数理解析研究所講究録
1525 巻 2006 年 62-93

量子集合論と量子力学の解釈問題

東北大学大学院情報科学研究科　小澤 正直　(Masanao Ozawa)

1　はじめに

19 世紀末の数学の危機に際して，数学の徹底した形式化とそれに関する超数学を展開することにより，有限の立場から数学の無矛盾性を証明するというHilbert のプログラムは，Gödel の不完全性定理という全く予想外の成果を生んだことでも，論理学の歴史上極めて特筆すべきできごとであった．ところで，それと同時期に，厳密な学の体系化とその基礎付けという同じ精神から Hilbert は，経験諸科学の公理化とそれに基づく形式化を推進して，超数学の方法を経験科学の全体に及ぼして，数学だけでなく全経験科学の確実な基礎を打ち立てようと企て，それを有名な数学の 23 問題中，第 6 の問題として取り上げた．しかし，このことが，20 世紀の数理論理学に大きなインパクトを与えなかったことは残念なことである．かつて論理学の役割が数学の基礎付けに限定されたことがなかったことは明らかで，20 世紀に数学基礎論としてギリシャ時代以来最大の発展を達成した論理学が，経験科学全体の基礎付けに重要な役割を果たすことが 21 世紀の論理学の課題となるであろう．

ちなみに，Gödel の不完全性定理の鍵となる原始帰納的関数の算術における表現可能性を一般化して，Church は，一般帰納的関数の概念を確立し，計算可能関数のクラスが一般帰納関数のクラスと一致するという提唱を行い，Turing がそれを機械論的数学モデルによる計算可能性で特徴付けたことにより，初めて，計算という概念に数学的定義が与えられた．このことをもって，計算理論が論理学から独立したと考えられるが，20 世紀中に，電子計算機が実現され，計算量理論ができ，現代暗号の安全性の基礎を与え，さらに，それを揺るがす Shor の量子計算アルゴリズムが発見されるというダイナミックな流れの中で 20 世紀が締めくくられたことは[1]，論理学とそこから派生した関連分野が物理学を初めとする広範囲の経験科学と緊密な内的連関を構成する 21 世紀における論理学と経験科学の新しい連携が予想される．

Hilbert の第 6 問題への貢献として有名なのは，1932 年に出版された von Neumann [26] による量子力学の公理化である．そこでは，量子力学的状態がいわゆる状態ベクトルと呼ばれる単位ベクトルに対応し，量子力学的物理量（観測可能量）が自己共役作用素に対応するという要請が明らかにされた．Born の確率解釈を一般化するため，自己共役作用素のス

[1]このような論理学から量子情報科学への流れについては，拙文 [20] を参照されたい．

ペクトル分解の理論を展開して，量子力学的物理量とそれがとる値の区間に対応して，スペクトル射影が定まり，状態ベクトルをその射影作用素で射影した長さの2乗がその物理量がその区間に値をとる確率であるという統計公式が確立された．興味深いことに，それに引き続いて，射影作用素が量子力学系に関する観測命題に対応するという見方が展開されている．つまり，1932年の段階で既に，Born の確率解釈の背後に，量子論理という独特の論理が存在することが示唆されたのだといえよう．この着想が実って，量子力学系の観測命題に関する命題論理の意味論的構造を明らかにするために，1936年に Birkhoff と von Neumann [2] によって量子論理が導入された．それ以来，記号論理学の様々な方法が量子力学の論理構造の解明に導入されてきたが，1981年に竹内 [23] によって量子集合論が導入されるまでは，集合概念と集合論に基づく数体系等の数学的対象の構成原理が量子論理の研究対象にされることはなかった．

Birkhoff と von Neumann による量子論理は，量子力学系の状態空間を表現する Hilbert 空間の閉線形部分空間からなる束構造に基づいている．竹内の量子集合論では，量子論理に基づく集合論の普遍類を構成するが，これは，連続体仮説の独立性証明に用いられた Cohen [4, 5] の強制法を再定式化した Scott と Solovay [21] による集合論の Boole 代数値モデルの量子論理版と考えることができる．竹内は，量子集合論に対象の間の可換性を意味する関係を導入し，ZFC 集合論の公理に可換性の条件を付加した公理が成立していることを示し，豊かな集合論が展開されることを示唆した．しかし，一方で，一般の対象の間では，等号公理のような基本的な公理が成立しないことも示して，極めて扱いにくい側面をも明らかにした．集合論が全数学の基礎を与えたことと全く並行的に，量子集合論が量子力学の解釈に首尾一貫した論理的基礎を与えることが予想されるにも関わらず，このことから，量子集合論および量子論理に基づいて数学を展開する試み一般に対して，否定的な見解が流布している [6]．

本稿は，竹内の量子集合論を展開して最近得られたいくつかの新しい成果 [18] について解説し，それによって，このような否定的な見解が表面的な根拠しかもたないことを明らかにすることを第一の目的としている．また，それらの成果に基づいて，量子集合論と量子力学の解釈の関係についていくつかの考察を与える．主な内容は以下の通りである．第2節では，von Neumann による量子力学の公理系が導入される．第3節では，量子力学の公理系の背後にある論理学的原理を明らかにするために，量子力学の観測命題の命題論理の構造について考察する．観測命題の Lindenbaum 代数が Hilbert 空間の閉部分空間の束と同型になることを示し，その成立確率を定める公式を導いて，Born の統計公式を任意の観測命題の成立確率に拡張する．最後に，二つの観測可能量が等しい値をもつことを意味する比較的単純な観測命題を定義するためにも，集合論の言語のように表現力の強い述語論理を量子論理に導入する必要があることが指摘される．第4節では，量子論理における含意について考察する．現状では，量子論理における含意接続詞にはいくつかの候補があるが，竹内 [23] とともに本稿では，佐々木アローと呼ばれる定義を用いる．第5節では，Hilbert 空間上の論理について解説する．ここでは，量子論理としてより一般に von

Neumann 代数の射影束を考える．これは，場の量子論に応用するためには必要な一般化である．第６節では，Hilbert 空間上の論理に基づく量子集合論が導入される．第７節では，ZFC の定理から量子集合論で成立する命題への移行原理の証明が解説される．これにより，有界な限量記号を用いて書かれる ZFC の任意の定理が，その定理にあらわれる定項が互いに可換になる任意の量子状態で成立する．ただし，ここで用いられる可換性の概念は，状態に依存した局所的な概念で作用素の積が交換するという，いわば大域的概念より一般的なものである．第８節では，量子集合論における実数の表現が解説される．量子集合論における実数の全体と，量子論理から生成される von Neumann 代数にアフィリエイトする（つまり，単位の分解が属する）自己共役作用素が一対一に対応することが導かれる．量子力学の基本原理から自己共役作用素と量子力学系の観測可能量が対応するので，量子集合論における実数に関する命題は量子力学の観測命題に対応する．第９節では，第３節で導入した量子力学の観測命題が真理値を保存して，量子集合論の命題に埋め込まれることを示す．また，量子集合論の各命題の所与の状態における成立確率をその真理値に対応する部分空間への射影の長さの２乗と定義する．すると，この対応において，Born の統計公式における観測可能量の確率分布が量子集合論における実数が区間に所属するという命題の成立確率と一致する．第１０節では，観測可能量の値の実在性と量子実数の可換性の関係ついて考察する．いくつかの観測可能量の値が実在論的解釈を持つことと，対応する量子集合論における実数がその状態で可換であることが同値であることが示される．移行原理と合わせると，ある状態でいくつかの観測可能量の値が実在論的解釈を持つことと，その状態でそれらの観測可能量に関する ZFC の任意の定理が確率１で成立することが同値である．第１１節では，量子観測可能量の値の同一性と量子実数の相等関係について考察する．ここでは，量子実数の間の相等関係からそれらの可換性が導かれる．このことから，量子実数の間の相等関係は代入規則を含む等号公理をすべて満たすことが導かれる．従って，量子集合論で等号公理が一般に成立しないことは，量子力学への応用に際して，障害にはならない．ある状態で量子実数の間の相等関係が確率１で成立することは，それらがつねに同時測定可能で，同一の値を測定値として与えることと同値である．つまり，量子集合論における実数の相等関係は不確定性を持つが，その成立確率は実験的に検証可能である．第１２節では，これらの成果に基づいて，不確定性原理の新しい解釈について考察し，ある状態でいくつかの観測可能量の値が実在論的解釈を持つことと，それらの可換性は同値であるが，ある状態でいくつかの観測可能量の値が同時測定可能であることと，それらの可換性は同値ではないことを明らかにする．

2　量子力学の公理系

以下で，von Neumann [26] による量子力学の公理系（QM1, QM2, QM3 と名付ける）を導入する．

QM1. （状態と観測可能量の表現）量子力学系 **S** には Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が対応し，

S の状態は $\mathcal{H}$ の単位ベクトルに対応し，S の観測可能量は $\mathcal{H}$ 上で稠密に定義された自己共役作用素が対応する．

観測可能量を作用素に対応させるためには，一つの単位系を固定して考える必要がある．この固定された単位系におけるプランク定数の値を 2π で割った値を $\hbar$ で表す．

von Neumann [26] は，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で稠密に定義された自己共役作用素 A に対して，次の性質をもつ射影作用素 $E(\lambda)$ の族 $(-\infty < \lambda < +\infty)$ が存在することを示した．

(i) $\lambda \to -\infty$ または $\lambda \to +\infty$ に対して，それぞれ $E(\lambda)\psi \to 0$ または $E(\lambda)\psi \to \psi$ が成り立ち，$\lambda \to \lambda_0$，$\lambda \geq \lambda_0$ に対して，$E(\lambda)\psi \to E(\lambda_0)\psi$ が任意の ψ について成り立つ．

(ii) $\lambda' \leq \lambda''$ ならば $E(\lambda') \leq E(\lambda'')$ が成り立つ．

(iii) Stieltjes 積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(\|E(\lambda)\psi\|^2)$$

が収束する ψ と任意の ψ' に対して，

$$\langle \psi', A\psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d\langle \psi', E(\lambda)\psi \rangle$$

が成り立つ．

上の (i), (ii) の性質をもつ射影作用素の族 $E(\lambda)$ を一般に単位の分解と呼び，A に対して (iii) を満たす単位の分解は，A に属するという．以下，A に属する単位の分解を $E^A(\lambda)$ と表す．以下では，$(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ を区間と呼ぶ．ただし，$a, b \in R$ または $a = -\infty$．$E^A(\lambda)$ を自己共役作用素 A に属する単位の分解とし，区間 $I = (a,b]$ に対して，

$$E^A(I) = E^A(b) - E^A(a),$$

と定義する．ただし，$E^A(-\infty) = 0$ とする．二つの観測可能量（または，自己共役作用素）A, B が可換（$A \mathrel{\natural} B$ と表す）とは，すべての $E^A(\lambda)$ とすべての $E^B(\mu)$ が可換であることをいう．

QM2. （Born の統計公式）互いに可換な観測可能量 $A_1, \ldots, A_n$ の値が状態 ψ において区間 $I_1, \ldots, I_n$ に属する確率は

$$\|E^{A_1}(I_1) \cdots E^{A_n}(I_n)\psi\|^2$$

で与えられる．

ここで，

$$\mu_\psi^{A_1,\ldots,A_n}(I_1 \times \ldots \times I_n) = \|E^{A_1}(I_1) \cdots E^{A_n}(I_n)\psi\|^2$$

とおくと，$\mu_\psi^{A_1,\ldots,A_n}$ は $\mathbf{R}^n$ 上の確率測度に拡張でき，これを観測可能量 $A_1, \ldots, A_n$ の状態 ψ における結合確率分布と呼ぶ．

QM3. (Schrödinger 方程式) 時刻 t_1 から t_2 まで孤立した量子力学系 S は，ハミルトニアンと呼ばれる観測可能量 H をもち，S の時刻 t, t' $(t_1 < t, t' < t_2)$ における状態 $\psi(t), \psi(t')$ は，

$$\psi(t') = \exp\left(\frac{(t'-t)H}{i\hbar}\right)\psi(t)$$

をみたす.

公理 QM3 から S の時刻 t $(t_1 < t < t_2)$ における状態 $\psi(t)$ は，H の定義域に属する限り，微分方程式

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{H}{i\hbar}\psi(t)$$

をみたし，これを Schrödinger 方程式とよぶ.

3 量子論理

3.1 量子観測命題

量子論理の一つの目標は，量子力学の基本公理の背景に，より一般的な論理学的原理があると考え，それに従って，量子力学の解釈を拡張することであると考えられる．まず，観測命題を定義する.

