ZFC から証明不可能であることに触れておく.

Definition 4.9

$$\mathrm{NS}_{\kappa\lambda} = \{X \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda : X \text{ は non-stationary}\}.$$

$\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の κ-complete ideal である. □

これは NS_κ の自然な拡張であり, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}$ に対しても NS_κ と同様に saturation と分割不可能性は相互に変換可能である.

Fact 4.10 $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ を stationary set とし, μ を $\mu \leq \lambda$ なる cardinal とする. このとき, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ が μ-saturated であることと S が μ 個の互いに素な stationary set に分割不可能であることは同値である. □

Fact 4.11 もし "ある stationary set $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ が λ^+-saturated となる" が無矛盾ならば, "measurable cardinal が存在する" もまた無矛盾である.

これにより, κ の stationary set の場合と同様, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set で λ 個に分割不可能なものが存在することは ZFC から証明不可能である. さらに, Solovay による Fact 2.18 の論法を改良することにより, 次が得られている.

Fact 4.12 (Gitik[8]) 任意の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set は κ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

次に, Menas' conjecture が ZFC と共存可能であることを示す. まず手始めに, λ 個への分割可能性について考える.

Fact 4.13 (Baumgartner) $S = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : |x| = |x \cap \kappa|\}$ とする. このとき,

(1) S は stationary である,

(2) もし κ が successor cardinal ならば S は club set を部分集合として持つ,

(3) 任意の S の stationary subset は λ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

上の Fact 4.13 により, κ が successor cardinal であるならば次のような結果が得られる.

Cor. 4.14 κ が successor cardinal ならば $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary subset は λ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

また, 次のことも示されている.

Fact 4.15 (Baumgartner) Gödel の constructible universe の中では, $\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : |x| = |x \cap \kappa|\}$ は常に club set を部分集合として持つ. □

Cor. 4.16 Gödel の constructible universe の中では, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary subset は λ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

GCHの元で, $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ならば$\mathcal{P}_\kappa\lambda$の stationary set の濃度は$\lambda$になる. よって, 例えば Gödel の constructible universe の中では $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ なる $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対しては Menas' conjecture が成立する事となる.

次に $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ の場合を考えたい. $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ の場合は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set の濃度は常に λ^+ 以上になるので, λ よりも大きい個数への分割可能性が考えられる. 実際にそれは自然な λ に対しては正しいことが示されている.

Fact 4.17 (Matsubara[18], Matsubara-Shioya [20], Matsubara-Shelah[19]) もし λ が strong limit singular cardinal ならば, 任意の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set は $\lambda^{<\kappa}$ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. さらに すべての stationary set S に対して $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ は λ^+-saturated にならない. □

以上をまとめることで, Menas' conjecture の無矛盾性が示される.

Fact 4.18 (Matsubara[18]) Menas' conjecture は ZFC と無矛盾である. 実際に Gödel の constructible universe で Menas' conjecture は真である. □

分割可能性についての, 上記以外の結果についても幾つか触れておく. Donder-Matet[2] は $2^{<\kappa} < \lambda$ という仮定から $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ のダイヤモンド原理と呼ばれるものが成立することを示しており, それにより $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 全体が $\lambda^{<\kappa}$ 個に分割可能であることを示している. また, Shioya[24] は, 何の仮定も用いずに, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 全体が λ^ω 個に分割可能であることを示している. また, Shioya[24] は $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ ならば $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は常に λ^+ 個の stationary set に分割可能であることも示している.

ついでに, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}$ の saturation についても触れておく.

Fact 4.19 (Burke-Matsubara[1], Foreman-Magidor[6]) $\kappa = \lambda = \omega_1$ でないならば, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}$ は λ^+-saturated ではない. また, $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ かつ $\kappa > \omega_1$ ならば $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}$ は λ^{++}-saturated ではない. □

Foreman-Magidor[6] の中では, $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ が λ^+-saturated にならないような stationary set の具体例が幾つかあげられている.

さて, ここで前述した, Menas' conjecture の反例について触れる.

Fact 4.20 (Gitik[8]) GCH を仮定する. κ を λ-supercompact cardinal[5] とする. このとき, forcing extension で次を満たすものが存在する:

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set で κ^+ 個に分割不可能なものが存在する. □

注目すべきは λ は κ^+ に比べていくらでも大きく取れ, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set の濃度が κ^+ より望むだけ大きくできるにも関わらず κ^+ 個にすら分割不可能なことである. この Gitik のモデルは非常に強い Menas' conjecture の反例になっている.

