

## 線形論理の誕生

照井一成

terui@nii.ac.jp

国立情報学研究所 / 総合研究大学院大学\*

### 1 はじめに — 分解の精神

ラジオはどうして鳴るのだろう？

車はどうして走るのだろう？

よくわからない。

よくわからないものはとりあえずばらしてみよう！

子供のころ、誰しも一度は機械やおもちゃの仕組みに興味を持ち、分解をしてみたことがあるだろう。そのような分解は、大抵の場合悲惨な結末に至る。分解しても何もわからなかったり、元通りに復元できなくなって親にこっぴどくしかられたり…。それでも、まれには機械の仕組みについて何事かを理解できたり、さらにごくまれには、別の仕方でも組み立て直すことによって元よりもよい機械ができあがったりすることもある。だから、分解するのは必ずしも悪いことではない。

さて、我々には古典論理に加えて直観主義論理が与えられている。そして直観主義論理の証明が構成的 (constructive) であることを知っている。証明が構成的であるとは、難しいことを抜きにして大雑把に言えば、証明をコンピュータプログラムとして見ることができるということである。これはちょっと驚くべきことだ。定理の根拠という静的な性格をもつ証明が、計算の筋道という動的な性格をもつプログラムと見なせるのである。論理学という一つの専門分野に長年携わっているとついつい感覚が麻痺しがちであるが、これは決して「あ、そう」でも「当たり前じゃん」でも済まされる問題ではない。なんでそんな風になっているのだろうか？その背後にはどんな仕組みが隠されているのだろうか？このことについてはまじめな研究がなされてしかるべきである。

その際に我々が依ってたつのは、子供のころと同じ分解の精神である。よくわからないものは、とりあえずばらしてみよう！もっとも我々凡人がそのように分解を行っても、実りのある成果に至ることはごくごくまれである。しかしここに Jean-Yves Girard という一人の天才がおり、分解は彼の手により行われたのである。彼は直観主義論理を適切な仕方でも分解し、証明の構成性について多くの洞察をもたらし、そして—別の仕方でも組み立てなおすことにより、“ある側面において”前よりもよい論理体系を作り上げてしまったのである。それが線形論理 (linear logic, [13]) である。

---

\* 大学院生募集中。

線形論理のよい点としては、例えば古典論理から直観主義論理への移行により失われた双対性 (duality) の復活がある。しかも線形論理へは、構成性を失わずに直観主義論理を埋め込むことができる。ゆえに線形論理への移行によって失われるものは何もない。そればかりか、線形論理を研究することで、古典論理や直観主義論理について、まったく新しい視点から統一的な仕方で理解をもたらす可能性がでてきたのである。

線形論理は 1987 年に発表されて以来、計算機科学における論理 (logic in computer science) の分野で爆発的に広まってきた。線形論理がもたらした豊富な知見のうち、めばしいものだけでも挙げてみよう。

- 証明の意味論的解釈に潜む線形性の発見
- 古典論理から直観主義論理への移行により失われた双対性の復活
- 計算の量的側面に対する論理的表現
- 並行的な証明・計算モデル
- 統語論に依存しないカット除去手続きの抽象的なモデル化
- 構成的な古典論理の可能性

これら多くの知見のゆえに、いまや線形論理は理論計算機科学、特にプログラミング言語基礎論の分野ではなくてはならない存在になっている。

本稿は線形論理についての初歩的な解説である。線形論理について重要なのはその統語論や意味論についての詳細にあるのではない。また「論理式  $A$  と “ $A$  かつ  $A$ ” を区別しよう」とか「仮定はちょうど一回しか使っちゃいけない」とかといった、ごく限られた文脈でしか意味をなさないような教条文の数々にあるのでもない。そうではなく、線形論理にとって最も重要なのはまさに分解の精神そのものであると考える。そこで本稿では特に直観主義論理の分解によって線形論理が生まれるに至ったいきさつに焦点を当てる。その際、あまり歴史的な順序にはこだわらずに概念的な順序にのっとり話を進めることにする。時系列的な描写はかえって事態をわかりにくくするかもしれないからである。

これは線形論理の誕生について物語った一つのフィクションである。

## 2 草枕 — 古典論理と直観主義論理の二律背反

### 2.1 古典論理と双対性

「智に働けば角が立つ。情に棹させば流される。」とは夏目漱石『草枕』の一節であるが、古典論理と直観主義論理の間にも同じようなやっかいな対立がある。古典論理の双対性を立てようとするれば構成性が失われ、直観主義論理の構成性を立てようとするれば双対性が失われる。とにかく論理学はやりにくい。この二律背反をいかに解消するかが線形論理の誕生に重要に関わっている。そこで本章ではそのあたりの事情について概観しておくことにする。

古典論理の最大の特徴は、その双対性 (duality) にあるとあってよい。 $A$  を含意記号  $\rightarrow$  を含ま

ない一階述語論理の論理式とするとき、 $A$  に対して

$$\top \iff \perp \quad \wedge \iff \vee \quad \forall \iff \exists$$

という交換操作を行って得られる論理式を  $A^d$  とする。よく知られているように次のことが成り立つ。

定理 2.1 (双対原理)  $A \rightarrow B$  が証明可能なことと  $B^d \rightarrow A^d$  が証明可能なことは一致する。より一般的にシーケント計算  $LK$  において

$$\Gamma \vdash \Delta \text{ が証明可能} \iff \Delta^d \vdash \Gamma^d \text{ が証明可能}$$

が成り立つ。ここで  $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$  のとき、 $\Gamma^d \equiv A_n^d, \dots, A_1^d$  である。

双対原理を反映して、古典論理のシーケント計算  $LK$  は左右対称の構造を持っている。特に Weakening や Contraction などの構造規則 (structural rules) についても、シーケントの左右で同じように適用できるようになっている。

## 2.2 直観主義論理と構成性

序章で述べたとおり、直観主義論理の証明は構成的であり、コンピュータプログラム (より正確にはアルゴリズム) と見なすことができる。別の言い方をすれば、計算可能な関数を表すといってもよい。直観主義論理の証明の関数的性格がもっとも端的に現れるのは、いわゆるブラウワー・ハイティング・コルモゴロフ解釈 (BHK 解釈) においてである。そこでこの BHK 解釈をおさらいしておこう。

話を単純にするため、論理結合子としては含意  $\Rightarrow$  のみ持つ直観主義命題論理を考える。 $\Gamma$  は論理式の集合を表すものとする。直観主義論理の推論規則は、自然演繹で書くと次のようになる。

$$\frac{A_i \in \Gamma}{\Gamma \vdash A_i} \quad \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow \text{導入} \quad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow \text{除去}$$

これらの規則に従って構成される木構造が証明 (proof) である。証明は次の書き換え規則に従って正規化 (normalize) することができる。

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ A, \Gamma \vdash B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_2 \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B}} \rightarrow \begin{array}{c} \vdots \pi_1[\pi_2] \\ \Gamma \vdash B \end{array}$$

ただし  $\pi_1$  が  $A, \Gamma \vdash B$  の証明で、 $\pi_2$  が  $\Gamma \vdash A$  の証明のとき、 $\pi_1[\pi_2]$  は次のように帰納的に定義される  $\Gamma \vdash B$  の証明である。

(a)  $\pi_1$  が

$$\frac{A_i \in \Gamma}{A, \Gamma \vdash A_i}$$

のとき、 $\pi_1[\pi_2] = \pi_1$ . また  $\pi_1$  が

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}$$

のとき、 $\pi_1[\pi_2] = \pi_2$ .