WF1. (原子観測命題) 量子力学系 S の観測可能量 A と区間 I に対して，原子観測命題 $A \in I$ が対応する．原子観測命題は観測命題である.

WF2. (論理記号の導入) ϕ が観測命題ならば，$\neg\phi$ も観測命題である．ϕ_1 と ϕ_2 が観測命題ならば，$\phi_1 \wedge \phi_2$，$\phi_1 \vee \phi_2$，$\phi_1 \to \phi_2$, $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$ も観測命題である.

WF3. (観測命題) WF1とWF2 で観測命題とされたものだけが，観測命題である.

3.2 観測命題の真偽

次に，観測命題の真理値を定義するために，観測命題 ϕ と状態 ψ に対して，状態 ψ で観測命題 ϕ が真であることを意味する関係 $\psi \Vdash \phi$ を以下の規則で導入する．以下で，$\mathcal{R}$ は作用素の値域 (の閉包)を表す.

QF1. $\psi \Vdash A \in I \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{R}[E^A(I)]$.

QF2. $\psi \Vdash \neg\phi \Leftrightarrow \psi' \Vdash \phi$ となるすべての ψ' に対して，$\psi \perp \psi'$.

QF3. $\psi \Vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow \psi \Vdash \phi_1$ かつ $\psi \Vdash \phi_2$.

QF4. $\psi \Vdash \phi_1 \vee \phi_2 \Leftrightarrow \psi \Vdash \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$.

QF5. $\psi \Vdash \phi_1 \to \phi_2 \Leftrightarrow \psi \Vdash \neg\phi_1 \vee (\phi_1 \wedge \phi_2)$.

QF6. $\psi \Vdash \phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \Leftrightarrow \psi \Vdash \phi_1 \to \phi_2$ かつ $\psi \Vdash \phi_2 \to \phi_1$.

ちなみに，古典物理学の観測命題の真理値は，以下のように定めることができる．Ω を古典物理学系 S の相空間とする．S の状態は Ω の点に対応し，S の観測可能量は Ω 上の

Borel 関数が対応する．状態 ω で命題 ϕ が真であることを意味する関係 $\omega \Vdash \phi$ は，以下の規則で定めることができる．

CF1. $\omega \Vdash A \in I \Leftrightarrow \omega \in A^{-1}(I)$.

CF2. $\omega \Vdash \neg\phi \Leftrightarrow \omega' \Vdash \phi$ となるすべての ω' に対して，$\omega \neq \omega'$.

CF3. $\omega \Vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow \omega \Vdash \phi_1$ かつ $\omega \Vdash \phi_2$.

CF4. $\omega \Vdash \phi_1 \vee \phi_2 \Leftrightarrow \omega \Vdash \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$.

CF5. $\omega \Vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2 \Leftrightarrow \omega \Vdash \neg\phi_1 \vee (\phi_1 \wedge \phi_2)$.

CF6. $\omega \Vdash \phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \Leftrightarrow \omega \Vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$ かつ $\omega \Vdash \phi_2 \rightarrow \phi_1$.

原子命題を別とすると，古典力学と量子力学の違いは，否定の真理値にある．また，古典力学の場合，$\neg\phi_1 \vee (\phi_1 \wedge \phi_2)$ は，$\neg\phi_1 \vee \phi_2$ と同等になるが，量子力学の場合は，両者は異なり，$\omega \Vdash \phi_1 \rightarrow \phi_2$ の真理値を，$\omega \Vdash \neg\phi_1 \vee \phi_2$ と定めることはできない．

3.3 射影束

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の任意の部分集合 S に対して，$S^\perp$ でその直交補空間を表す．つまり，$S^\perp = \{\psi \in \mathcal{H} |$ 任意の $\xi \in S$ に対して $\langle \xi, \psi \rangle = 0\}$．すると $S^{\perp\perp}$ は，集合 S の生成する閉部分空間になる．$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ の閉部分空間の全体とする．集合の包含関係 $M \subseteq N$ から決まる順序関係によって，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ の任意の部分集合は上限と下限をもつので，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は完備束である．$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ における束演算は，$M \wedge N = M \cap N$, $M \vee N = (M \cup N)^{\perp\perp}$, $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}$, かつ $\bigvee \mathcal{S} = (\bigcup \mathcal{S})^{\perp\perp}$ と表される．ここで，$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{H})$．$M \vee N$ は，$M \vee N = \overline{M + N}$ とも表すことができる．$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は非分配束であるが，対応 $M \mapsto M^\perp$ は，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ において直補元を対応させる演算になり，オーソモジュラ則をみたす [9, p. 65]．つまり，$M_1 \leq M_2$ ならば

$$M_2 = M_1 \vee (M_1^\perp \wedge M_2)$$

が成り立つ．これにより，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は完備オーソモジュラ束になる．また，De Morgan の法則

$$(M \wedge N)^\perp = M^\perp \vee N^\perp, \quad (M \vee N)^\perp = M^\perp \wedge N^\perp,$$

が成り立つ．これから，束演算は共通部分をとる演算と直交補空間をとる演算だけから定義できることになる．

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体を表す．$P = P^\dagger = P^2$ をみたす作用素を射影作用素と呼び，$\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ で $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の全体を表す．$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の作用素順序を次のように定義する．$A \leq B$ は $\langle \psi, A\psi \rangle \leq \langle \psi, B\psi \rangle$ が任意の $\psi \in \mathcal{H}$ について成立することとする．任意の $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{R}(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ で A の値域の閉包を表す．すなわち，$\mathcal{R}(A) = (A\mathcal{H})^{\perp\perp}$．任意の $M \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{P}(M) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ で M を値域とする射影作用素を表す．すると，$\mathcal{RP}(M) = M$ が任意の $M \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ に対して成立し，かつ $\mathcal{PR}(P) = P$ が任意の $P \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して成立するので，$P \leq Q$ と $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(Q)$ は任

意の $P, Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して同値である．従って，$\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ は作用素順序のもとで，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ と同型な完備オーソモジュラ束である．束演算と代数演算の関係として，$P \wedge Q = \lim_{n\to\infty}(PQ)^n$, $P^\perp = 1 - P$ が任意の $P, Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して成り立つ．

射影作用素 P, Q に対して，$[P, Q] = PQ - QP$ と表す．射影作用素 P と Q が可換である（$P \,\natural\, Q$ ）とは，$[P, Q] = 0$ となることであり，これは，束演算による関係 $P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^\perp)$ と同等である．P と Q が可換なとき，$P \wedge Q = PQ$ かつ $P \vee Q = P + Q - PQ$ が成り立つ．

観測命題の含意と論理的同値の真偽の定め方に従って，射影束に量子論理の含意と論理的同値に対応する演算を以下のように導入する．

$$P \to Q = P^\perp \vee (P \wedge Q), \quad P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P).$$

これから，

$$P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (P^\perp \wedge Q^\perp) = (P \wedge Q) + (P^\perp \wedge Q^\perp)$$

が得られる．

3.4 観測命題の Lindenbaum 代数

各々の観測命題は，状態が決まれば真か否かが定まる．真であれば，その状態における観測によって確率 1 でその観測命題が成立していることを検証できるが，真でなければ，正の確率でその観測命題の不成立が検証される．このような確率を定めるために，観測命題の間に含意の関係を導入する．古典論理では，推論または演繹の概念があって，命題 ϕ_1 から ϕ_2 が推論または演繹によって導かれるとき，ϕ_1 から ϕ_2 が含意されるというが，これは完全性定理から，任意の二値付値 v に対して，v で ϕ_1 が真なら，v で ϕ_2 が真であることと同等である．前者は含意のシンタクティカルな定義，後者はセマンティカルな定義と見なすことができる．量子論理の場合は，推論の概念より観測による検証の概念が先立っていると考えられるので，セマンティカルな定義が自然に得られる．つまり，含意は，状態概念を用いて定義され，任意の状態 ψ に対して，$\psi \Vdash \phi_1$ ならば $\psi \Vdash \phi_2$ が成り立つとき，ϕ_1 が ϕ_2 を含意するという．

そこで，各観測命題 ϕ にそれをを真とする状態からなる集合 $[\phi] = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \|\psi\| = 1,\ \psi \Vdash \phi\}$ を対応させよう．明らかに，ϕ_1 が ϕ_2 が含意するための必要十分条件は，$[\phi_1] \subseteq [\phi_2]$ であり，どちらからも含意される，つまり，ϕ_1 と ϕ_2 が論理的に同値であるための必要十分条件は $[\phi_1] = [\phi_2]$ である．従って，$[\phi]$ の全体からなる集合の包含関係による半順序集合は，観測命題の論理的同値類の全体のなす含意の関係による半順序集合と同型である．これは，古典論理の Lindenbaum 代数に対応するもので，古典論理では，原子命題から生成される自由 Boole 代数になる．量子論理の場合は Boole 代数にはならないが，これを観測命題の Lindenbaum 代数と呼ぶことにする．

量子力学の論理構造を最も端的に表す数学的構造は，このようにして得られた観測命題の Lindenbaum 代数である．これは，完備オーソモジュラ束の構造をもち量子力学系を記述する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間全体からなる束，または，その上で定義された射影作用素全体からなる束と同型であることが示される．そのために，$[\phi]$ に属する状態の張る 1 次元部分空間（射線）の合併集合 $\mathbf{C}[\phi] = \{\alpha\psi \mid \alpha \in \mathbf{C}, \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1, \psi \Vdash \phi\}$ を考える．QF1 から，原子命題 $A \in I$ に対しては，$\mathbf{C}[A \in I]$ は，明らかにスペクトル射影 $E^A(I)$ の値域に一致する．また，QF2, QF3 から $\mathbf{C}[\neg\phi] = (\mathbf{C}[\phi])^{\perp}$ かつ $\mathbf{C}[\phi_1 \wedge \phi_2] = \mathbf{C}[\phi_1] \cap \mathbf{C}[\phi_2]$ も明かである．他の論理接続詞は $\wedge$ と $\neg$ で定義されているから，これで，すべての観測命題 ϕ に対して，$\mathbf{C}[\phi]$ は，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間となり，論理演算と束演算が対応することが導かれる．一方，任意の閉部分空間 M に対して，$A = \mathcal{P}(M)$, $I = (1/2, 1]$ とすれば，$\mathbf{C}[A \in I] = M$ となる．故に，任意の閉部分空間に対応する観測命題が存在する．最後に，$[\phi]$ と $\mathbf{C}[\phi]$ の対応が 1 対 1 であることを示す必要がある．そのためには，$[\phi]$ が $\mathbf{C}[\phi]$ の単位ベクトルの全体と一致することを示せばよい．それには，任意の状態 ψ，観測命題 ϕ，及び，絶対値が 1 の複素数 α に対して，$\psi \Vdash \phi$ ならば $\alpha\psi \Vdash \phi$ が言えればよい．このことは，原子命題については明かである．$\psi \perp \psi'$ なら $\alpha\psi \perp \psi'$ だから，ϕ について言えれば，$\neg\phi$ について言える．また，ϕ_1 と ϕ_2 について言えれば，$\phi_1 \wedge \phi_2$ について言えることも明かである．すべての観測命題は，$\neg$ と $\wedge$ から構成されたある観測命題と論理的に同値だから，これで，$[\phi]$ が $\mathbf{C}[\phi]$ の単位ベクトルの全体と一致することが示された．以上から，観測命題の Lindenbaum 代数は，量子力学系を記述する Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間全体からなる束，または，その上で定義された射影作用素全体からなる束と同型であることが示された．

そこで，観測命題 ϕ の真理値を射影作用素によって，$[\![\phi]\!] = \mathcal{P}(\mathbf{C}[\phi])$ と定義する．つまり，

$$[\![\phi]\!] = \mathcal{P}(\{\alpha\psi \mid \alpha \in \mathbf{C}, \psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1, \psi \Vdash \phi\})$$

すると，観測命題 ϕ の真理値は以下の規則をみたすことがわかる．

QL1. $[\![A \in I]\!] = E^A(I)$.

QL2. $[\![\neg\phi]\!] = [\![\phi]\!]^{\perp}$.

QL3. $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \wedge [\![\phi_2]\!]$.

QL4. $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \vee [\![\phi_2]\!]$.

QL5. $[\![\phi_1 \to \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \to [\![\phi_2]\!]$.

QL6. $[\![\phi_1 \leftrightarrow \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \leftrightarrow [\![\phi_2]\!]$.