しかしながら Gitik のモデルにおいて $2^\kappa \geq \lambda$ となっており GCH は壊れている. Fact 4.17 により, λ が singular cardinal ならばこれは不可避な状況である. では λ が regular の場合はどうか?

[5] λ-supercompact cardinal は measurable cardinal より強い巨大基数である. 詳しい定義等は Kanamori[14] 等を参照されたい.

Question 4.21 (Gitik[8]) GCH の下で, regular λ に対して $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set で κ^+ 個に分割不可能なものが存在することは無矛盾であるか？

また, Fact 4.17 により GCH の元で λ が singular cardinal の時は, 任意の stationary set S に対して $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ は λ^+-saturated にならない. λ が regular の場合はどうであろうか?

Question 4.22 GCH の下で, regular λ に対して $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set S で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ が λ^+-saturated になるものが存在することは無矛盾であるか？

これらの問題に対しては幾つかの結果が得られている. そのことについて説明する.

Definition 4.23 regular cardinal λ に対して,

$$S(\kappa,\lambda) = \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \mathrm{ot}(x) \text{ は regular かつ } x \text{ は } \sup(x) \text{ で stationary}\}.$$

ここで, $\mathrm{ot}(x)$ は x の順序型, $\sup(x)$ は x の最小上界である. □

まず $S(\kappa,\lambda)$ の基本的な性質を幾つか書き出してみる.

Proposition 4.24 $\mathcal{P}_\kappa\lambda \setminus S(\kappa,\lambda)$ は stationary である. □

実際, $x \in S(\kappa,\lambda)$ ならば $|x \cap \kappa| \le \mathrm{ot}(x \cap \kappa) < \mathrm{ot}(x) = |x|$ となるので, $S(\kappa,\lambda) \cap \{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : |x| = |x \cap \kappa|\} = \emptyset$ が成立する. よって Fact 4.13 より $\mathcal{P}_\kappa\lambda \setminus S(\kappa,\lambda)$ が stationary であることが分かる. また, Fact 4.15 と合わせると, $S(\kappa,\lambda)$ は必ずしも stationary set になるとは限らないことが分かる.
$S(\kappa,\lambda)$ のような技術的な集合を考える理由の一つは次にある.

Proposition 4.25 (Usuba[29]) λ を regular とし, S を $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set とする. もし $S \setminus S(\kappa,\lambda)$ が stationary ならば, S は λ 個の互いに素な stationary set に分割可能である. □

これを逆にいえば, κ^+ 個に分割不可能な stationary set は (λ が regular ならば) 常に $S(\kappa,\lambda)$ の subset になっていることが分かる.
さて, この $S(\kappa,\lambda)$ に対して次のような結果が得られている.

Theorem 4.26 (Usuba[29]; $\lambda = \kappa^+$ に対しては Krueger[16]) GCH を仮定する. κ を λ-supercompact cardinal とし, λ を regular cardinal とする. このとき forcing extension で次を満たすものが存在する:

- $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S(\kappa,\lambda)$ は λ^+-saturated,
- GCH が成立. □

よって GCH と stationary set S で $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S$ が λ^+-saturated になるものの存在は無矛盾である. この結果は Fact 4.17 と対照的であり, λ が regular か singular かで $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 構造が劇的に変化することを示している.
また, Gitik の問題に対しては次のような部分解が得られている.

Theorem 4.27 (Usuba[05]) GCH を仮定する．κ を λ-supercompact cardinal とし，λ を regular cardinal とする．μ を cardinal で $\kappa \leq \mu < \lambda$ なるものとする．このとき forcing extension で次を満たすものが存在する:

- $\mathrm{NS}_{\kappa\lambda}|S(\kappa, \lambda)$ は μ^+-saturated,
- 任意の cardinal ν で $\kappa \leq \nu < \mu$ なるものに対して $2^\nu = \nu^+$ が成立する．□

例えば，$S(\kappa, \kappa^{++})$ が κ^{++} 個の互いに素な stationary set に分割不可能だが $2^\kappa = \kappa^+$ となることは無矛盾である．

もちろん，Theorem 4.27 は Gitik の問題の完全な解答にはなっていない．一方で，Fact 4.17 や Donder-Matet[2] の結果のように，GCH と分割不可能な stationary set の存在は，どこか合い入れない感触がある．また，GCH という仮定が様々な無限組み合わせ論的命題の真偽を決定してしまうことは経験的事実として知られている．以上を踏まえて，われわれは次のような修正された Menas' conjecture を提唱してこの解説を終えたいと思う．

> GCH の下では，$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の任意の stationary set は $\lambda^{<\kappa}$ 個の互いに素な stationary set に分割可能である．

参考文献

[1] D. Burke, Y. Matsubara, *The extent of strength in the club filters.* Israel J. Math. 114 (1999), 253–263.