(b)  $\pi_1$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_0 \\ A, C, \Gamma \vdash B \end{array}}{A, \Gamma \vdash C \Rightarrow B}$$

の形のとき、 $\pi_1[\pi_2]$  は

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_0[\pi_2] \\ C, \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash C \Rightarrow B}$$

(c)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{cc} \vdots \pi_{11} & \vdots \pi_{12} \\ A, \Gamma \vdash C \Rightarrow B & A, \Gamma \vdash C \end{array}}{A, \Gamma \vdash B}$$

の形のとき、 $\pi_1[\pi_2]$  は

$$\frac{\begin{array}{cc} \vdots \pi_{11}[\pi_2] & \vdots \pi_{12}[\pi_2] \\ \Gamma \vdash C \Rightarrow B & \Gamma \vdash C \end{array}}{\Gamma \vdash B}$$

さて、BHK 解釈 (の最も素朴なヴァージョン) は次のようにして与えることができる。

1. 各論理式  $A$  に集合  $A^*$  を割り当てる。ただし  $(A \Rightarrow B)^*$  は  $A^*$  から  $B^*$  への関数全体の集まり  $[A^* \rightarrow B^*]$  の部分集合になっているものとする。
2.  $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$  のとき、 $\Gamma \vdash B$  の証明  $\pi$  に関数  $\pi^* : A_1^* \times \dots \times A_n^* \rightarrow B^*$  を次のようにして割り当てる。

(a)  $\pi$  が

$$\frac{A_i \in \Gamma}{\Gamma \vdash A_i}$$

の形のときには、各  $a_1 \in A_1^*, \dots, a_n \in A_n^*$  について  $\pi^*(a_1, \dots, a_n) = a_i$ .

(b)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_0 \\ A, \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

の形のときには、 $\pi^*(a_1, \dots, a_n) = \lambda x. \pi_0^*(x, a_1, \dots, a_n)$ .

(c)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \Gamma \vdash A \Rightarrow B \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_2 \\ \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash B}$$

の形のときには、 $\pi^*(a_1, \dots, a_n) = \pi_1^*(a_1, \dots, a_n)(\pi_2^*(a_1, \dots, a_n))$ . すなわち関数  $\pi_1^*(a_1, \dots, a_n) : A^* \rightarrow B$  を値  $\pi_2^*(a_1, \dots, a_n) \in A^*$  に適用した結果である。

このような割り当てを行うと、証明の解釈は正規化手続きにより保たれることがわかる。

命題 2.2  $\pi_1$  を直観主義論理の証明とするとき、

(\*)  $\pi_1 \rightarrow \pi_2$  ならば  $\pi_1^* = \pi_2^*$ .

このように各証明に対して、正規化手続きのもとで不変に保たれるような値を割り当てようというのが表示的意味論 (denotational semantics) の基本的な考え方である。

さて、BHK 解釈がうまくいくためには一つの要請が必要である。すなわち  $(A \Rightarrow B)^*$  は十分に多くの関数を含んでいなければならない。特に問題となるのが上の 2(b) の場合で、各  $a \in A^*$  について  $\pi_0^*(a, a_1, \dots, a_n) \in B^*$  のときには、関数  $\lambda x. \pi_0^*(x, a_1, \dots, a_n)$  が  $(A \Rightarrow B)^*$  に含まれているのでなければならない。この要請にどう対処するかという点において、さまざまな表示的意味論の特徴が現れてくる。この問題は、「証明は何らかの (some) 関数を表すが、任意の (any) 関数を表すというわけではない。ではいったいどのような関数を表すのか?」という表示的意味論の根本的な問題意識と関わっているからである。

1. もっとも単純な方法は、単に  $(A \Rightarrow B)^*$  を関数空間  $[A^* \Rightarrow B^*]$  全体と定義することである。しかしこの解釈によれば、論理式  $A$  の複雑さが増大するにつれて集合  $A^*$  の濃度は途方もなく大きくなってしまふ。証明は常に可算個しかないということを念頭におけば、このような解釈が証明の解釈としてはあまりにも非経済的であることがわかるだろう。非経済的な解釈は、特に二階の量子子を解釈する際に困難に陥る。実際、二階の論理式  $\forall \alpha. A(\alpha)$  を素朴に解釈しようとするれば、

$$(\forall \alpha. A(\alpha))^* = \prod_{B: \text{論理式}} A(B)^*$$

とでもするのが妥当であろうが、これでは定義が破綻してしまっている ( $\forall \alpha. A(\alpha)$  も右辺の論理式  $B$  の一つのため)。

2. もちろんひとまず上のように定義した上で、 $(A \Rightarrow B)^*$  を何らかの証明  $\pi$  の解釈になっている要素  $\pi^*$  の集まりに制限すれば、可算な解釈を得ることができる。しかし今問題したいのは、まさに証明の解釈になっている関数とはどのような関数である。そのような問題意識からすれば、 $(A \Rightarrow B)^*$  を単に証明の解釈に制限するというのは論点先取であるといわざるをえない。
3. 中間的な方法として、 $(A \Rightarrow B)^*$  を  $A^*$  から  $B^*$  への計算可能な関数 (のコード) の集まりと定義することもできる (参照: Kleene の実現可能性解釈, realizability interpretation)。

最後のアプローチは悪くないのだが、それでも計算可能な関数とはどのような性質を持つ関数なのか、という疑問が残る。そこで以下では、計算可能な関数そのものを解釈として採用するのではなく、計算可能な関数が満たすべき性質をより抽象的に捉えなおし、その考察に基づいて  $(A \Rightarrow B)^*$  を与えるという方針をとる。これは Scott 流の領域理論 (domain theory) の根底にある考え方である。

### 2.3 双対性と構成性の二律背反

前節の命題 2.2 は証明の表示的意味論にとって最も基本的な性質であるが、この性質を満たす形で  $LK$  の証明に自然に解釈を与えようとする、解釈は自明なものへつつぶれてしまう。このことを見ておこう。

$\pi_1$  と  $\pi_2$  を二つの全く異なる  $\vdash A$  の証明とする。このとき次の証明  $\pi$  を考える (Lafont の危険対, Lafont's critical pair) :

$$\frac{\frac{\frac{\vdots \pi_1}{\vdash A} \text{ W 右}}{\vdash A, A} \quad \frac{\frac{\vdots \pi_2}{\vdash A} \text{ W 左}}{A \vdash A} \text{ カット}}{\vdash A, A} \text{ カット}}{\vdash A} \text{ C 右}$$

この証明は、カット除去手続き (および Weakening-Contraction の簡略化) により  $\pi_1$  へも  $\pi_2$  へも書き換えが可能である。ゆえに  $LK$  にどんな (自然な) 表示的意味論を与えたとしても、要請 (\*) により  $\pi_1^* = \pi^* = \pi_2^*$  となってしまう、 $\vdash A$  の証明の解釈は全部同一のものになってしまう。すなわち  $LK$  は証明の表示的意味論の観点からすると、(解釈が自明なものにつぶれてしまうという意味で) 矛盾しているのである。

Lafont の危険対が発生した原因は、Weakening 規則が左右両方に適用可能であるという点にある。そこで矛盾を回避するために Weakening 右規則を禁止してみてもどうか。この場合、(論理規則を適切に定義すれば) シークエントの右辺には高々一つの論理式しか含まれないようにすることができる。従って Contraction 右規則を使う機会はなくなる。このようにして制限を入れた結果得られるものが直観主義論理のシークエント計算  $LJ$  に他ならない。

直観主義論理においては、矛盾のない表示的意味論を考えることができる。このことはまさに直観主義論理の構成性を反映している。しかし世の中、何かを得るときにはつねに代償を支払わねばならず、それは論理学においても例外ではない。直観主義論理はシークエント計算の推論規則の左右対称性を放棄せざるを得なくなった。代償は双対原理の喪失である。