以上から，対応 $\phi \mapsto [\![\phi]\!]$ は，観測命題から観測命題の Lindenbaum 代数への自然な写像であることがあきらかである．

3.5 観測命題の実現確率

さて，観測命題の真理値が $[\![\phi]\!]$ であるとき，その実現確率はどのように定められるのであろ

うか．それを定める仮説は，「二つの観測命題が論理的に同値ならば，各状態におけるそれらの実現確率は等しい」というものである．この仮説から，状態 ψ における観測命題 ϕ の実現確率が

$$\Pr\{\phi\|\psi\} = \|[\![\phi]\!]\psi\|^2 \tag{3.1}$$

で定められることがわかる．まず，任意の観測命題 ϕ に対して，それと同値な原子命題 $A \in I$ が存在する．例えば，$A = [\![\phi]\!]$ かつ $I = (1/2, 1]$ とすれば，$[\![A \in I]\!] = E^A(I) = [\![\phi]\!]$ となり，ϕ と $A \in I$ は論理的に同値である．観測命題 $A \in I$ の実現確率は Born の統計公式から

$$\Pr\{A \in I\|\psi\} = \|E^A(I)\psi\|^2 = \|[\![\phi]\!]\psi\|^2$$

となる．上の仮説から，$\Pr\{\phi\|\psi\} = \Pr\{A \in I\|\psi\}$ でなければならないので，Eq. (3.1) が導かれる．

観測命題の実現確率を用いると，量子力学の統計公式は以下の関係で表される．

$$\begin{aligned}\mu_{\psi(t)}^{A_1,\ldots,A_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) &= \Pr\{A_1 \in I_1 \wedge \cdots \wedge A_n \in I_n\|\psi(t)\} \\ &= \|[\![A_1 \in I_1 \wedge \cdots \wedge A_n \in I_n]\!]\psi(t)\|^2.\end{aligned}$$

量子論理を仮定すると，$A_1, \ldots, A_n$ が互いに可換でない場合にも，それらが区間 $I_1, \ldots, I_n$ に値を持つ確率を定めることができる．

$$\Pr\{A_1 \in I_1 \wedge \cdots \wedge A_n \in I_n\|\psi(t)\} = \|[\![A_1 \in I_1 \wedge \cdots \wedge A_n \in I_n]\!]\psi(t)\|^2.$$

このように，量子論理は観測命題の確率解釈を自然に拡張することができる．

3.6 スピン1/2の粒子：分配則の反例

スピン1/2の粒子のスピンの x, y, z 成分は，Pauli 行列

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

で表される（$\hbar = 2$）．このとき，

$$\begin{aligned}[\![\sigma_x = +1]\!] &= \frac{I + \sigma_x}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ [\![\sigma_x = -1]\!] &= \frac{I - \sigma_x}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\sigma_y = +1]\!] &= \frac{I+\sigma_y}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \\
[\![\sigma_y = -1]\!] &= \frac{I-\sigma_y}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \\
[\![\sigma_z = +1]\!] &= \frac{I+\sigma_z}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[\![\sigma_z = -1]\!] &= \frac{I-\sigma_z}{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と表すことができる．

任意の $a, b = \pm 1$ について

$$[\![\sigma_z = a \wedge \sigma_x = b]\!] = 0$$

であり，任意の状態 ψ において

$$\Pr\{\sigma_z = a \wedge \sigma_x = b \| \psi\} = 0$$

となる．ただし，"$A = a$"="$A \in (a - \epsilon, a]$" (ϵ は十分に小さい正数).

一方，$[\![\sigma_x = +1 \vee \sigma_x = -1]\!] = 1$ だから，

$$[\![\sigma_z = +1 \wedge (\sigma_x = +1 \vee \sigma_x = -1)]\!] = [\![\sigma_z = +1]\!] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるが，

$$\begin{aligned}
&[\![(\sigma_z = +1 \wedge \sigma_x = +1) \vee (\sigma_z = +1 \wedge \sigma_x = -1)]\!] \\
&= [\![\sigma_z = +1 \wedge \sigma_x = 1]\!] \vee [\![\sigma_z = 1 \wedge \sigma_x = -1]\!] \\
&= 0
\end{aligned}$$

だから，分配則は成り立たない．

3.7 観測可能量の値の同一性

A と B が $x_1, \ldots, x_n$ のいずれかの値をとる観測可能量とする．（つまり，それぞれのスペクトルが $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に含まれる.）このとき，A と B の値が等しいことを意味する観測命題 $A = B$ を

$$\text{"}A = B\text{"} = \text{"}(A = x_1 \leftrightarrow B = x_1) \wedge \cdots \wedge (A = x_n \leftrightarrow A = x_n)\text{"}$$

で定めることができる．

しかし，この定義を，スペクトルが無限集合である 一般の物理量にあてはめることはできない．従って，一般に $A = B$ のような観測命題を扱うには，限量記号を含むもっと強力な言語が必要である．この目的のためには，量子集合論を考えるのがもっとも妥当であると考えられる．集合論は一階の述語論理の言語で書かれるので，量子論理に基づく述語論理であり，また，集合の関係記号を有するので，$A = B$ や $A \in I$ のような原子命題の真理値がもともと備わっているので，量子力学からそれらの定義を流用する必要がない．問題は，そのような集合論としてあらかじめ定まっている真理値が量子力学の確率解釈から定まる真理値と一致するかということである．それらが一致すると言うことは，量子力学の確率解釈の背後に単に量子論理と言う論理が隠されていたと言うだけでなく，量子集合論と言う数学的対象の構成原理が隠されていて，量子力学的観測可能量とは，量子論理に基づいて実数を構成するときに自然にあらわれる概念であると言うことになる．従来，数学の中ではそのようなことがアナロジーとして語られることはあった．たとえば，作用素環論は非可換な，つまり，量子力学の原理に基づく数論であると言う言い方がされてきたが，そのようなアナロジーを正当化するための上位の原理は存在しなかった．以下では，量子集合論を展開することにより，実際にそのようになっていることを明らかにしよう．

4 量子論理における含意

古典論理では，含意接続詞 $\rightarrow$ は，否定と選言を用いて $P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q$ と定義される．量子論理では，いくつかの対応概念が提案されている．Hardegree [8] は，含意接続詞に対する以下の条件を提案した．以下，P, Q は量子論理 $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の元とする．

(E) $P \rightarrow Q = 1$ と $P \leq Q$ は同値である．

(MP) $P \wedge (P \rightarrow Q) \leq Q$.

(MT) $Q^{\perp} \wedge (P \rightarrow Q) \leq P^{\perp}$.

(LB) $P \,\text{\textdownarrow}\, Q$ ならば $P \rightarrow Q = P^{\perp} \vee Q$.

Kotas [10] の結果を適用すると，$P \rightarrow Q$ を定義する可補束の多項式で上の条件を満たすものは，次の 3 個の可能性に絞られる．

(i) $P \rightarrow_1 Q = P^{\perp} \vee (P \wedge Q)$.

(ii) $P \rightarrow_2 Q = (P \vee Q)^{\perp} \vee Q$.

(iii) $P \rightarrow_3 Q = (P \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})$.

しかしながら，上のどれを採用するかについてこれまで一般的な合意は得られていない．とはいえ，多数派は (i) の定義で，これは佐々木アローと呼ばれている [25]．量子集合論では，原子命題 $[\![u \in v]\!]$ 及び $[\![u = v]\!]$ の真理値は，含意接続詞の定義に本質的に依存していて，竹内 [23] および文献 [18] では，佐々木アローを選んでいる．本節では，主に佐々木アローの性質について述べる．量子論理の含意に関して更に詳しくは，Hardegree [7] を参照されたい．

佐々木アローの直感的な意味は，次の条件で表される．

S. $\psi \Vdash P \to Q \Leftrightarrow \dfrac{P\psi}{\|P\psi\|} \Vdash Q.$

つまり，任意の状態 ψ は，

$$\psi = P\psi + P^{\perp}\psi$$

のように，P が成立する状態 $P\psi/\|P\psi\|$ と P の否定 $P^{\perp}$ が成立する状態 $P^{\perp}\psi/\|P^{\perp}\psi\|$ の重ね合わせ（線形結合）で表されるが，ψ で $P \to Q$ が成立するとは，重ね合わせの一方である状態 $P\psi/\|P\psi\|$ において，Q が真であることを意味する．条件 S は，次の定理から得られる．

命題 1 任意の $P, Q \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して，以下の関係が成立する．

(i) $P \to Q = \mathcal{P}\{\psi \in \mathcal{H} \mid P\psi = (P \wedge Q)\psi\}$.

(ii) $P \to Q = \mathcal{P}\{\psi \in \mathcal{H} \mid P\psi \in \mathcal{R}(Q)\}$.

(iii) $P \leftrightarrow Q = \mathcal{P}\{\psi \in \mathcal{H} \mid P\psi = Q\psi\}$.

証明. (i) を示すために $\psi \in \mathcal{R}(P \to Q)$ と仮定する．すると，$\psi = P^{\perp}\psi + (P \wedge Q)\psi$ となり，よって，$P\psi = (P \wedge Q)\psi$ が得られる．逆に，$P\psi = (P \wedge Q)\psi$ と仮定する．すると，$\psi = P^{\perp}\psi + P\psi = P^{\perp}\psi + (P \wedge Q)\psi = P^{\perp} \vee (P \wedge Q)\psi$ となり，よって，$\psi \in \mathcal{R}(P^{\perp} \vee (P \wedge Q)) = \mathcal{R}(P \to Q)$ が得られ，(i) が示された．(ii) を示すために $\psi \in \mathcal{R}(P \to Q)$ と仮定すると，$P\psi = (P \wedge Q)\psi \in \mathcal{R}(Q)$ が得られる．逆に，$P\psi \in \mathcal{R}(Q)$ と仮定すると，$P\psi \in \mathcal{R}(P)$ だから $P\psi \in \mathcal{R}(P \wedge Q)$ となり，従って，$P\psi = (P \wedge Q)\psi$ が得られる．よって，(ii) が示された．(iii) を示すために，$\psi \in \mathcal{R}(P \leftrightarrow Q)$ と仮定する．すると，(i) より $P\psi = (P \wedge Q)\psi$ 及び $Q\psi = (P \wedge Q)\psi$ 得られるので，$P\psi = Q\psi$ が成り立つ．逆に，$P\psi = Q\psi$ と仮定する．すると，$P\psi \in \mathcal{R}(Q)$ かつ $Q\psi \in \mathcal{R}(P)$ なので，(ii) から $\psi \in \mathcal{R}(P \leftrightarrow Q)$ が得られる．従って，(iii) が示された．（証明終わり）

古典論理の含意は，

R. $P \wedge Q \leq R \Leftrightarrow P \leq Q \to R$

という条件を満たす．この場合，写像 $f_Q(P) = P \wedge Q$ は residuated であり，$g_Q(R) = Q \to R$ はその residual 写像であるという [3]．量子論理では，この条件は一般に成立しないが，次の定理によって，$g_Q(R) = Q \to R$ は $f_Q(P) = (Q^{\perp} \vee P) \wedge Q$ の residual 写像であることがわかる．

命題 2 任意の $P, Q, R \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して，以下の関係が成立する．

(i) $P \leq Q \to R$ と $\mathcal{P}\mathcal{R}(QP) \leq R$ は同値である．

(ii) $\mathcal{P}\mathcal{R}(PQ) = P \wedge (P^{\perp} \vee Q)$.