[2] H. Donder, P. Matet, *Two cardinal versions of diamond.* Israel J. Math. 83 (1993), no. 1-2, 1–43.

[3] G. Fodor, *Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen.* Acta Sci. Math. Szeged 17 (1956), 139–142.

[4] G. Fodor, *On stationary sets and regressive functions.* Acta Sci. Math. (Szeged) 27 (1966) 105–110.

[5] M. Foreman, *More saturated ideals.* Cabal seminar 79–81, 1–27, Lecture Notes in Math., 1019, Springer, Berlin, 1983.

[6] M. Foreman, M. Magidor, *Mutually stationary sequences of sets and the non-saturation of the non-stationary ideal on $P_\varkappa(\lambda)$.* Acta Math. 186 (2001), no. 2, 271–300.

[7] M. Foreman, M. Magidor, S. Shelah, *Martin's maximum, saturated ideals, and nonregular ultrafilters.* I. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 1, 1–47.

[8] M. Gitik, *Nonsplitting subset of $P_\kappa(\kappa^+)$.* J. Symbolic Logic 50 (1985), no. 4, 881–894.

[9] M. Gitik, *Changing cofinalities and the nonstationary ideal.* Israel J. Math. 56 (1986), no. 3, 280–314.

[10] M. Gitik,S. Shelah, *Less saturated ideals.* Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 5, 1523–1530.

[11] T. Jech, *Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals.* Ann. Math. Logic 5 (1972/73), 165–198.

[12] T. Jech, M. Magidor, W. Mitchell, K. Prikry, *Precipitous ideals.* J. Symbolic Logic 45 (1980), no. 1, 1–8.

[13] T. Jech, H. Woodin, *Saturation of the closed unbounded filter on the set of regular cardinals.* Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), no. 1, 345–356.

[14] A. Kanamori, *The higher infinite.* Large cardinals in set theory from their beginnings. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[15] A. カナモリ (訳:渕野昌), 巨大基数の集合論, シュプリンガーフェアラーク東京, 1998. (Kanamori[14] の和訳)

[16] J. Krueger, *Adding Clubs with Square.* To appear.

[17] K. Kunen, *Set theory.* An introduction to independence proofs. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[18] Y. Matsubara, *Consistency of Menas' conjecture.* J. Math. Soc. Japan 42 (1990), no. 2, 259–263.

[19] Y. Matsubara, S. Shelah, *Nowhere precipitousness of the non-stationary ideal over $P_\kappa\lambda$.* J. Math. Log. 2 (2002), no. 1, 81–89.

[20] Y. Matsubara, M. Shioya, *Nowhere precipitousness of some ideals.* J. Symbolic Logic 63 (1998), no. 3, 1003–1006.

[21] T. K. Menas *On strong compactness and supercompactness.* Ann. Math. Logic 7 (1974/75), 327–359.

[22] S. Shelah, *Proper forcing.* Lecture Notes in Mathematics, 940. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.

[23] S. Shelah, *Iterated forcing and normal ideals on ω_1.* Israel J. Math. 60 (1987), no. 3, 345–380.

[24] M. Shioya, *Splitting $P_\kappa\lambda$ into maximally many stationary sets.* Israel J. Math. 114 (1999), 347–357.

[25] R. M. Solovay, *Real-valued measurable cardinals.* Axiomatic set theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif.,1967), pp. 397–428.

[26] J. Steel, R. Van Wesep, *Two consequences of determinacy consistent with choice.* Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), no. 1, 67–85.

[27] A. Tarski, *Ideale in vollstandigen Mengenkorpern. II.* Fund. Math. 33, (1945). 51–65.

[28] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre* Fund. Math. 16, (1930). 140–150.

[29] T. Usuba, *Local saturation of the non-stationary ideal over* $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, submitted.