双対性をとれば構成性が失われ (証明のアルゴリズム的内容が失われ)、構成性をとれば双対性が失われる。このように双対性と構成性は、一見したところ二律背反的に見える。しかし本当にそうなのだろうか? 双対性を満たしつつ構成性をも備えるような論理体系を考えることはできないのだろうか? 話を先取りして言えば、答えはイエスである。それが線形論理に他ならない (もっとも何らかの代償はやはり必要なのではあるが)。

## 2.4 もう一つの対比：エルブランの定理と存在特性

古典論理の持つもう一つの重要な性質として、エルブランの定理を挙げておく。

**定理 2.3 (エルブランの定理)**  $A(x)$  を全称量化子を含まない論理式とする。もしも  $\exists x A(x)$  が古典論理で証明可能ならば、ある有限個の項  $t_1, \dots, t_n$  が存在して  $A(t_1) \vee \dots \vee A(t_n)$  が証明可能である。

一方、直観主義論理においてはより強い性質が成り立つ。

**定理 2.4 (存在特性)**  $A(x)$  を一階述語論理の論理式とする。もしも  $\exists x A(x)$  が直観主義論理で証明可能ならば、一つの項  $t$  が存在して  $A(t)$  が証明可能である。

なぜ古典論理では一般に複数個の項  $t_1, \dots, t_n$  が必要なのに、直観主義論理ではただ一つの項  $t$  だけで十分なのだろうか？実をいうとこれは、古典論理が“線形”ではなく、直観主義論理が“部分的に線形”であることと深く関係しているのである。

## 3 具体から抽象へ — プログラムと整合空間

### 3.1 有限呼び出し性と連続性

前章 2.2 節からの流れで、計算可能な関数のもつ性質を抽象的に捉えることから始めよう。話を単純にするために、以下では次のようなプログラム  $M$  を考える（プログラミング言語はアセンブリでも C でも LISP でも何でもよい）。 $M$  は部分関数  $f: N \rightarrow N$  と自然数  $m \in N$  を入力として計算を行い、もしも計算が停止する場合には自然数  $n \in N$  を出力する。 $f$  はサブルーチン、あるいは計算論の言葉で言えば、(関数) 神託 (oracle) に相当する。例えば、反復演算 (iteration)

$$IT(f, n) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(0)$$

はそのようなプログラムの典型例である。

いま、自然数  $N$  上の部分関数の集合を  $[N \rightarrow N]$  と書くことにすると、上のようなプログラム  $M$  は、次のようにして部分関数  $F: [N \rightarrow N] \times N \rightarrow N$  を計算するものとみなすことができる：

$F(f, m) = n \iff M$  は部分関数  $f$  と自然数  $m$  が与えられたときに  $n$  を出力して停止する。

プログラム  $M$  の実行について、次のことが言える。もしも  $M(f, m)$  が停止するならば、その計算過程においてサブルーチン  $f$  は高々有限回しか呼び出されることはない。ゆえにある有限個の  $k_1, \dots, k_l \in N$  が存在し、部分関数  $f$  はこれらについてさえ定義されていれば十分だということになる。

もう一つ、次のことも言える。もしも  $M(f, m)$  が停止し、 $n$  を出力するならば、 $f$  の拡張になっている ( $f$  よりも多くの値について停止する) どんなサブルーチン  $g$  についても  $M(g, m) = n$  となる。このことも明らかであろう。

これらはとりわけ計算可能な関数について成り立つ性質であるが、この性質を任意の部分関数  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  について述べなおしておこう。以下、関数をそのグラフと同一視し、 $f \subseteq g$  は  $f$  が  $g$  の部分関数であることを表すものとする。また、 $f \subseteq_{fin} g$  は  $f$  が  $g$  の有限の (すなわち有限個の値についてののみ定義されている) 部分関数であることを表す。

有限呼び出し性 (finite call property): 任意の  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  について、 $F(f, m) = n$  ならば、ある  $g \subseteq_{fin} f$  について  $F(g, m) = n$ .

単調性 (monotonicity): 任意の  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  について、 $F(f, m) = n$ ,  $f \subseteq g$  ならば  $F(g, m) = n$ .

有限呼び出し性はコンピュータプログラムとその実行について当てはまる操作的な性質であるが、これは実は連続性というより数学的な道具立てを用いて捉えなおすことが可能である。そのための準備として、まずは部分関数  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  に対して、(全域) 関数  $\hat{F}: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$  を一対一に対応させる (この操作をカリー化 (Currying) という):

$$\hat{F}(f) = \{(m, n) | F(f, m) = n\}$$

さて、関数  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  について次の性質を考える。

単調性 (monotonicity):  $f \subseteq g$  ならば  $F(f) \subseteq F(g)$ .

連続性 (continuity): 任意の有向和  $f = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$  について、 $F(f) = \bigcup_{i \in I} F(g_i)$ .

ただし、集合族  $\{g_i\}_{i \in I}$  が有向 (directed) であるとは、どんな  $i, j \in I$  についてもある  $k \in I$  があられ  $g_i, g_j \subseteq g_k$  が成り立つこととする。有向和 (directed union)  $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$  とは有向集合族  $\{g_i\}_{i \in I}$  の和のことである。

すると次のことが成り立つ。

定理 3.1 部分関数  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が単調かつ有限呼び出し性を持つための必要十分条件は、 $\hat{F}: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$  が単調かつ連続なことである。

証明 必要性を示すために、 $F$  が単調かつ有限呼び出し性を持つものとする。単調性は明らかであるから、 $\hat{F}$  が連続であることを示す。 $f$  を有向和  $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$  とするとき、単調性から  $\bigcup_{i \in I} \hat{F}(g_i) \subseteq \hat{F}(f)$  がいえる。また  $(m, n) \in \hat{F}(f)$  とすると、 $F(f, m) = n$  であるから、有限データ性よりある  $h \subseteq_{fin} f$  について  $F(h, m) = n$  となる。 $h$  は  $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$  の有限部分集合であるから、ある有限個の  $g_1, \dots, g_k$  の和の部分集合になっているはずである。よって  $\bigcup_{i \in I}^{\uparrow} g_i$  の有向性により  $h \subseteq g_l$  となる  $g_l$  ( $l \in I$ ) が存在する。そして  $F$  の単調性により  $F(g_l, m) = n$  であるが、これは  $(m, n) \in \hat{F}(g_l) \subseteq \bigcup_{i \in I} \hat{F}(g_i)$  を意味する。



次に  $\hat{F}$  の単調性・連続性を仮定して  $F$  の有限呼び出し性を示す。まず、任意の部分関数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  はその有限部分の有向和として表せることに注意する：

$$f = \bigcup^\uparrow \{g \mid g \subseteq_{fin} f\}.$$

$F(f, m) = n$  とすると、これは  $(m, n) \in \hat{F}(f)$  を意味するので、 $\hat{F}$  の連続性により  $(m, n) \in \hat{F}(g)$  となる  $g \subseteq_{fin} f$  が存在することになる。すなわち  $F(g, m) = n$  となる。 ■

このように、有限呼び出し性のような操作的な性質を連続性（有向和の保存）のような数学的な性質でもって置き換えようというのが領域理論の根本的なアイデアである。領域理論では、単調かつ連続な関数のことを単に連続関数 (continuous function) と呼ぶことが多い。

### 3.2 確定呼び出し性と安定性

プログラム  $M$  が乱数や確率的振る舞い、非決定的分岐などを含まない決定的 (deterministic) プログラムであり、さらに二つ以上の処理を並行的に行うことのないような逐次的 (sequential) プログラムであるとする。このときには、その実行過程についてさらに次のことが言える。もしも  $M(f, m)$  が停止するならば、その計算過程におけるサブルーチン  $f$  の呼び出し方は確定している。すなわち、 $m \in \mathbb{N}$  が与えられたとき