証明. (i) を示すために，$P \leq Q \to R$ を仮定する．$\psi \in \mathcal{H}$ とすると，$P\psi \in \mathcal{R}(P)$ より，$P\psi \in \mathcal{R}(Q \to R)$ が成り立つ．命題 1 (ii) から，$QP\psi \in \mathcal{R}(R)$ が成り立つ．従って，$QP\mathcal{H} \subseteq R\mathcal{H}$ が得られ，$\mathcal{PR}(QP) \leq R$ が成り立つ．逆に，$\mathcal{PR}(QP) \leq R$ と仮定する．$\psi \in \mathcal{R}(P)$ とすると，$Q\psi = QP\psi \in \mathcal{R}(QP) \subseteq \mathcal{R}(R)$ が得られるので，$Q\psi \in \mathcal{R}(R)$ が成り立つ．従って，$P \leq Q \to R$ が成り立ち，(i) が示された．(ii) を示すために，$X \in \mathcal{Q}$ とする．$\mathcal{R}(PQ) \leq X$ と仮定すると，(i) から $Q \leq P \to X = P^{\perp} \vee (P \wedge X)$ が得られ，$P^{\perp} \vee Q \leq P^{\perp} \vee (P \wedge X)$ が成り立つ．これから，$P \wedge (P^{\perp} \vee Q) \leq P \wedge X$ が得られる．従って，$P \wedge (P^{\perp} \vee Q) \leq X$ が成り立つ．逆に，$P \wedge (P^{\perp} \vee Q) \leq X$ と仮定する．$P \wedge (P^{\perp} \vee Q) \leq P \wedge X$ が得られ，従って，$P^{\perp} \vee (P \wedge (P^{\perp} \vee Q)) \leq P^{\perp} \vee (P \wedge X) = P \to X$ が得られる．$P^{\perp} \leq P^{\perp} \vee Q$ だから，オーソモジュラ則から $P^{\perp} \vee (P \wedge (P^{\perp} \vee Q)) = P^{\perp} \vee Q$ が成り立つ．従って，$Q \leq P^{\perp} \vee Q \leq P \to X$ であり，(i) から $\mathcal{R}(PQ) \leq X$ が成り立つ．従って，$\mathcal{R}(PQ) \leq X$ が成立することと，$P \wedge (P^{\perp} \vee Q) \leq X$ が任意の $X \in \mathcal{Q}$ で成立することは同等である．従って，(ii) が示された．（証明終わり）

5 Hilbert 空間上の論理

$\mathcal{A}'$ で部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の可換子環（commutant）を表す．$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の単位元を持つ自己共役部分環で $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ を満たすものを von Neumann 代数 と呼ぶ．$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ で von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の射影作用素の全体を表す．

$\mathcal{A}^!$ で部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の 可換子束を表す [9, p. 23]．つまり，

$$\mathcal{A}^! = \{P \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \mid 任意の\ Q \in \mathcal{A}\ に対して P \,\rotatebox[origin=c]{180}{!}\, Q\}.$$

すると，$\mathcal{A}^!$ は $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の完備オーソモジュラー部分束になる．$\mathcal{H}$ 上の 論理 とは，$\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ で $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{!!}$ を満たすものをいう．従って，$\mathcal{H}$ 上の論理はすべて $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の完備オーソモジュラー部分束である．任意の部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{A}^{!!}$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の論理で $\mathcal{A}$ から生成された論理とよばれる．部分集合 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{H}$ 上の論理であるための必要十分条件は，$\mathcal{H}$ 上のある von Neumann 代数の射影作用の全体と一致することである．

論理 $\mathcal{Q}$ が Boole 論理であるとは，それが Boole 代数となっていること，つまり，分配則を満たすことである．

$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする．部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$ の Boole 領域 $\perp\!\!\!\perp_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A})$ とは，任意の $P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ に対して，$P_1 \wedge E \,\rotatebox[origin=c]{180}{!}\, P_2 \wedge E$ をみたす最大の $E \in \mathcal{A}^! \cap \mathcal{Q}$ のことである．つまり，

$$\perp\!\!\!\perp_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = \max\{E \in \mathcal{A}^! \cap \mathcal{Q} \mid すべての\ P_1, P_2 \in \mathcal{A}\ に対して\ P_1 \wedge E \,\rotatebox[origin=c]{180}{!}\, P_2 \wedge E\}.$$

この定義は，$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の場合に竹内 [23, p. 308] によって最初に導入された．以下の特徴付けは，文献 [18] で与えられた．

定理 3 任意の部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$ に対して,

$$\perp\!\!\!\perp_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = \mathcal{P}\{\psi \in \mathcal{H} \mid \text{すべての } A, B \in \mathcal{A}'' \text{ に対して } [A,B]\psi = 0\}$$

が成り立ち，その結果，$\perp\!\!\!\perp_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A}) = \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}(\mathcal{A})$ が成立する.

以下では，任意の論理 $\mathcal{Q}$ に対して，$\perp\!\!\!\perp(\mathcal{A}) = \perp\!\!\!\perp_{\mathcal{Q}}(\mathcal{A})$ と略記する.

6 量子集合論

V を ZFC 集合論の普遍類とする．$\mathcal{L}(\in)$ で等号を持つ一階述語理論の言語で，2項関係記号 $\in$，および，有界限量記号 $\forall x \in y$, $\exists x \in y$ を持ち，定項記号を持たないものを表す．任意のクラス U に対して，$\mathcal{L}(\in, U)$ で U の各元の名前を $\mathcal{L}(\in)$ に付け加えたものを表す.

$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする．各順序数 α に対して，$V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$ を次のように定義する.

$$V_\alpha^{(\mathcal{Q})} = \{u \mid u : \mathcal{D}(u) \to \mathcal{Q} \text{ かつ } \mathcal{D}(u) \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(\mathcal{Q})}\}.$$

$\mathcal{Q}$-値集合の普遍類 $V^{(\mathcal{Q})}$ は

$$V^{(\mathcal{Q})} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$$

によって定義される．ここで，On は順序数の全体である.

$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q})})$ の各陳述 ϕ に対して $\mathcal{Q}$-値の真理値 $[\![\phi]\!]_{\mathcal{Q}}$ が以下の規則で帰納的に定められる.

1. $[\![u = v]\!]_{\mathcal{Q}} = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)}(u(u') \to [\![u' \in v]\!]_{\mathcal{Q}}) \wedge \bigwedge_{v' \in \mathcal{D}(v)}(v(v') \to [\![v' \in u]\!]_{\mathcal{Q}})$.
2. $[\![u \in v]\!]_{\mathcal{Q}} = \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)}(v(v') \wedge [\![u = v']\!]_{\mathcal{Q}})$.
3. $[\![\neg\phi]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![\phi]\!]_{\mathcal{Q}}^{\perp}$.
4. $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{Q}} \wedge [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{Q}}$.
5. $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{Q}} \vee [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{Q}}$.
6. $[\![\phi_1 \to \phi_2]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{Q}} \to [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{Q}}$.
7. $[\![\phi_1 \leftrightarrow \phi_2]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![\phi_1]\!]_{\mathcal{Q}} \leftrightarrow [\![\phi_2]\!]_{\mathcal{Q}}$.
8. $[\![(\forall x \in u)\,\phi(x)]\!]_{\mathcal{Q}} = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)}(u(u') \to [\![\phi(u')]\!]_{\mathcal{Q}})$.
9. $[\![(\exists x \in u)\,\phi(x)]\!]_{\mathcal{Q}} = \bigvee_{u' \in \mathcal{D}(u)}(u(u') \wedge [\![\phi(u')]\!]_{\mathcal{Q}})$.
10. $[\![(\forall x)\,\phi(x)]\!]_{\mathcal{Q}} = \bigwedge_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]_{\mathcal{Q}}$.
11. $[\![(\exists x)\,\phi(x)]\!]_{\mathcal{Q}} = \bigvee_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]_{\mathcal{Q}}$.

$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q})})$ の陳述 ϕ が $V^{(\mathcal{Q})}$ で成立するとは，$[\![\phi]\!]_{\mathcal{Q}} = 1$ となることをいう．$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q})})$ の陳述 ϕ が 状態 ψ で成立するとは，$\psi \in \mathcal{R}([\![\phi]\!]_{\mathcal{Q}})$ となることをいう．このとき，$\psi \Vdash \phi$ と表す．$\Pr\{\phi \| \psi\} = \|[\![\phi]\!]_{\mathcal{Q}}\psi\|^2$ を陳述 ϕ の 状態 ψ における成立確率という．陳述 ϕ が 状態 ψ で成立することと，その成立確率が 1 であることは同等である．非有界限量記号を持たない $\mathcal{L}(\in)$ の論理式を Δ_0-式 と呼ぶ．

定理 4 (Δ_0-絶対性原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と任意の $u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，

$$[\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$$

が成立する．

証明． 論理式の複雑性と $V^{(\mathcal{Q})}$ の元の階数に関する帰納法によって証明する．初めに，順序数 α に関する超限帰納法で「任意の順序数 α に対して，(i) すべての $u, v \in V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ について，$[\![u = v]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![u = v]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$ が成り立ち，かつ，(ii) すべての $u \in V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ と $v \in V_{\alpha+1}^{(\mathcal{Q})}$ について，$[\![u \in v]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![u \in v]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$が成り立つ」という命題を証明する．$\alpha = 0$ なら，関係 (i) と (ii) は自明である．関係 (i) を示すために，$u, v \in V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ とする．関係 (ii) に関する帰納法の仮定から，$[\![u' \in v]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![u' \in v]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$ かつ $[\![v' \in u]\!]_{\mathcal{Q}} = [\![v' \in u]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$ がすべての $u' \in \mathcal{D}(u)$ と $v' \in \mathcal{D}(v)$ について成立する．従って，

$$\begin{aligned}
[\![u = v]\!]_{\mathcal{Q}} &= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \to [\![u' \in v]\!]_{\mathcal{Q}}) \wedge \bigwedge_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \to [\![v' \in u]\!]_{\mathcal{Q}}) \\
&= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \to [\![u' \in v]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}) \wedge \bigwedge_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \to [\![v' \in u]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}) \\
&= [\![u = v]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}
\end{aligned}$$

が成り立つ．関係 (ii) を示すために，$u \in V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ かつ $v \in V_{\alpha+1}^{(\mathcal{Q})}$ とする．もし，$v' \in \mathcal{D}(v)$ ならば，$v' \in V_{\alpha}^{(\mathcal{Q})}$ であり，従って，上のことから $[\![u = v']\!]_{\mathcal{Q}} = [\![u = v']\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$ が成立する．よって，

$$\begin{aligned}
[\![u \in v]\!]_{\mathcal{Q}} &= \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \wedge [\![u = v']\!]_{\mathcal{Q}}) \\
&= \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \wedge [\![u = v']\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}) \\
&= [\![u \in v]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}
\end{aligned}$$

が成立する．以上から，定理の主張は原子命題については成立する．論理記号を付加することによる帰納法のステップは容易である．$[\![\cdots]\!]_{\mathcal{Q}}$ および $[\![\cdots]\!]_{\mathcal{Q}(\mathcal{H})}$ の値を求める際に，上限と下限をとる変域は共通であるから，有界限量記号を付加するステップも同様に容易である．(非有界限量記号については，このようなことは言えない．) (証明終わり)

以下，任意の Δ_0-式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $u_1,\ldots,u_n\in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$[\![\phi(u_1,\ldots,u_n)]\!]=[\![\phi(u_1,\ldots,u_n)]\!]_{\mathcal{Q}}$ と略記する．各 $v\in V$ に対して，$V^{(\mathcal{Q})}$ においてそれの複製となる $\mathcal{Q}$-値集合 $\check{v}$ を $\check{v}=\{\check{u}|\ u\in v\}\times\{1\}$ によって帰納的に定める．ZFC 集合論の普遍類 V は，対応 $\vee: v\mapsto\check{v}$ で $V^{(\mathcal{Q})}$ に埋め込まれる．$\mathbf{2}$ で 0 と 1 からなる $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の部分 Boole 代数を表す．明らかに，この埋め込みにより V と $V^{(\mathbf{2})}$ は同型になるので，定理 4 を $Q=\mathbf{2}$ に適用することにより，次の定理が得られる．

定理 5 (Δ_0-初等的同値性原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意のΔ_0-式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $u_1,\ldots,u_n\in V$ に対して，$\langle V,\in\rangle\models\phi(u_1,\ldots,u_n)$ と $[\![\phi(\check{u}_1,\ldots,\check{u}_n)]\!]=1$ は同値である．

$u\in V^{(\mathcal{Q})}$ の サポート $L(u)$ が u の階数に関する超限帰納定義で以下のように定められる．

$$L(u)=\bigcup_{x\in\mathcal{D}(u)}L(x)\cup\{u(x)\mid x\in\mathcal{D}(u)\}.$$

部分クラス $\mathcal{A}\subseteq V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$L(\mathcal{A})=\bigcup_{u\in\mathcal{A}}L(u)$ と定め，また，$u_1,\ldots,u_n\in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$L(u_1,\ldots,u_n)=L(\{u_1,\ldots,u_n\})$ と表す．$\mathcal{A}\subseteq V^{(\mathcal{Q})}$ とする．$\mathcal{A}$ のBoole 領域 $\underline{\vee}(\mathcal{A})$ が

$$\underline{\vee}(\mathcal{A})=\perp\!\!\!\perp L(\mathcal{A})$$

によって定められる．任意の $u_1,\ldots,u_n\in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$\underline{\vee}(u_1,\ldots,u_n)=\underline{\vee}(\{u_1,\ldots,u_n\})$ と表す．

定理 6 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする．任意の $u,u',v,v',w\in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，次の関係が成立する．

(i) $[\![u=u]\!]=1$.
(ii) $[\![u=v]\!]=[\![v=u]\!]$.
(iii) $\underline{\vee}(u,v,u')\wedge[\![u=u']\!]\wedge[\![u\in v]\!]\leq[\![u'\in v]\!]$.
(iv) $\underline{\vee}(u,v,u')\wedge[\![u\in v]\!]\wedge[\![v=v']\!]\leq[\![u\in v']\!]$.
(v) $\underline{\vee}(u,v,w)\wedge[\![u=v]\!]\wedge[\![v=w]\!]\leq[\![u=w]\!]$.