$k \in K \iff M(f, m)$  の実行過程においてサブルーチン  $f$  が  $k$  を引数として呼び出される。

を成り立たしめるような集合  $K \subseteq \mathbb{N}$  がただ一つ存在する。

この性質はとりわけ決定的：逐次的プログラムについて成り立つ性質であるが、任意の部分関数  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  について述べ直しておこう。

確定呼び出し性 (definite call property)：  $F(f, m) = n$  ならば、 $g \subseteq f$  かつ  $F(g, m) = n$  を満たす部分関数  $g$  の中で最小のものがただ一つ存在する。

確定呼び出し性を持たないプログラムの代表例に並行選言 (parallel-or) がある。並行選言プログラム  $POR$  を便宜上  $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  の型にあわせて書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} POR(f, m) &= 1 && f(0) = 1 \text{ のとき} \\ &= 1 && f(1) = 1 \text{ のとき} \\ &= 0 && f(0) = f(1) = 0 \text{ のとき} \\ &\rightarrow \text{loop} && \text{それ以外のとき} \end{aligned}$$

プログラム  $POR$  はサブルーチン  $f$  を並列的に呼び出して  $f(0)$  と  $f(1)$  を計算する。そしてもしもどちらか一方でも停止して 1 を出力するならば、全体も即座に停止して 1 を出力する。

このプログラムが確定呼び出し性を満たさないことは、次のようにして確かめることができる。今、部分関数  $f$  について  $f(0) = f(1) = 1$  が成り立つとする。このとき  $POR(f, m) = 1$  が成り立つ。しかし  $POR(g, m) = 1$  かつ  $g \subseteq f$  を成り立たせる極小の  $g$  は二通り存在する。すなわち  $\{(0, 1)\} \subseteq f$  と  $\{(1, 1)\} \subseteq f$  である。ゆえに  $POR$  は確定呼び出し性を満たさない。

確定呼び出し性は再び操作的な性質なので、これを数学的性質で言い換えることを考える。そのようにして得られるのが、G. Berry による安定性の概念である。ここでは  $[N \rightarrow N] \rightarrow [N \rightarrow N]$  の型の関数  $F$  についてのみ定義しておく。

安定性 (stability) : 部分関数  $f$  と  $g$  が両立する (compatible, すなわち  $f \cup g$  が再び部分関数となる) ならば、 $F(f \cap g) = F(f) \cap F(g)$ .

安定性は単調性よりも強い性質である。実際、 $f \subseteq g$  のとき、もしも安定性が成り立つならば、

$$F(f) = F(f \cap g) = F(f) \cap F(g)$$

であり、すなわち  $F(f) \subseteq F(g)$  である。

さて、安定性が確定呼び出し性に対応することを確かめておこう。

定理 3.2 部分関数  $F : [N \rightarrow N] \times N \rightarrow N$  が単調性・確定呼び出し性をもつための必要十分条件は、 $\hat{F} : [N \rightarrow N] \rightarrow [N \rightarrow N]$  が安定性を持つことである。

証明 まず必要性について、 $F$  が単調性・確定呼び出し性を持つと仮定して、 $\hat{F}$  が安定性を持つことを示す。 $f$  と  $g$  を両立する部分関数とする。 $F$  の単調性は  $\hat{F}$  の単調性を含意するから、 $\hat{F}(f \cap g) \subseteq \hat{F}(f) \cap \hat{F}(g)$  は明らかである。また  $(m, n) \in \hat{F}(f) \cap \hat{F}(g)$  とすると  $F(f, m) = n$ 、 $F(g, m) = n$  であり単調性より  $F(f \cup g, m) = n$  が言える。確定呼び出し性により  $h \subseteq f \cup g$  かつ  $F(h, m) = n$  となる部分関数の中で最小のものが唯一つ定まる。最小性より  $h \subseteq f \cap g$ 。よって単調性より  $F(f \cap g, m) = n$ 、すなわち  $(m, n) \in \hat{F}(f \cap g)$ 。

次に十分性を示すために、 $F(f, m) = n$  とする。すなわち  $(m, n) \in \hat{F}(f)$ 。いま、 $g \subseteq f$  かつ  $F(g, m) = n$  を満たす部分関数  $g$  の中で極小のものを考える。 $g_1, g_2$  をそのような部分関数とすると  $g_1, g_2$  は両立しており、 $(m, n) \in \hat{F}(g_1) \cap \hat{F}(g_2)$  であるから、安定性により  $(m, n) \in \hat{F}(g_1 \cap g_2)$ 、つまり  $F(g_1 \cap g_2, m) = n$ 。 $g_1, g_2$  は極小であるから、これは  $g_1 = g_1 \cap g_2 = g_2$  を意味する。すなわち  $g \subseteq f$  かつ  $F(g, m) = n$  を満たす極小の部分関数  $g$  は唯一つしか存在しない。 ■

連続かつ安定な関数は単に安定関数 (stable function) と呼ばれることが多い。

### 3.3 整合空間

安定関数は、文字通り安定した関数空間を生成する。そしてこの安定関数を用いることにより、証明に対する適切な表示的意味論を与えることができるのである。

まずは  $[N \rightarrow N]$  などの具体的な関数空間を一般化して整合空間の概念を導入する。そして安定関数の定義を整合空間上へと拡張する。

定義 3.3 (整合空間) 反射的な無向グラフ  $X = (|X|, \circ)$  を整合空間 (coherent space) と呼ぶ。二項関係  $\circ$  を  $X$  上の整合関係 (coherence) という。 $a \subseteq X$  が  $X$  の完全部分グラフのとき (すな

わちどんな  $x, y \in a$  についても  $x \circ y$  が成り立つとき)、 $a$  をクリーク (clique) と呼び  $a \sqsubset X$  と書く。

部分関数空間  $[N \rightarrow N]$  は整合空間と見なすことができる。実際、集合  $N \times N$  上で次の整合関係を考える：

$$(m_1, n_1) \circ (m_2, n_2) \iff m_1 = m_2 \text{ ならば } n_1 = n_2$$

するとこの整合空間のクリークとはまさに  $N$  上の部分関数のことに他ならない。

その他の整合空間の例として次のものを挙げておく。

### 定義 3.4 (空空間、単位空間、直積空間)

1. 空集合  $\emptyset$  は自明な整合空間とみなすことができる。この空間の唯一のクリークは  $\emptyset$  そのものである。この整合空間を  $\top$  と書く。
2. 単元集合  $\{\bullet\}$  も自明な整合空間とみなすことができる。この空間のクリークは  $\emptyset$  および  $\{\bullet\}$  の二つのみである。この整合空間を  $\perp$  と書く。
3.  $X = (|X|, \circ_X)$ ,  $Y = (|Y|, \circ_Y)$  を整合空間とするとき、 $X \& Y = (|X \& Y|, \circ_{X \& Y})$  を次のように定義する。

$$|X \& Y| = |X| \uplus |Y| = \{(x, 1) | x \in |X|\} \cup \{(y, 2) | y \in |Y|\}$$

$$(x, 1) \circ_{X \& Y} (x', 1) \iff x \circ_X x'$$

$$(y, 2) \circ_{X \& Y} (y', 2) \iff y \circ_Y y'$$

$$(x, 1) \circ_{X \& Y} (y, 2) \text{ は常に成り立つ。}$$

$X \& Y$  はクリークについて言えば、 $X$  と  $Y$  の直積になっている。 $\top$  がその単位元である。

命題 3.5  $X, Y$  を整合空間とする。

1.  $a \sqsubset X, b \sqsubset Y$  のとき、

$$\langle a, b \rangle = \{(x, 1) | x \in a\} \cup \{(y, 2) | y \in b\}$$

は  $X \& Y$  のクリークである。

2.  $c \sqsubset X \& Y$  のとき、

$$p_1(c) = \{x | (x, 1) \in c\}, \quad p_2(c) = \{y | (y, 2) \in c\}$$

はそれぞれ  $X, Y$  のクリークである。

3.  $p_1 \langle a, b \rangle = a, p_2 \langle a, b \rangle = b, \langle p_1(c), p_2(c) \rangle = c$  が成り立つ。

4.  $X \& \top \cong X$

直積空間  $X \& Y$  は、 $n$  個の空間の直積  $X_1 \& \cdots \& X_n$  へと自然に拡張することができる。そして  $a_1 \sqsubset X_1, \dots, a_n \sqsubset X_n$  のとき  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \sqsubset X_1 \& \cdots \& X_n$  が自然に定義でき、また  $c \sqsubset X_1 \& \cdots \& X_n$  のとき  $p_i(c) \sqsubset X_i$  も自然に定義できる。上の命題をこれらの場合に拡張するのも容易である。

さて、安定性の概念を任意の整合空間上の写像へと一般化しよう。

**定義 3.6 (安定写像)** 整合空間  $X$  から  $Y$  への安定写像 (stable map)  $F$  とは  $|X|$  から  $|Y|$  への関数で次の性質を満たすもののことである：

1.  $a \sqsubset X \implies F(a) \sqsubset Y$ .
2.  $a = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} b_i \sqsubset X \implies F(a) = \bigcup_{i \in I} F(b_i)$ .
3.  $a \cup b \sqsubset X \implies F(a \cap b) = F(a) \cap F(b)$ .

$X$  から  $Y$  への安定写像全体の集合を  $\mathbf{Coh}(X, Y)$  と書く。

整合空間について重要なのは、 $\mathbf{Coh}(X, Y)$  全体を一つの整合空間によって表現できるという性質である。しかもこの表現は非常に経済的な形で与えることができる。その際に決定的な役割を果たすのが連続性が有限呼び出し性 (の一般化) を含意し、安定性が確定呼び出し性 (の一般化) を含意するという事実である。より正確には、次の補題が成り立つ。

**補題 3.7**  $X, Y$  を整合空間、 $F$  を  $X$  から  $Y$  への安定写像とし、 $a \sqsubset X$  とする。このとき次のことが成り立つ。 $y \in F(a)$  ならば、 $y \in F(a_0)$  を満たす  $a_0 \subseteq_{fin} a$  が存在する。またそのようなクリークの中には最小のものがただ一つ存在する。(このとき、 $(a_0, y)$  を  $F$  に関する最小データ (minimal data) と呼ぶ。)

**定義 3.8 (関数整合空間)**  $X = (|X|, \circ_X), Y = (|Y|, \circ_Y)$  を整合空間とするとき、 $X \Rightarrow Y = (|X \Rightarrow Y|, \circ_{X \Rightarrow Y})$  を次のように定義する。

- $|X \Rightarrow Y| = FClique(X) \times |Y|$ . ここで  $FClique(X)$  は  $X$  の有限クリークの集合である。
- $(a, x) \circ_{X \Rightarrow Y} (b, y) \iff$ 
  - (i)  $a \cup b \sqsubset X$  ならば  $x \circ_Y y$ .
  - (ii) さらに  $a \neq b$  ならば  $x \neq y$ .

すると  $\mathbf{Coh}(X, Y)$  と  $X \Rightarrow Y$  のクリークの集合は“自然に” (すなわち  $X$  と  $Y$  の具体的内容に依存しない形で) 一対一に対応することがわかる。

**命題 3.9**  $X, Y$  を整合空間とする。

1.  $F \in \mathbf{Coh}(X, Y)$  のとき、

$$Tr(F) = \{(a, y) \mid (a, y) \text{ は } F \text{ に関する最小データである}\}$$

は  $X \Rightarrow Y$  のクリークである。このクリークを  $F$  の痕跡 (trace) と呼ぶ。

2.  $c \sqsubset X \Rightarrow Y$  のとき、各  $a \sqsubset X$  に対して

$$\tilde{c}(a) = \{y \mid \text{ある } a_0 \subseteq_{fin} a \text{ について } (a_0, y) \in c\}$$

と定義すると、 $\tilde{c} \in \mathbf{Coh}(X, Y)$ .

$$3. \widetilde{Tr}(F) = F, Tr(\tilde{c}) = c$$

証明

1.  $Tr(F)$  がクリークであることを示すために、 $(a, x), (b, y) \in Tr(F)$  とする。すると  $x \in F(a), y \in F(b)$  が成り立つ。もしも  $a \cup b \sqsubset X$  ならば、 $F(a \cup b)$  は  $Y$  のクリークとなる。そして単調性により  $x, y \in F(a \cup b)$  なので  $x \circ_Y y$  が成り立つ。またさらに  $a \neq b$  ならば  $a \cap b \subsetneq a, b$  であり、安定性により  $F(a \cap b) = F(a) \cap F(b)$  である。ゆえに仮に  $x = y$  とすると  $x \in F(a \cap b)$  となり、 $(a, x)$  が最小データであることに反する。

2. まず  $\tilde{c}(a)$  が  $Y$  のクリークとなることを示すために、 $x, y \in \tilde{c}(a)$  とする。するとある  $a_0, a_1 \subseteq_{fin} a$  について  $(a_0, x), (a_1, y) \in c$  である。明らかに  $a_0 \cup a_1 \sqsubset X$  であるから、 $x \circ_Y y$  が成り立つ。

次に  $\tilde{c}$  の連続性を示すために  $a = \bigcup_{i \in I}^\dagger b_i$  とする。 $\tilde{c}$  が単調性を満たすことは定義から明らかなので、 $\bigcup_{i \in I} \tilde{c}(b_i) \subseteq \tilde{c}(a)$  がいえる。逆に  $x \in \tilde{c}(a)$  とすると、ある有限の  $a_0 \subseteq_{fin} a$  について  $(a_0, x) \in c$  である。 $\{b_i\}_{i \in I}$  の有向性からある  $j \in I$  について  $a_0 \subseteq b_j$ 。よって  $x \in \tilde{c}(b_j)$  であるからこれで  $x \in \bigcup_{i \in I} \tilde{c}(b_i)$  が言えた。

最後に  $\tilde{c}$  の安定性を示すために、 $a \cup b \sqsubset X$  とする。 $\tilde{c}(a \cap b) \subseteq \tilde{c}(a) \cap \tilde{c}(b)$  は明らかなので、逆を示す。いま  $x \in \tilde{c}(a) \cap \tilde{c}(b)$  とすると、ある  $a_0 \subseteq_{fin} a, b_0 \subseteq_{fin} b$  について  $(a_0, x) \in c, (b_0, x) \in c$  である。 $a_0 \cup b_0 \sqsubset X$  なので、 $X \Rightarrow Y$  の定義から  $a_0 = b_0$  でなければならない。つまり  $a_0 \subseteq_{fin} a \cap b$  について  $(a_0, x) \in c$  が成り立つことになる。ゆえに  $x \in \tilde{c}(a \cap b)$ 。

3. まず  $x \in F(a)$  とすると、補題 3.7 により  $a_0 \subseteq_{fin} a$  かつ  $x \in F(a_0)$  を満たす最小の  $a_0$  が存在する。そのような  $a_0$  について  $(a_0, x) \in Tr(F)$ 。よって  $x \in \widetilde{Tr}(F)$ 。逆方向  $x \in \widetilde{Tr}(F) \implies x \in F(a)$  も容易に示すことができる。

次に  $(a, x) \in Tr(\tilde{c})$  とすると、 $a$  は  $x \in \tilde{c}(a)$  を満たす最小のクリークである。ゆえに  $(a, x) \in c$ 。逆方向も同様である。