竹内 [23] は $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の場合に，上記の関係が成立することを示し，以下のように推移律と代入規則が一般には成立しないことを反例によって示した．$P_1,P_2,P_3\in\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ を次の条件を満たすものとする．

$$P_1\wedge P_2=P_2\wedge P_3=P_1\wedge P_3=0,\quad P_1\vee P_2=1,\quad (P_2\vee P_3)^{\perp}\not\leq P_1$$

例えば，

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},P_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix},P_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},$$

とすればよい．つまり，単位列ベクトル e_1, e_2, e_3 を $1 = [e_1 e_2 e_3]$ となるものとすると，$\mathcal{R}(P_1) = \{e_3\}^{\perp}$, $\mathcal{R}(P_2) = \{e_1+e_2\}^{\perp\perp}$, $\mathcal{R}(P_3) = \{e_1+e_2+e_3\}^{\perp\perp}$ となる．$x_1, x_2 \in V^{(Q)}$ を $[\![x_1 = x_2]\!] = P_2$ を満たすものとし，u, v, w を次の関係で定義する．

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(u) = \mathcal{D}(v) = \mathcal{D}(w) = \{x_1, x_2\} \\
&u(x_1) = P_1, \quad u(x_2) = P_3, \\
&v(x_1) = P_1, \quad v(x_2) = P_2, \\
&w(x_1) = 1, \quad w(x_2) = P_2
\end{aligned}$$

すると，

$$\begin{aligned}
[\![x_1 \in u]\!] &= P_1 \vee (P_2 \wedge P_3) = P_1, \\
[\![x_2 \in u]\!] &= (P_1 \wedge P_2) \vee P_3 = P_3, \\
[\![x_1 \in v]\!] &= P_1 \vee (P_2 \wedge P_2) = 1, \\
[\![x_2 \in v]\!] &= (P_1 \wedge P_2) \vee P_2 = P_2, \\
[\![x_1 \in w]\!] &= 1, \\
[\![x_2 \in w]\!] &= P_2 \vee (P_2 \vee P_2^{\perp}) = P_2
\end{aligned}$$

が得られる．これより，

$$\begin{aligned}
[\![u = v]\!] &= P_3 \leftrightarrow P_2 = (P_2 \vee P_3)^{\perp}, \\
[\![v = w]\!] &= 1, \\
[\![u = w]\!] &= P_1 \wedge (P_2 \leftrightarrow P_3) = P_1 \wedge (P_2 \vee P_3)^{\perp}
\end{aligned}$$

が得られ，これは，等号の推移律

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \leq [\![u = w]\!]$$

の反例を与える．ところで，$V^{(Q)}$ における w の一点集合にあたる $\{w\}_Q$ を

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\{w\}_Q) &= \{w\}, \\
\{w\}_Q(w) &= 1
\end{aligned}$$

と定義すると，

$$\begin{aligned}
[\![v \in \{w\}_Q]\!] &= [\![v = w]\!], \\
[\![u \in \{w\}_Q]\!] &= [\![u = w]\!]
\end{aligned}$$

が成り立つので，関係記号 $\in$ の第１変数への等号の代入法則

$$[\![u = v]\!] \wedge [\![v \in \{w\}_{\mathcal{Q}}]\!] \leq [\![u \in \{w\}_{\mathcal{Q}}]\!]$$

の反例が得られる．同様に，

$$\begin{aligned} [\![\{u\}_{\mathcal{Q}} = \{v\}_{\mathcal{Q}}]\!] &= [\![u = v]\!], \\ [\![w \in \{v\}_{\mathcal{Q}}]\!] &= [\![v = w]\!], \\ [\![w \in \{u\}_{\mathcal{Q}}]\!] &= [\![u = w]\!] \end{aligned}$$

が成り立つので，関係記号 $\in$ の第２変数への等号の代入法則

$$[\![\{u\}_{\mathcal{Q}} = \{v\}_{\mathcal{Q}}]\!] \wedge [\![w \in \{v\}_{\mathcal{Q}}]\!] \leq [\![w \in \{u\}_{\mathcal{Q}}]\!]$$

の反例が得られる．

また，竹内 [23] は $n = 2, 3, \ldots$ に対して n-項関係記号 $\underline{\vee}(x_0, \ldots, x_n)$ を次の解釈

$$[\![\underline{\vee}(x_0, \ldots, x_n)]\!] = \underline{\vee}(u_0, \ldots, u_n)$$

と共に言語 $\mathcal{L}(\in)$ に導入して，ZFC の公理を変形した以下の論理式が $V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ で成立することを示した．

無限公理． $[\![\exists x \in \check{\omega}(x \in \check{\omega}) \wedge \forall x \in \check{\omega} \exists y \in \check{\omega}(x \in y)]\!] = 1.$

非順序対公理． $\underline{\vee}(u, v) \leq [\![\exists x(\underline{\vee}(u, v, x) \wedge \forall y(y \in x \leftrightarrow y = u \vee y = v)))]\!].$

合併集合公理． $\underline{\vee}(u) \leq [\![\exists v(\underline{\vee}(u, v) \wedge \forall x(\underline{\vee}(x, u) \rightarrow (x \in v \leftrightarrow \exists y \in u(x \in y))))]\!].$

置換公理． $[\![\forall x \in u \exists y \phi(x, y)]\!] \leq [\![\exists v \forall x \in u \exists y \in v \phi(x, y)]\!].$

冪集合公理． $\underline{\vee}(u) \leq [\![\exists v(\underline{\vee}(u, v) \wedge \forall t(\underline{\vee}(u, v, t) \rightarrow (t \in v \leftrightarrow \forall x \in t(x \in u))))]\!].$

定礎公理． $\underline{\vee}(u) \wedge [\![\exists x \in u(x \in u)]\!] \leq [\![\exists x \in u \forall y \in u(\neg y \in u)]\!].$

選択公理． $\underline{\vee}(u) \leq [\![\exists v(\underline{\vee}(u, v) \wedge \forall x \in u(\exists y \in x \exists! z \in u(y \in z) \rightarrow \exists! y \in x(y \in v)))]\!].$

上の結果から，竹内 [23] は，$V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ において，妥当な集合論が成立していると結論した．しかし，上の結果から $V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ において ZFC の定理のどのような変形が成立しているかを一般に述べることは困難である．なぜなら，上の公理から量子論理に従った証明によってどのような定理が導かれるかを個々に検証する必要があるからである．このような困難を解消するために，最近の研究 [18]では，次節で解説するように，ZFC の定理から量子集合論の定理を導く移行原理が確立された．

7　量子集合論における移行原理

以下では，ZFC の定理から量子集合論の定理を導く移行原理について述べる．以下に述べる一部の命題の証明は，文献 [18] を参照されたい．論理演算の相対化について，以下の命題が成り立つ．

命題 7 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする.

(i) $P_\alpha \in \mathcal{Q}$ かつ $P_\alpha \mathrel{|\!\circ} Q$ が任意の α で成り立つならば, $(\bigvee_\alpha P_\alpha) \mathrel{|\!\circ} Q$, $\bigwedge_\alpha P_\alpha \mathrel{|\!\circ} Q$, $Q \wedge (\bigvee_\alpha P_\alpha) = \bigvee_\alpha (Q \wedge P_\alpha)$, $Q \wedge (\bigwedge_\alpha P_\alpha) = \bigwedge_\alpha (Q \wedge P_\alpha)$ が成り立つ.

(ii) $P_1, P_2 \mathrel{|\!\circ} Q$ ならば, $(P_1 \to P_2) \wedge Q = [(P_1 \wedge Q) \to (P_2 \wedge Q)] \wedge Q$ が成り立つ.

証明. (i) を示す. $P_\alpha \in \mathcal{Q}$ かつ $P_\alpha \mathrel{|\!\circ} Q$ が任意の α で成り立つとする. 一般に,

$$\bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q \le Q, \quad \bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q^\perp \le Q^\perp$$

より,

$$\bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q \mathrel{|\!\circ} Q, \quad \bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q^\perp \mathrel{|\!\circ} Q \tag{7.2}$$

が得られる. 仮定から, $P_\alpha = (P_\alpha \wedge Q) \vee (P_\alpha \wedge Q^\perp)$ が任意の α で成立する. よって,

$$\begin{aligned}\bigvee_\alpha P_\alpha &= \bigvee_\alpha (P_\alpha \wedge Q) \vee (P_\alpha \wedge Q^\perp) \\ &= (\bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q) \vee (\bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q^\perp)\end{aligned}$$

だから, Eq. (7.2) より $\bigvee_\alpha P_\alpha \mathrel{|\!\circ} Q$ が成り立つ. また, Eq. (7.2) より分配法則が成り立つので,

$$\begin{aligned}Q \wedge \bigvee_\alpha P_\alpha &= Q \wedge [(\bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q) \vee (\bigvee_\alpha P_\alpha \wedge Q^\perp)] \\ &= \bigvee_\alpha (P_\alpha \wedge Q)\end{aligned}$$

が得られる. よって, $Q \wedge \bigvee_\alpha P_\alpha = \bigvee_\alpha (Q \wedge P_\alpha)$ が成り立つ. (i) の残りの関係は, De Morgan の法則から得られる. (ii) を示すために, $P_1, P_2 \mathrel{|\!\circ} Q$ と仮定する. $\wedge$ の定義と 命題 1 (ii) から, $P_1\psi \in \mathcal{R}(P_2)$ が成立することと $(P_1 \wedge Q)\psi \in \mathcal{R}(P_2 \wedge Q)$ が任意の $\psi \in \mathcal{R}(Q)$ について成立することが同等であることを示せばよい. $\psi \in \mathcal{R}(Q)$ とする. $(P_1 \wedge Q)\psi \in \mathcal{R}(P_2 \wedge Q)$ ならば, $P_1\psi = P_1 Q\psi = (P_1 \wedge Q)\psi \in \mathcal{R}(P_2 \wedge Q) \subseteq \mathcal{R}(P_2)$ が成り立つので, $P_1\psi \in \mathcal{R}(P_2)$ が得られる. 逆に, $P_1\psi \in \mathcal{R}(P_2)$ ならば, $(P_1 \wedge Q)\psi = P_1 Q\psi = P_1\psi \in \mathcal{R}(P_2)$ かつ $(P_1 \wedge Q)\psi = QP_1\psi \in \mathcal{R}(Q)$ であるので, $(P_1 \wedge Q)\psi \in \mathcal{R}(P_2 \wedge Q)$ が得られる. 従って, (ii) が示された. (証明終わり)

$u \in V^{(\mathcal{Q})}$ および $p \in \mathcal{Q}$ とする. u の p への相対化 $u|_p$ が, 次の超限帰納的定義で定められる:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(u|_p) &= \{x|_p \mid x \in \mathcal{D}(u)\}, \\ u|_p(x|_p) &= u(x) \wedge p \quad (x \in \mathcal{D}(u)\ ).\end{aligned}$$

命題 8 任意の $\mathcal{A} \subseteq V^{(\mathcal{Q})}$ および $p \in \mathcal{Q}$ に対して,

$$L(\{u|_p \mid u \in \mathcal{A}\}) = L(\mathcal{A}) \wedge p.$$

が成立する.

$\mathcal{A} \subseteq V^{(\mathcal{Q})}$ とする. $\mathcal{A}$ で生成される論理($\mathcal{Q}(\mathcal{A})$ と記す) が次の関係で定義される.

$$\mathcal{Q}(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A})^{!!}.$$

$u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して $\mathcal{Q}(u_1, \ldots, u_n) = \mathcal{Q}(\{u_1, \ldots, u_n\})$ 記す.

命題 9 $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $u_1, \cdots, u_n \in V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ に対して, $[\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!] \in \mathcal{Q}(u_1, \ldots, u_n)$ が成り立つ.

命題 10 $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $u_1, \ldots, u_n \in V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ に対して, $p \in L(u_1, \ldots, u_n)^!$ ならば, $p \,\rfloor\!\!\circ\, [\![\phi(u_1, \ldots, u_n)]\!]$ 及び $p \,\rfloor\!\!\circ\, [\![\phi(u_1|_p, \ldots, u_n|_p)]\!]$ が成立する.

二項関係 $x_1 \subseteq x_2$ を "$x_1 \subseteq x_2$"="$\forall x \in x_1(x \in x_2)$" によって定義する. 定義より, 任意の $u, v \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して,

$$[\![u \subseteq v]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} u(u') \rightarrow [\![u' \in v]\!],$$

が成り立ち, また, $[\![u = v]\!] = [\![u \subseteq v]\!] \wedge [\![v \subseteq u]\!]$ となる.