■

上の一対一対応は“自然”であるので、随伴性 (adjunction)

$$\text{Coh}(X \& Z, Y) \cong \text{Coh}(Z, X \Rightarrow Y)$$

へと自然に拡張することができる。すなわち整合空間と安定写像全体からなる圏 (category) は含意について“閉じて”いるのである。

### 3.4 整合空間上での証明解釈

前節で導入した整合空間と安定写像は、直観主義論理の証明に BHK 風の解釈を与えるのに用いることができる。

1. 原子論理式  $\alpha$  に対して何らかの整合空間  $\alpha^*$  を割り当てる。含意式  $A \Rightarrow B$  については、 $(A \Rightarrow B)^* = A^* \Rightarrow B^*$  と解釈する。
2.  $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$  のとき、 $\Gamma \vdash B$  の証明  $\pi$  に対して安定関数  $\pi^* \in \text{Coh}(A_1^* \& \dots \& A_n^*, B^*)$  を次のように割り当てる。

(a)  $\pi$  が

$$\frac{A_i \in \Gamma}{\Gamma \vdash A_i}$$

の形有的时候には、各  $a_1 \sqsubset A_1^*, \dots, a_n \sqsubset A_n^*$  について

$$\pi^*(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = a_i$$

(b)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_0 \\ A, \Gamma \vdash B \end{array}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

の形有的时候には、

$$\pi^*(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \text{Tr}(\lambda x. \pi_0^*(\langle x, a_1, \dots, a_n \rangle))$$

この  $\pi^*$  が確かに  $\text{Coh}(A_1^* \& \dots \& A_n^*, A^* \Rightarrow B^*)$  に属することは、前節最後の随伴性により保証されている。

(c)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \quad \quad \quad \vdots \pi_2 \\ \Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A \end{array}}{\Gamma \vdash B}$$

の形有的时候には、

$$\pi^*(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = \pi_1^*(\widetilde{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}) (\pi_2^*(\langle a_1, \dots, a_n \rangle))$$

上の解釈は BHK 解釈とは細部においてやや異なるが、これを 2.2 節のフォーマットに従って書き直すことは単に事務的な作業にすぎない。重要なのは複雑な論理式  $A$  に対する解釈  $A^*$  が途方もなく大きくなったりはしないということである。実際、 $A^*, B^*$  の濃度が可算ならば  $(A \Rightarrow B)^*$  の濃度も可算である。

## 4 Est, est, est! — 線形性の発見

### 4.1 線形写像

安定関数  $F$  をクリーク  $a$  に適用するとクリーク  $F(a)$  が得られる。そしてこのとき引数部  $a$  については連続性が成り立つ。すなわち  $a$  を有向和と見なしたとき、その有向和は関数適用によって

保存される。このことは定義の通りである。一方、前章で見たとおり、整合空間においては関数部  $F$  もクリークと見なすことができる。すると自然な疑問は、この関数部  $F$  についても連続性は成り立つのだろうかというものであろう。実をいうと関数部については連続性よりもずっと強い性質、ある種の線形性が成り立つのである。

いま、二つのクリーク  $a, b \sqsubset A$  が共通部分を持たず、なおかつ  $a \cup b \sqsubset A$  のとき  $a \cup b$  のことを  $a + b$  と書くことにする。同様に、二つの安定関数  $F, G \in \mathbf{Coh}(A, B)$  について両者の定義域が共通部分を持たず、なおかつ  $F \cup G \in \mathbf{Coh}(A, B)$  のとき  $F \cup G$  のことを  $F + G$  と書くことにする。このとき、次のことが成り立つ。

#### 命題 4.1

1. 任意の  $a \sqsubset A$  について、

$$(F + G)(a) = F(a) + G(a)$$

が成り立つ。

2. 評価関数  $EV : (A \Rightarrow B) \& A \rightarrow B$

$$EV(f, a) = \tilde{f}(a)$$

は第一引数に関して“線形”である：

$$EV(f + g, a) = EV(f, a) + EV(g, a)$$

(しかし第二引数についてはこのことは必ずしも成り立たない。)

上の命題に見られる関数部と引数部の非対称性は、実を言うと直観主義論理のシークエント計算において、シークエントの左右が対称でないことと密接なかかわりがある。しかしいったん直観主義論理との関係を忘れてしまえば、関数部と引数部が対称的な、すなわち引数部についても線形性が成り立つような関数を考えることができる。

**定義 4.2 (線形写像)** 整合空間  $X$  から  $Y$  への線形写像 (linear map)  $F$  とは  $|X|$  から  $|Y|$  への関数で次の性質を満たすもののことである：

1.  $a \sqsubset X \implies F(a) \sqsubset Y$
2.  $a = \sum_{i \in I} b_i \sqsubset X \implies F(a) = \sum_{i \in I} F(b_i)$

ここで  $\sum_{i \in I} b_i$  は互いに共通部分を持たないクリーク族  $\{b_i\}_{i \in I}$  の直和を表す。

$X$  から  $Y$  への線形写像全体の集合を  $\mathbf{Lin}(X, Y)$  と書いて表す。

ここで“線形”性という用語はもちろん線形代数における線形性に由来する。しかし整合空間においてはスカラーが定義されていないので、ここでの線形性は単に直和の保存というだけにとどまっている。もちろん整合空間にスカラーを加えることは、やろうと思えばできるのだが、問題はそうすることにどんな意義があるのかである。(実をいうとある種の仕方で“スカラー”を入れる

と、それは証明の正規化の複雑さと密接な関わりが出てくるのであるが、ここでは深く立ち入らないことにする。)

念のため次のことを確認しておこう。

命題 4.3 線形写像は常に安定写像である。

証明  $F$  を  $X$  から  $Y$  への線形写像とする。まずは  $F$  が連続性を満たすことを見るために  $a = \bigcup_{i \in I}^{\uparrow} b_i$  を  $X$  のクリークとする。  $a$  は  $\sum \{\{x\} | x \in a\}$  という風に単元集合の直和の形に書けるので、線形性により  $F(a) = \sum_{x \in a} F(\{x\})$  が成り立つ。同様にして各  $b_i$  ( $i \in I$ ) も  $\sum \{\{x\} | x \in b_i\}$  と書け、  $F(b_i) = \sum_{x \in b_i} F(\{x\})$  が成り立つ。これらのことから  $F(a) = \bigcup_{i \in I} F(b_i)$  を導くのは容易である。

次に  $F$  が安定性を満たすことをみるために、  $a \cup b \sqsubset X$  とする。このとき、  $a \cup b$  は互いに共通部分を含まない3つの部分  $a', a \cap b, b'$  に分割できるので、線形性により

$$\begin{aligned} F(a) &= F(a') + F(a \cap b) \\ F(b) &= F(a \cap b) + F(b') \\ F(a \cup b) &= F(a') + F(a \cap b) + F(b'). \end{aligned}$$

最後の等式は  $F(a')$  と  $F(b')$  が共通部分を持たないことを示している。よって前2つの等式により  $F(a) \cap F(b) = F(a \cap b)$  であることがわかる。 ■

## 4.2 線形性と単一呼び出し性

こうして線形性という数学的性質が得られたわけであるが、これは3章で議論したようなプログラム実行の観点からすると、一体どんな操作的性質に対応するのだろうか？結論から言えばそれは次の単一呼び出し性に対応するのである。

サブルーチン  $f: N \rightarrow N$ 、自然数  $m$  が与えられたとき、ある種のプログラム  $M$  はその実行過程においてサブルーチンをただ一度しか呼び出さない。評価関数

$$EV(f, m) = f(m)$$

がまさにそのようなプログラムの典型例である。一方、そのようでないプログラムの典型例は3.1節で考えた反復演算である。

サブルーチン  $f$  をただ一度しか呼び出さないということは、別の言い方をすればこと  $EV(f, m)$  を計算する限りにおいては、  $f$  はただ一つの値について定義されていれば十分だということである。この性質を任意の部分関数  $F: [N \rightarrow N] \times N \rightarrow N$  について述べ直しておく。