命題 11 任意の $u, v \in V^{(\mathcal{Q})}$ と $p \in L(u, v)^!$ に対して, 次の関係が成り立つ.

(i) $[\![u|_p \in v|_p]\!] = [\![u \in v]\!] \wedge p$.

(ii) $[\![u|_p \subseteq v|_p]\!] \wedge p = [\![u \subseteq v]\!] \wedge p$.

(iii) $[\![u|_p = v|_p]\!] \wedge p = [\![u = v]\!] \wedge p$.

証明. 順序数 α に関する超限帰納法で,「任意の順序数 α に対して, (i) がすべての $u \in V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$ および $v \in V_{\alpha+1}^{(\mathcal{Q})}$ に対して成立し, (ii) と (iii) がすべての $u, v \in V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$ について成立する」という命題を証明する. もし, $\alpha = 0$ ならば, 命題は自明である. (ii) を証明するために, $u, v \in V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$ かつ $p \in L(u, v)^!$ とする. $u' \in \mathcal{D}(u)$ とする. 関係 $L(u, v)^! \subseteq L(u', v)^!$ より, $p \in L(u', v)^!$ が得られる. すると, (i) に関する帰納法の仮定から $[\![u'|_p \in v|_p]\!] = [\![u' \in v]\!] \wedge p$ を得る. 従って,

$$\begin{aligned}
[\![u|_p \subseteq v|_p]\!] &= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u|_p)} (u|_p(u') \rightarrow [\![u' \in v|_p]\!]) \\
&= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u|_p(u'|_p) \rightarrow [\![u'|_p \in v|_p]\!]) \\
&= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \wedge p) \rightarrow ([\![u' \in v]\!] \wedge p).
\end{aligned}$$

p に関する仮定から，$p \downarrow u(u')$ を得る．また，命題 10 から，$p \downarrow [\![u' \in v]\!]$ を得る．従って，$p \downarrow u(u') \to [\![u' \in v]\!]$ かつ $p \downarrow (u(u') \wedge p) \to ([\![u' \in v]\!] \wedge p)$ を得る．命題 7 (ii) より，

$$p \wedge [(u(u') \wedge p) \to ([\![u' \in v]\!] \wedge p)] = p \wedge (u(u') \to [\![u' \in v]\!]).$$

従って，命題 7 (i) から

$$\begin{aligned}
p \wedge [\![u|_p \subseteq v|_p]\!] &= p \wedge \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \wedge p) \to ([\![u' \in v]\!] \wedge p) \\
&= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} p \wedge [(u(u') \wedge p) \to ([\![u' \in v]\!] \wedge p)] \\
&= \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} p \wedge (u(u') \to [\![u' \in v]\!]) \\
&= p \wedge \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)} (u(u') \to [\![u' \in v]\!]) \\
&= p \wedge [\![u \subseteq v]\!].
\end{aligned}$$

が成立する．これで関係 (ii) がすべての $u, v \in V_\alpha^{(Q)}$ に対して成立することが示された．関係 (iii) がすべての $u, v \in V_\alpha^{(Q)}$ に対して成立することは関係 (ii) から容易に導かれる．関係 (i) を証明するために，$u \in V_\alpha^{(Q)}$, $v \in V_{\alpha+1}^{(Q)}$, かつ $p \in L(u, v)^!$ と仮定する．$v' \in \mathcal{D}(v)$ とする．$L(u, v)^! \subseteq L(u, v')^!$ だから，$p \in L(u, v')^!$ を得る．上で示したように関係 (iii) が任意の $u, v \in V_\alpha^{(Q)}$ に対して成立することから，$[\![u|_p = v'|_p]\!] \wedge p = [\![u = v']\!] \wedge p$ を得る．命題 10 から，$p \downarrow [\![u = v']\!]$ を得る．従って，$v(v'), [\![u = v']\!] \in \{p\}^!$ であり，よって，$p \downarrow v(v') \wedge [\![u = v']\!]$．従って，

$$\begin{aligned}
[\![u|_p \in v|_p]\!] &= \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v|_p)} v|_p(v') \wedge [\![u|_p = v']\!] \\
&= \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} v|_p(v'|_p) \wedge [\![u|_p = v'|_p]\!] \\
&= \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} v(v') \wedge p \wedge [\![u|_p = v'|_p]\!] \\
&= \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} (v(v') \wedge [\![u = v']\!] \wedge p) \\
&= \left(\bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)} v(v') \wedge [\![u = v']\!] \right) \wedge p,
\end{aligned}$$

が成立する．ここで，最後の等式は命題 7 (i) から従う．よって，$[\![u = v]\!]$ の定義から，関係 $[\![u|_p \in v|_p]\!] = [\![u = v]\!] \wedge p$ が成り立ち，関係 (i) がすべての $u \in V_\alpha^{(Q)}$ と $v \in V_{\alpha+1}^{(Q)}$ に対して成立することが導かれた．以上から，α に関する超限帰納法により命題の主張は 証明された．

（証明終わり）

命題 12 $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $u_1,\ldots,u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，もし $p \in L(u_1,\ldots,u_n)^!$ ならば，$[\![\phi(u_1,\ldots,u_n)]\!] \wedge p = [\![\phi(u_1|_p,\ldots,u_n|_p)]\!] \wedge p$ が成立する．

以上の準備のもとで次の定理が証明される．

定理 13 (ZFC 移行原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $u_1,\ldots,u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$\phi(x_1,\ldots,x_n)$ が *ZFC* で証明可能ならば，

$$\underline{\vee}(u_1,\ldots,u_n) \leq [\![\phi(u_1,\ldots,u_n)]\!]$$

が成立する．

証明. $p = \underline{\vee}(u_1,\ldots,u_n)$ とする．$a \wedge p \, \rotatebox{90}{\&} \, b \wedge p$ が任意の $a, b \in L(u_1,\ldots,u_n)$ に対して成立する．従って，ある Boole 部分論理 $\mathcal{B}$ が存在して，$L(u_1,\ldots,u_n) \wedge p \subseteq \mathcal{B}$ が成り立つ．命題 8 から $L(u_1|_p,\ldots,u_n|_p) \subseteq \mathcal{B}$ が成り立ち，よって，$u_1|_p,\ldots,u_n|_p \in V^{(\mathcal{B})}$ が成り立つ．Boole 代数値モデルの ZFC 移行原理 [1, 定理 1.33] より，$[\![\phi(u_1|_p,\ldots,u_n|_p)]\!]_{\mathcal{B}} = 1$ が成り立つ．Δ_0-絶対性原理から $[\![\phi(u_1|_p,\ldots,u_n|_p)]\!] = 1$ が成り立つ．命題 12 から $[\![\phi(u_1,\ldots,u_n)]\!] \wedge p = [\![\phi(u_1|_p,\ldots,u_n|_p)]\!] \wedge p = p$ が得られるので，定理の主張が証明された．（証明終わり）

8 量子観測可能量と量子集合論における実数

ZFC 集合論には，有理数や実数を定義する論理式が存在するので，量子集合論のモデル $V^{(\mathcal{Q})}$ でそれらの論理式を満足する対象を $V^{(\mathcal{Q})}$ における有理数や実数と定義することができる．$\mathbf{Q}$ を V の有理数の全体とする．$V^{(\mathcal{Q})}$ における有理数の集合は $\check{\mathbf{Q}}$ に対応する．一方，$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数の集合が $\check{\mathbf{R}}$ にならない例は，$\mathcal{Q}$ が非原子的 Boole 代数の場合にすでに知られている．実数の定義として，有理数体の Dedekind 切断を採用する．つまり，実数と下組が端点を持たない有理数体の切断の上組を同一視する．よって，「x は実数である」を意味する述語 $\mathbf{R}(x)$ は次のように定義される．

$$\begin{aligned} &x \subseteq \check{\mathbf{Q}} \wedge \exists y \in \check{\mathbf{Q}}(y \in x) \wedge \exists y \in \check{\mathbf{Q}}(y \notin x) \\ &\qquad\qquad \wedge \forall y \in \check{\mathbf{Q}}(y \in x \leftrightarrow \forall z \in \check{\mathbf{Q}}(y < z \rightarrow z \in x)). \end{aligned}$$

$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数の集合 $\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ を次のように定義する．

$$\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})} = \{u \in V^{(\mathcal{Q})} |\ \mathcal{D}(u) = \mathcal{D}(\check{\mathbf{Q}}) \text{ かつ} [\![\mathbf{R}(u)]\!] = 1\}.$$

また，$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数体 $\mathbf{R}_{\mathcal{Q}} \in V^{(\mathcal{Q})}$ は，

$$\mathbf{R}_{\mathcal{Q}} = \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})} \times \{1\}$$

で定義される.

$r \in \mathbf{R}$ の $V^{(\mathcal{Q})}$ への埋め込み $\check{r} \in V^{(\mathcal{Q})}$ は, $\mathcal{D}(\check{r}) = \{\check{x} \mid r \leq x \in \mathbf{Q}\}$ かつ $r \leq x$ となる任意の $x \in \mathbf{Q}$ に対して $\check{r}(\check{x}) = 1$ をみたす. しかし, これは $\mathcal{D}(\check{r}) = \mathcal{D}(\check{\mathbf{Q}})$ を満たさないので, 実数 $r \in \mathbf{R}$ の $\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ における対応物 $\tilde{r} \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ を $\mathcal{D}(\tilde{r}) = \mathcal{D}(\check{\mathbf{Q}})$ かつ, 任意の $t \in \mathbf{Q}$ に対して, $\tilde{r}(\check{t}) = [\![\check{r} \leq \check{t}]\!]$ で定義する

$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数 とし, $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{M}$ に属する射影作用素からなる論理とする. $\mathcal{H}$ 上の任意の論理 $\mathcal{Q}$ に対して, $\mathcal{M} = \mathcal{Q}''$ とすれば, そのような von Neumann 代数 がえられる. $\mathcal{H}$ 上で(稠密に)定義された閉作用素 A が $\mathcal{M}$ にアフィリエイトする($A \eta \mathcal{M}$ と表す)とは $\mathcal{M}'$ に属する任意のユニタリ作用素 U に対して, $U^*AU = A$ となることをいう. A を $\mathcal{H}$ 上で(稠密に)定義された自己共役作用素とし, そのスペクトル分解を $A = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, dE^A(\lambda)$ で表す. ここで, $\{E^A(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ は A に属する単位の分解である. 関係 $A \eta \mathcal{Q}''$ と $E^A(\lambda) \in \mathcal{Q}$ が任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ について成立することは同値である. $\overline{\mathcal{M}}_{SA}$ で $\mathcal{M}$ にアフィリエイトする自己共役作用素の全体とする.

$\mathcal{B}$ を $\mathcal{H}$ 上の Boole 論理とする. 竹内 [22] は, $V^{(\mathcal{B})}$ の実数 $\mathbf{R}^{(\mathcal{B})}$ と$\overline{(\mathcal{B}'')}_{SA}$ の間に一対一対応があることを次のように示した. $u \in \mathbf{R}^{(\mathcal{B})}$ とする. 任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して, $u(\check{r}) \in \mathcal{B}$ であり, 以下の関係が成立することが容易に示される.

(i) $\displaystyle\bigwedge_{r \in \mathbf{Q}} u(\check{r}) = 0.$

(ii) $\displaystyle\bigvee_{r \in \mathbf{Q}} u(\check{r}) = 1.$

(iii) 任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して $u(\check{r}) = \displaystyle\bigwedge_{r < s \in \mathbf{Q}} u(\check{s}).$

そこで, 任意の $u \in \mathbf{R}^{(\mathcal{B})}$ および $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して, $E^u(\lambda)$ を

$$E^u(\lambda) = \bigwedge_{\lambda < r \in \mathbf{Q}} u(\check{r})$$

と定義すると, $\{E^u(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbf{R}}$ は $\mathcal{B}$ における単位の分解になり, スペクトル理論から $\hat{u} = \int_{\mathbf{R}} \lambda \, dE^u(\lambda)$ を満たす自己共役作用素 $\hat{u} \, \eta \, \mathcal{B}''$ が一意に定まる. この対応を利用して, $V^{(\mathcal{Q})}$ の実数を特徴付ける以下の定理が得られる [18] .