単一呼び出し性 (unique call property):  $F(f, m) = n$  ならば、ある  $(k, l) \in f$  について  $F(\{(k, l)\}, m) = n$  となる。しかもそのような  $(k, l) \in f$  は各  $m$  に対してただ一つに定まる。



定理 4.4 部分関数  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が単調性・単一呼び出し性を持つための必要十分条件は、 $\hat{F}: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$  が ( $[\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$  を整合空間と見なしたときに) 線形性を持つことである。

証明 必要性を示すために  $F: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が単調性・単一性を持つものとし、部分関数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が直和  $f = \sum_{i \in I} g_i$  の形に表せるものとする。 $\hat{F}(f) = \bigcup_{i \in I} \hat{F}(g_i)$  となることは定理 3.1 の場合と同様に示すことができるのでここでは右辺が実際には共通部分を含まない集合族の直和になっていることを示す。 $i, j \in I$  について  $(m, n) \in \hat{F}(g_i)$  かつ  $(m, n) \in \hat{F}(g_j)$  とする。すると  $F(g_i, m) = n, F(g_j, m) = n$  であり、また  $F(f, m) = n$  であることもわかる。単一呼び出し性により  $F(\{(k, l)\}, m) = n$  となる  $(k, l) \in f$  がただ一つに定まる。このような  $(k, l)$  はただ一つの  $g_k$  ( $k \in I$ ) にのみ属し、その他の  $g'_k$  については  $F(g'_k, m) = n$  とならないことは明らかである。ゆえに  $g_i = g_j$  でなければならない。ゆえに上式右辺は確かに直和になっていることがわかる。

次に十分性を示すために  $\hat{F}: [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \rightarrow [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]$  が線形性を持つものとする。 $F(f, m) = n$  とすると  $(m, n) \in \hat{F}(f)$  であるが、部分関数  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  は単元集合の直和  $\sum \{\{(k, l)\} \mid (k, l) \in f\}$  の形に書けるので、ただ一つの  $(k, l) \in f$  について  $(m, n) \in \hat{F}(\{(k, l)\})$  となることがわかる。ゆえに単一呼び出し性が帰結する。 ■

単一呼び出し性は、サブルーチンを二回以上呼び出すプログラムについては一般には成り立たない。話を先取りして言えば、線形論理の「仮定 (または入力) をちょうど一回使う」という性質はまさにこの単一呼び出し性から来ているのである。

### 4.3 線形写像と整合空間

3.3 節で示したように、 $A$  から  $B$  への安定写像の全体  $\mathbf{Coh}(A, B)$  はそれと“自然に”同型な整合空間  $A \Rightarrow B$  により表現することができる。同様にして、 $A$  から  $B$  への線形写像の全体  $\mathbf{Lin}(A, B)$  に対しても、それと“自然に”同型な整合空間を与えることができる。

定義 4.5 (線形関数整合空間)  $X = (|X|, \circ_X), Y = (|Y|, \circ_Y)$  を整合空間とするとき、 $X \rightarrow Y = (|X \rightarrow Y|, \circ_{X \rightarrow Y})$  を次のように定義する。

- $|X \rightarrow Y| = |X| \times |Y|$
- $(x_1, y_1) \circ_{X \rightarrow Y} (x_2, y_2) \iff$ 
  - (i)  $x_1 \circ_X x_2$  ならば  $y_1 \circ_Y y_2$ .
  - (ii) さらに  $x_1 \neq x_2$  ならば  $y_1 \neq y_2$ .

すると  $\mathbf{Lin}(X, Y)$  と  $X \rightarrow Y$  のクリーク集合は“自然に” ( $X$  と  $Y$  の具体的内容に依存しない形で) 一対一に対応することがわかる。

命題 4.6  $X, Y$  を整合空間とする。

1.  $F \in \text{Lin}(X, Y)$  のとき、

$$\text{Tr}(F) = \{(x, y) | y \in F(\{x\})\}$$

は  $X \rightarrow Y$  のクリークである。

2.  $c \subset X \rightarrow Y$  のとき、各  $a \subset X$  に対して

$$\tilde{c}(a) = \{y | \text{ある } x \in a \text{ について } (x, y) \in c\}$$

と定義すると、 $\tilde{c} \in \text{Coh}(X, Y)$ .

3.  $\widetilde{\text{Tr}(F)} = F, \text{Tr}(\tilde{c}) = c$ .

証明は命題 3.9 とほぼ同様なので、ここでは省略する。

$\text{Coh}(X, Y)$  と  $X \Rightarrow Y$  の同型性が随伴性  $\text{Coh}(X \& Z, Y) \cong \text{Coh}(Z, X \Rightarrow Y)$  へと拡張することができたように、 $\text{Lin}(X, Y)$  と  $X \rightarrow Y$  の間の同型性も随伴性へと拡張することができる。その際  $\rightarrow$  と随伴関係に立つのは、次に定義するテンソル積である。

定義 4.7 (テンソル積)  $X, Y$  が整合空間のとき、テンソル積 (tensor product)  $X \otimes Y = (|X \otimes Y|, \circ_{X \otimes Y})$  を次のように定義する。

- $|X \otimes Y| = |X| \times |Y|$ .
- $(x_1, y_1) \circ_{X \otimes Y} (x_2, y_2) \iff x_1 \circ_X x_2 \text{ かつ } y_1 \circ_Y y_2$

すると次の随伴性が得られる：

$$\text{Lin}(X \otimes Z, Y) \cong \text{Lin}(Z, X \rightarrow Y)$$

$\rightarrow$  と随伴関係にある  $\otimes$  をテンソル積と呼ぶのは、もちろん線形代数とのアナロジーによるものである。他にも  $X \otimes Y$  は線形代数のテンソル積と類比的な性質を満たす。

#### 4.4 安定写像の線形分解

安定写像の整合空間  $X \Rightarrow Y$  と線形写像の整合空間  $X \rightarrow Y$  の定義を見比べてみると、両者は非常に似通っていることがわかる。実際、 $X \Rightarrow Y$  は  $X \rightarrow Y$  に“指数関数的な”操作を組み込むことによって復元することが可能なのである。

定義 4.8 (指数関数的整合空間) 整合空間  $X = (|X|, \circ_X)$  が与えられたときに、 $!X = (|!X|, \circ_{!X})$  を次のように定義する。

- $!|X| = \text{FClique}(X)$  ( $X$  の有限クリークの集合)
- $a \circ_{!X} b \iff a \cup b \subset X$

すると定義より次のことは明らかである。

定理 4.9 (安定写像の線形分解)  $X \Rightarrow Y = !X \rightarrow Y$

かくて安定写像は指数関数的空間からの線形写像へと分解されるに至った。言い換えれば、直観主義論理の含意  $A \Rightarrow B$  は線形含意と指数関数演算子の組み合わせ  $A \multimap B$  へと分解されるに至ったのである。

#### 4.5 双対性の復活

整合空間は有限次元ベクトル空間と非常に似通った性質をもつ。特に重要なのは双対空間の存在である。ベクトル空間についていえば、体  $K$  上のベクトル空間  $X$  が与えられたときに、その双対空間  $X^*$  は  $X$  から  $K$  への線形写像の全体からなる。整合空間の場合にはスカラー体の概念が入っていないので、3.3 節で導入した単位整合空間  $\perp = (\{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\})$  を考え、任意の整合空間  $X$  に対して  $X \multimap \perp$  をその双対と考えるのである。