定理 14 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする. 任意の $u \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ と $A \in \overline{(\mathcal{Q}'')}_{SA}$ の間の次の関係

(i) 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $E^A(\lambda) = \displaystyle\bigwedge_{\lambda < r \in \mathbf{Q}} u(\check{r}),$

(ii) 任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して $u(\check{r}) = E^A(r),$

によって, $V^{(\mathcal{Q})}$ の実数の全体$\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ と$\mathcal{Q}''$ にアフィリエイトする自己共役作用素の全体 $\overline{(\mathcal{Q}'')}_{SA}$ の間に一対一対応をつけることができる.

9 量子観測命題の量子実数論への埋め込み

前節の結果から，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間とする量子力学系の観測可能量と$V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$の実数が 1 対 1 に対応することが示された．このことから，量子力学の観測命題を量子集合論の陳述として表現して，量子力学を量子集合論に帰着させられることが期待される．$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))})$ の陳述に対する確率解釈によれば，状態 ψ における陳述 ϕ の成立確率が $\Pr\{\phi\|\psi\} = \|[\![\phi]\!]\psi\|^2$ で定義された．以下では，この解釈が量子力学と整合的であり，量子力学の観測命題がその確率解釈も含めて，量子集合論の陳述で表現されることを示す．

$a < b \in \mathbf{R}$ の区間 $I = (a, b]$ に対応する$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数の区間 $\tilde{I}$ を $\mathcal{D}(\tilde{I}) = \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ かつ任意の $u \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ に対して，$\tilde{I}(u) = [\![\tilde{a} < u]\!] \wedge [\![u \le \tilde{b}]\!]$ で定義する．次の定理が成立する [18].

定理 15 任意の自己共役作用素 A と任意の区間 $I = (a, b]$ に対して，

$$[\![\tilde{A} \in \tilde{I}]\!] = E^A(I)$$

が成立する．

次の規則によって，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間とする量子力学系に関する観測命題 ϕ に対して，$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))})$ の陳述 $\tilde{\phi}$ を定義する．以下で，A は観測可能量，I は区間，ϕ_1, ϕ_2, ϕ は観測命題，C は論理接続詞 $\wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ のいずれかを表す．

(i) $\widetilde{A \in I} := \tilde{A} \in \tilde{I}$.

(ii) $\widetilde{\neg\phi} := \neg\tilde{\phi}$.

(iii) $\widetilde{\phi_1 C \phi_2} := \tilde{\phi}_1 C \tilde{\phi}_2$.

定理 15 から次の定理が容易に導かれる．

定理 16 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間とする量子力学系に関する任意の観測命題 ϕ に対して，

$$\Pr\{\phi\|\psi\} = \Pr\{\tilde{\phi}\|\psi\}$$

が成り立つ．

以上から，量子力学系の観測可能量と量子集合論のモデル $V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ における実数との間に自然な一対一対応があり，量子力学系に対する観測命題とその実現確率は $V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ の実数に関する陳述とその成立確率で表現されることが示された．

A, B が共にスペクトルが有限集合である観測可能量の時，観測命題 $A = B$ を

$$A = B := (A \in (x_1{-}\epsilon, x_1] \leftrightarrow B \in (x_1{-}\epsilon, x_1]) \wedge \cdots \wedge (A \in (x_n{-}\epsilon, x_n] \leftrightarrow B \in (x_n{-}\epsilon, x_n])$$

で定義することができる．ただし，$\{x_1, \ldots, x_n\}$ は A, B それぞれのスペクトルの合併集合を表し，$\epsilon = \min_{j,k=1}^{n} |x_i - x_j|$ とする．

上の定理から，観測命題 $A = B$ に対して，$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))})$ の陳述 $A \widetilde{=} B$ が存在して，

$$\Pr\{A \widetilde{=} B \| \psi\} = \Pr\{A = B \| \psi\}$$

が成り立つ．第１１節で示す結果を利用すると，陳述 $A \widetilde{=} B$ は，陳述 $\tilde{A} = \tilde{B}$ と同値であり，

$$[\![\tilde{A} = \tilde{B}]\!] = \mathcal{P}\{\psi \in \mathcal{H} \mid \text{任意の } r \in \mathbf{Q} \text{ に対して } E^A(r)\psi = E^B(r)\psi\}$$

が成立することが得られる．また，$\psi \Vdash \tilde{A} = \tilde{B}$ ならば，A と B は ψ で可換であり，同時測定可能であり，同時測定の測定値は常に一致していることが導かれる．したがって，観測命題 $A = B$ は，「A と B が同時測定可能で測定値が一致する」という操作的な意味を持つことが結論される．さらに，一般の A, B に対しては，このことを従来の観測命題によって表現することはできないが，量子集合論では，この観測命題を $\tilde{A} = \tilde{B}$ という集合論の命題として表現できることが結論される．このように，量子集合論によって従来の量子力学の解釈を拡張することが可能である．

10　量子観測可能量の値の実在性と量子実数の可換性

量子力学では，個々の観測可能量は原理的に幾らでも正確に測定が可能で，その測定値の確率分布が前述の Born の統計公式で理論的に予言される．また，複数個の可換な観測可能量の値は，原理的には，一個の観測可能量の値に帰着されるので，それらもやはり，同時に測定が可能で，その測定値の結合確率分布が前述の Born の統計公式で理論的に予言される．しかし，非可換な観測可能量の間の結合確率分布が一般には定義されないので，観測可能量の値が同時に実在すると解釈することには困難がある．ある種の観測可能量の値の実在論的解釈の不可能性および同時測定不可能性は，一般に不確定性原理と呼ばれているが，その関係を正確に表現する問題はまだ十分に解明されていない．観測可能量の値の実在性と量子集合論に関する最近の研究成果は，以下のようにまとめることができる．

与えられた状態 ψ のもとで，観測可能量 A と B の値が同時に実在すると考えられる（実在論的解釈を持つ）ための必要十分条件は，状態 ψ における任意の $aA + bB$ $(a, b \in \mathbf{R})$ の任意の実係数多項式 $p(aA + bB) = f(A, B)$ の期待値 が A と B の値の結合確率分布で表現できることである．ここで，$f(A, B)$ の期待値は，$f(A, B)$ の単位の分解を利用して求めると $\langle \psi, f(A, B)\psi \rangle$ となるので，このことは，$\mathbf{R}^2$ 上の確率測度 $\mu_\psi^{A,B}$ が存在して $aA + bB$ $(a, b \in \mathbf{R})$ の任意の実係数多項式 $p(aA + bB) = f(A, B)$ に対して，

$$\langle \psi, f(A, B)\psi \rangle = \int_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\, d\mu_\psi^{A,B}(x, y)$$

が成立することを意味する．この関係は，$\omega = (x, y)$ という隠れた変数が存在して，A と B の値を同時に決定していると解釈できる．この様な隠れた変数は，A, B に依存しているの

で，文脈依存的であるといわれる．このような確率測度 $\mu_\psi^{A,B}$ が存在するとき，それを状態 ψ における A と B の結合確率分布と呼ぶ．A と B が可換であるときには，

$$\mu_\psi^{A,B}(I \times J) = \|E^A(I)E^B(J)\psi\|^2$$

によって結合確率分布が得られる．一般の場合の結合確率分布の存在に関しては，以下の特徴付けが得られる [19]．

定理 17 任意の観測可能量の対 A, B および状態 ψ について，以下の条件はすべて同値である．

(i) 状態 ψ における A と B の結合確率分布が存在する．

(ii) 任意の $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$ について $[E^A(\lambda), E^B(\lambda')]\psi = 0$ が成り立つ．

(iii) $\psi \Vdash \underline{\vee}(\tilde{A}, \tilde{B})$．

(iv) 任意の区間 I, J に対して，$\mu(I \times J) = \Pr\{\tilde{A} \in \tilde{I} \wedge \tilde{B} \in \tilde{J} \| \psi\}$ をみたす $\mathbf{R}^2$ 上の確率測度 μ が存在する．

上の条件が満たされるとき，任意の区間 I, J に対して，

$$\mu_\psi^{A,B}(I \times J) = \Pr\{\tilde{A} \in \tilde{I} \wedge \tilde{B} \in \tilde{J} \| \psi\}$$

が成り立つ．

上の定理は二つの観測可能量について述べたが，定理を一般の観測可能量の集まりに拡張することは容易である．上の定理と ZFC 移行原理を合わせると，ある状態でいくつかの観測可能量の値が実在論的解釈を持つことと，それらの観測可能量に関する ZFC の定理がすべてその状態で成立することは同等である．

11 量子観測可能量の値の同一性と量子実数の相等関係

量子実数 $u, v \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ に関する $\mathcal{Q}$-値の相等関係 $[\![u = v]\!]$ は次のように特徴付けられる [18]．

定理 18 任意の $u, v \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ と状態 ψ に対して次の条件はすべて同値である．

(i) $\psi \Vdash u = v$．

(ii) 任意の $x \in \mathbf{Q}$ について $u(\check{x})\psi = v(\check{x})\psi$．

(iii) 任意の $x, y \in \mathbf{Q}$ について $u(\check{x})v(\check{y})\psi = v(\check{x} \wedge \check{y})\psi$．

(iv) 任意の $x, y \in \mathbf{Q}$ について $\langle u(\check{x})\psi, v(\check{y})\psi\rangle = \|v(\check{x} \wedge \check{y})\psi\|^2$．

次の定理は$\mathcal{Q}$-値の相等関係が $V^{(\mathcal{Q})}$ の実数に関しては，同値関係であることを示している [18]．

定理 19 $V^{(\mathcal{Q})}$ で次の関係が成立する.

(i) $[\![(\forall u \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})u = u]\!] = 1$.

(ii) $[\![(\forall u, v \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})u = v \to v = u]\!] = 1$.

(iii) $[\![(\forall u, v, w \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})u = v \land v = w \to u = w]\!] = 1$.

(iv) $[\![(\forall v \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})(\forall x, y \in v)x = y \land x \in v \to y \in v]\!] = 1$.

(v) $[\![(\forall u, v \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})(\forall x \in u)x \in u \land u = v \to x \in v]\!] = 1$.

次の定理から，$V^{(\mathcal{Q})}$ の実数に関しては，相等性から可換性が導かれることが示される [18].

定理 20 任意の $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ について，

$$[\![u_1 = u_2 \land \cdots \land u_{n-1} = u_n]\!] \le \underline{\vee}(u_1, \ldots, u_n).$$

が成立する.

これより，$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数に関しては，Δ_0-式に対する代入規則が成立することが導かれる [18].

定理 21 (Δ_0-代入規則) $\mathcal{L}(\in)$ の Δ_0-式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，

$$\begin{aligned}&[\![(\forall u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})\\ &\qquad (u_1 = v_1 \land \cdots \land u_n = v_n) \to (\phi(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \ldots, v_n))]\!] = 1\end{aligned}$$

が成立する.

量子力学の標準的な解釈によれば，原子的観測命題は観測可能量 A と区間 I に対して，$\tilde{A} \in \tilde{I}$ という形のものに限られていた [26]. しかし，量子集合論によって，量子力学の解釈をより一般の観測可能命題に拡張することを可能にすることが期待できる. ここでは，そのような解釈の拡張の一つを導入しよう.

任意の可換な観測可能量 A と B および任意の状態 ψ に対して，ψ における A と B の結合確率分布 $\mu_{\psi}^{A,B}$ が $\mathbf{R}^2$ 上の確率測度として定義され，任意の区間 I および J に対して，

$$\mu_{\psi}^{A,B}(I \times J) = \Pr\{\tilde{A} \in \tilde{I} \land \tilde{B} \in \tilde{J} \| \psi\} = \|E^A(I)E^B(J)\psi\|^2$$

を満たす. このとき，

$$\Pr\{\tilde{A} \in \tilde{I} \land \tilde{B} \in \tilde{J} \| \psi\} = 0$$

が共通部分を持たない任意の区間 I, J について成り立つことは，A と B が状態 ψ で同一の値を持つことを意味すると考えられる. この条件は，更に，次の条件のそれぞれとも同値である.

(i) $\mu_\psi^{A,B}(\{(a,b)\in\mathbf{R}^2 \mid a=b\})=1$.

(ii) $\mu_\psi^{A,B}(\{(a,b)\in\mathbf{R}^2 \mid a\neq b\})=0$.

(iii) 共通部分を持たない任意の区間 I, J について，$\mu_\psi^{A,B}(I\times J)=\mu_\psi^{A,B}((I\cap J)\times\mathbf{R})=\mu_\psi^{A,B}(\mathbf{R}\times(I\cap J))$.

従って，値の同一性は任意の可換な観測可能量の対に対しては，明らかな概念である．しかし，結合確率分布は可換な観測量の間にしか定義されていないから，この概念を任意の非可換な観測可能量の対に拡張することは自明でない．

最近の研究 [16, 17] でこの問題に関して満足できる結論が得られた．ここでは，この問題を量子集合論から見直してみよう．量子集合論では，可換とは限らない一般の A と B が状態 ψ で同一の値を持つことは，$\psi\Vdash\tilde{A}=\tilde{B}$，またはそれと同値な $\psi\Vdash(\forall r\in\check{Q})r\in\tilde{A}\leftrightarrow r\in\tilde{B}$ で表されると考えるのが自然である．問題は，この条件が量子力学の解釈として実験事実などから経験的妥当性を持つかということである．これに関して，次の定理が成立する [18].

定理 22 $\mathcal{H}$ 上の任意の観測可能量 A, B および任意の状態 $\psi\in\mathcal{H}$ に対して，次の条件はすべて同値である．

(i) $\psi\Vdash\tilde{A}=\tilde{B}$.

(ii) 任意の $r\in\mathbf{Q}$ に対して，$E^A(r)\psi=E^B(r)\psi$.

(iii) 任意の有界連続関数 f に対して，$f(A)\psi=f(B)\psi$.

(iv) 共通部分を持たない任意の区間 I, J に対して，$\langle E^A(I)\psi, E^B(J)\psi\rangle=0$.

(v) 状態 ψ における A, B の結合確率分布 $\mu_\psi^{A,B}$ が存在して，

$$\mu_\psi^{A,B}(\{(a,b)\in\mathbf{R}^2 \mid a=b\})=1$$

を満たす．

上の条件 (iv) は，文献 [16, 17] で A と B が同一の値を持つことの定義条件に用いられているもので，A と B が同一の値を持つことの一般的な必要条件と考えられる．条件 (v) から，A と B が状態 ψ で同時測定可能で，常に同一の測定値を与えることが導かれるので，A, B が同一の値を持つことを経験的に正当化している．条件 (i) から，量子集合論の実数の相等関係は量子力学において観測可能量の測定値の同一性として，経験的に検証可能であることが導かれる．観測可能量の値の同一性の更なる応用については，文献 [17]を参照されたい．

12　同時測定可能性と不確定性原理

従来の不確定性原理の理解によると，二つの観測可能量が可換であること，二つの観測可能量の値が実在論的解釈を持つこと，二つの観測可能量が同時測定可能であることの 3 条件は互いに同値であると考えられていた．しかし，最近の研究により，非可換な観測可能量の同時測定可能性が明らかにされ，定説は改められつつある．前々節では，初めの 2 条件が一般

に同値であることを示したので，本節では，二つの観測可能量の同時測定可能性について簡単に議論する.

観測可能量 A, B をもつ量子力学系の状態空間を $\mathcal{H}$ とする．A と B が状態 ψ で同時測定可能であるとは，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ の単位ベクトル ξ, $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U, $\mathcal{K}$ 上の観測可能量（稠密な定義域を持つ自己共役作用素）M，および，二つの Borel 関数 f, g が存在して，$A\otimes I$ と $U^*(I\otimes f(M))U$, $B\otimes I$ と $U^*(I\otimes g(M))U$ が状態 $\psi\otimes\xi$ でそれぞれ共に同一の値を持つこと，すなわち，

$$\psi\otimes\xi \Vdash (A\otimes I)^{\Upsilon} = (U^*(I\otimes f(M))U)^{\Upsilon} \tag{12.3}$$

$$\psi\otimes\xi \Vdash (B\otimes I)^{\Upsilon} = (U^*(I\otimes g(M))U)^{\Upsilon} \tag{12.4}$$

が成立することである.

上の条件が満たされれば，測定の相互作用を介して，M を測定することにより，A と B のいずれの測定値をも得ることができるので，A と B が同時測定可能であると考えられる．スピンの異なる成分のように典型的に非可換な観測可能量についても，ある状態で同時測定可能であることを示すことができる．そのような観測可能量の値は実在論的解釈を持たないが，どちらの測定値も一方のみの測定値としては，量子力学の予言と整合的である.

それでは，不確定性原理はこのような同時測定の可能性に対して，どのような制約を与えているのだろうか．条件 (12.3), (12.4) が成立しない場合も含めて，それぞれの測定誤差（平方根平均 2 乗誤差）$\epsilon(A)$，$\epsilon(B)$ を

$$\epsilon(A) = \|(A\otimes I)\psi\otimes\xi - (U^*(I\otimes f(M))U)\psi\otimes\xi\| \tag{12.5}$$

$$\epsilon(B) = \|(B\otimes I)\psi\otimes\xi - (U^*(I\otimes g(M))U)\psi\otimes\xi\| \tag{12.6}$$

と定義する．条件 (12.3), (12.4) がみたされているならば，$\epsilon(A) = \epsilon(B) = 0$ となる．このとき，次の関係が普遍的に成立する [13, 11, 12, 14, 15].

$$\epsilon(A)\epsilon(B) + \sigma(A)\epsilon(B) + \epsilon(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi, [A, B]\psi\rangle|. \tag{12.7}$$

ここで，$\sigma(A), \sigma(B)$ はそれぞれの標準偏差で，$\sigma(A) = \|A\psi - \langle\psi, A\psi\rangle\psi\|$ 等と定義される.

スピンの異なる成分のように，互いに非可換な観測可能量においては，すべての状態で $[A, B]\psi \neq 0$ となっているが，$\langle\psi, [A, B]\psi\rangle = 0$ となる状態が存在して，そのような状態で同時測定が可能である．また，従来，

$$\epsilon(A)\epsilon(B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi, [A, B]\psi\rangle|. \tag{12.8}$$

という関係が一般に成立するという誤解が流布していて，$\langle\psi, [A, B]\psi\rangle \neq 0$ ならば，$\epsilon(A) \neq 0$ かつ $\epsilon(B) \neq 0$ で，一方を小さくすると一方が必然的に大きくなると考えられていたが，

これは誤りで，$\langle\psi, [A,B]\psi\rangle \neq 0$ であっても，$\epsilon(A) = 0$ または $\epsilon(B) = 0$ となる同時測定が可能であり，誤差の積 $\epsilon(A)\epsilon(B)$ は幾らでも小さくできることが明らかになった [13, 11, 12, 14, 15].

以上のように量子力学の基礎に関しては，未だに解明されていない問題が残されていて，量子集合論はそれらの問題を考える上で重要な役割を果たすことが期待される．

13 おわりに

4 節で述べたように，量子論理の含意接続詞 $P \to Q$は，次の条件を満たすものが妥当だと考えられている．

(E) $P \to Q = 1$ と $P \leq Q$ は同値である．

(MP) $P \wedge (P \to Q) \leq Q$.

(MT) $Q^{\perp} \wedge (P \to Q) \leq P^{\perp}$.

(LB) $P \,{}^{\lvert}_{\circ}\, Q$ ならば $P \to Q = P^{\perp} \vee Q$.

そのうち，可補束の多項式で定義可能なものは，次の 3 個の可能性に絞られる．

(i) $P \to_1 Q = P^{\perp} \vee (P \wedge Q)$.

(ii) $P \to_2 Q = (P \vee Q)^{\perp} \vee Q$.

(iii) $P \to_3 Q = (P \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})$.

本稿では，竹内 [23] および文献 [18] に従って，佐々木アローと呼ばれる $P \to_1 Q$ を採用している．量子集合論における陳述の真理値は含意接続詞の選択に依存しているが，$P \to_1 Q$ の他の選択をしても本稿で展開したのと同様に，ZFC 移行原理や観測命題の埋め込み等の結果が得られることが期待できる．従って，上の含意接続詞の候補 (i), (ii), (iii) の選択により，それぞれの量子集合論のどこに差異が表れるのかを明らかにすることは，興味深い未解決問題であり，それを通して，量子力学の標準的な解釈から上の含意接続詞のどの選択がもっとも妥当であるかを判定できるようになることが期待できる．

このようなアプローチと異なるアプローチとして，千谷等 [24]は，含意接続詞として，$P \leq Q$ ならば $P \to Q = 1$ となり，それ以外では $P \to Q = 0$ となる非標準的なものを採用して，可換性の条件無しに基本公理が成立すること，および，量子実数と観測可能量が対応することを示している．上述の 3 個の候補は，条件 (LB) から可換なものの間では，Boole 論理の含意と一致するが，千谷等のアプローチでは，そのような条件が満たされないので，本稿のアプローチのような Boole 代数値モデルの拡張という観点とは，相容れない．また，量子力学では互いに可換な観測量の間では，Boole 論理が成立するので，量子力学の解釈とも相容れない．実際，千谷達の量子集合論では，量子実数に関する関係の真理値が量子力学の標準的解釈と整合的ではない．たとえば，任意の観測可能量 A と任意の実数 $a \in \mathbf{R}$ に対して，関係 $\tilde{A} \leq \tilde{a}$ の真理値は，$A \leq a1$ ならば $[\![\tilde{A} \leq \tilde{a}]\!] = 1$ であり，その他の場合は，$[\![\tilde{A} \leq \tilde{a}]\!] = 0$ である．さらに，二つの量子実数の間の等号は二つの真理値しかとらない．す

なわち，$A = B$ なら $[\![\tilde{A} = \tilde{B}]\!] = 1$ であり，それ以外の場合は，$[\![\tilde{A} = \tilde{B}]\!] = 0$ である．従って，このアプローチでは，本稿の定理 15 や定理 22 のような量子力学との整合性を示す結果を導くことはできないであろう．上述の (i)–(iii) 以外の含意から導かれる量子集合論の意義と応用可能性について，現状では不明と言わざるを得ない．

参考文献

[1] J. L. Bell, Boolean-valued models and independence proofs in set theory, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1985.

[2] G. Birkhoff and J. von Neumann, The logic of quantum mechanics, Ann. Math. **37** (1936), 823–845.

[3] T. S. Blyth and M. F.Janowitz, Residuation Theory, International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics no. 102, Pergamon, Oxford, 1972.

[4] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 1143–1148.

[5] ———, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, New York, 1966.

[6] P. Gibbins, Particles and Paradoxes: The Limits of Quantum Logic, Cambridge UP, Cambridge, UK, 1987 [邦訳：金子務他訳，量子論理の限界，産業図書，1992].

[7] G. M. Hardegree, The conditional in abstract and concrete quantum logic, The logico-algebraic approach to quantum mechanics, Volume II: Contemporary consolidation (C. A. Hooker, ed.), D. Reidel, Dordrecht, 1979, pp. 49–108.

[8] ———, Material implication in orthomodular (and Boolean) lattices, Notre Dame J. Formal Logic **22** (1981), 163–182.

[9] G. Kalmbach, Orthomodular lattices, Academic, London, 1983.

[10] J. Kotas, An axiom system for the modular logic, Studia Logica **21** (1967), 17–38.

[11] M. Ozawa, Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation, Phys. Lett. A **318** (2003), 21–29.

[12] ———, Uncertainty principle for quantum instruments and computing, Int. J. Quant. Inf. 1 (2003), 569–588.

[13] ———, Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement, Phys. Rev. A **67** (2003), 042105.

[14] ———, Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables, Phys. Lett. A **320** (2004), 367–374.

[15] ———, Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements, Ann. Phys. (N.Y.) **311** (2004), 350–416.

[16] ———, Perfect correlations between noncommuting observables, Phys. Lett. A **335** (2005), 11–19.

[17] ———, Quantum perfect correlations, Ann. Phys. (N.Y.) **321** (2006), 744–769.

[18] ———, Transfer principle in quantum set theory, to appear in J. Symbolic Logic, online preprint: http://arXiv.org/abs/math.LO/0604349 (2006).

[19] ———, in preparation.

[20] 小澤正直, 量子情報理論のルーツ, 数理科学2001年6月号, 特集「量子情報と量子コンピュータ」, pp. 5–14；別冊・数理科学『量子情報科学とその展開：量子コンピュータ・暗号・情報通信』(サイエンス社, 2003年), pp. 14–23.

[21] D. Scott and R. Solovay, Boolean-valued models for set theory, unpublished manuscript for Proc. AMS Summer Institute on Set Theory, Los Angeles: Univ. Cal., 1967.

[22] G. Takeuti, Two applications of logic to mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[23] ———, Quantum set theory, Current Issues in Quantum Logic (New York) (E. G. Beltrametti and B. C. van Fraassen, eds.), Plenum, 1981, pp. 303–322.

[24] S. Titani and H. Kozawa, Quantum set theory, Int. J. Theor. Phys. **42** (2003), 2575–2602.

[25] A. Urquhart, Review, J. Symbolic Logic **48** (1983), 206–208.

[26] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932［邦訳：井上健他訳, 量子力学の数学的基礎, みすず書房, 1957］.