実際には、双対空間にはより直接的な構成法がある。そのための準備としていくつか記法を導入しておく。

整合空間  $X = (|X|, \circ)$  が与えられたとき、

$$\begin{aligned} x \frown y &\iff x \circ y \text{ かつ } x \neq y \\ x \times y &\iff x \circ y \text{ でないかまたは } x = y \end{aligned}$$

と定義する。 $x \circ y \iff x \frown y$  または  $x = y$  であるから、整合空間の定義は  $\circ$  のかわりに  $\frown$  を用いても与えることができる。また、 $\circ$  の代わりに  $\times$  を用いてもよい。 $x \times y \iff \neg(x \frown y)$  であることに注意。

定義 4.10 (双対空間) 整合空間  $X = (|X|, \circ_X)$  が与えられたとき、その双対空間  $X^\perp$  を

$$X^\perp = (|X|, \times_X)$$

と定義する。

すると明らかに次のことが成り立つ。

命題 4.11  $X$  を整合空間とする。

1.  $(X^\perp)^\perp = X$
2.  $X^\perp \cong X \multimap \perp$

証明 1.  $x, y \in |X|$  のとき、

$$\begin{aligned} x \circ_{X^\perp} y &\iff x \times_X y \\ &\iff x \circ_X y \text{ でないかまたは } x = y \\ &\iff x \times_X y \text{ でないかまたは } x = y \\ &\iff x \frown_X y \text{ または } x = y \\ &\iff x \circ_X y. \end{aligned}$$

2.  $x \in |X^\perp| = |X|$  に対して  $(x, \bullet) \in |X \multimap \perp|$  を一対一に対応させることができる。  $x, y \in |X|$  とすると、

$$\begin{aligned} x \circ_{X^\perp} y &\iff x \times_X y \\ &\iff x \frown_X y \text{ でない} \\ &\iff (x, \bullet) \circ_{X \multimap \perp} (y, \bullet). \end{aligned}$$

■

ゆえに整合空間においては二重否定律が成り立つのである。

これまでに整合空間  $\top, \perp$  ならびに整合空間の構成法  $X \& Y, X \otimes Y, !X$  を導入した (定義 3.4, 4.7, 4.8) が、それぞれについてその双対  $0, 1, X \oplus Y, X \wp Y, ?X$  を考えることができる。

定義 4.12 整合空間  $X = (|X|, \circ_X), Y = (|Y|, \circ_Y)$  が与えられたとき、 $0, 1, X \oplus Y, X \wp Y, ?X$  を次のように定義する。

- $0 = (\emptyset, \emptyset)$
- $1 = (\{\bullet\}, \{(\bullet, \bullet)\})$
- $X \oplus Y = (|X| \uplus |Y|, \circ_{X \oplus Y})$ . ここで

$$\begin{aligned} (x, 1) \circ_{X \oplus Y} (x', 1) &\iff x \circ_X x' \\ (y, 2) \circ_{X \oplus Y} (y', 2) &\iff y \circ_Y y' \\ (x, 1) \circ_{X \oplus Y} (y, 2) &\text{ は常に成り立たない。} \end{aligned}$$

- $X \wp Y = (|X| \times |Y|, \circ_{X \wp Y})$ . ここで

$$(x_1, y_1) \frown_{X \wp Y} (x_2, y_2) \iff x_1 \frown_X x_2 \text{ または } y_1 \frown_Y y_2$$

- $?X = (|?X|, \circ_{?X})$  ここで  $|?X|$  は  $X$  の有限反クリーク (つまり  $X^\perp$  の有限クリーク) の集合であり、

$$a \frown_{?X} b \iff a \cup b \text{ は } X \text{ の反クリークではない。}$$

$X \wp Y$  は  $n$  項の場合  $Z = X_1 \wp \dots \wp X_n$  へと自然に拡張することができる。その際、 $|Z| = |X_1| \times \dots \times |X_n|$  であり、 $(x_1, \dots, x_n) \frown_Z (y_1, \dots, y_n)$  が成り立つのは、ある  $i$  について  $x_i \frown_{X_i} y_i$  が成り立つときに限る。

これまでに定義した構成法について、次のようにドモルガンの法則が成り立つ。

命題 4.13  $X, Y$  を整合空間とする。

1.  $\top^\perp = 0, \perp^\perp = 1$
2.  $(X \& Y)^\perp = X^\perp \oplus Y^\perp$
3.  $(X \otimes Y)^\perp = X^\perp \wp Y^\perp$
4.  $(!X)^\perp = ?X^\perp$

直積  $X \& Y$  の双対  $X \oplus Y$  は  $X$  と  $Y$  の直和に相当する。しかしテンソル積  $X \otimes Y$  の双対  $X \wp Y$  が何に対応するかは一見したところそれほど明らかではない。重要なのは次の同値性である。

命題 4.14  $X, Y$  を整合空間とすると、 $X \multimap Y = X^\perp \wp Y$ 。

証明  $(x_1, y_1) \frown_{X \multimap Y} (x_2, y_2)$  とする。つまり (i)  $(x_1, y_1) \circ_{X \multimap Y} (x_2, y_2)$  かつ (ii)  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  である。 $(x_1, y_1) \frown_{X^\perp \wp Y} (x_2, y_2)$  を示すために、 $x_1 \frown_{X^\perp} x_2$  が成り立たないと仮定する。これは  $x_1 \times_{X^\perp} x_2$  が成り立つこと、しいては  $x_1 \circ_X x_2$  が成り立つことを意味する。よって (i) により  $y_1 \circ_Y y_2$ 。ここで仮に  $y_1 = y_2$  であるとすると、再び (i) により  $x_1 = x_2$  となり (ii) に反する。ゆえに  $y_1 \frown_Y y_2$  が言えた。

$(x_1, y_1) \frown_{X^\perp \wp Y} (x_2, y_2) \implies (x_1, y_1) \frown_{X \multimap Y} (x_2, y_2)$  も同様に示すことができる。 ■

従って  $X \wp Y$  は  $X^\perp \multimap Y$  と  $Y^\perp \multimap X$  と書けることになる。ゆえに  $X \wp Y$  のクリークは  $X^\perp$  から  $Y$  への線形写像と同等であり、同時に  $Y^\perp$  から  $X$  への線形写像とも同等であることになる。いわば“双方向の”線形写像を表すと思えばよい。

整合空間においては  $\top = 0$ 、および  $1 = \perp$  が成り立つことに驚かれるかもしれない。これは非常に大雑把に言えば、整合空間においては「真=偽」が成り立つということである。ゆえに整合空間は論理的には“矛盾した”意味論なのだ。しかし次の章でみるように証明の解釈が一つにつぶれるということはない。すなわち整合空間は証明の解釈としては“無矛盾”なのであり、そのことさえ満たされていれば証明の表示意味論としては立派に通用するのである。

## 4.6 テンソル積と直積

線形写像は Contraction について閉じていない。なぜならば線形写像は「各サブルーチンをちょうど一回ずつ使う」ようなプログラムに相当すると考えてよいが、Contraction を使うとそのようなプログラムから「一つのサブルーチンを二回以上使う」プログラムが簡単に構成できてしまうからである。このことをもうすこし詳しくみてみよう。

いま線形写像  $F : [N \multimap N] \otimes [N \multimap N] \otimes N \multimap N$  が与えられたとして、ここから写像  $F' : [N \multimap N] \otimes N \multimap N$  を  $F'(f, m) = F(f, f, m)$  と定義する。するとこの  $F'$  はもはや線形ではない。実際、 $F'(f, m) = n$  とすると、 $F(f, f, m) = n$  となる。 $F$  は単一呼び出し性を満たすから、ある  $(k_1, l_1), (k_2, l_2) \in f$  が定まって  $F(\{(k_1, l_1)\}, \{(k_2, l_2)\}, m) = n$  とすることができる。しかしこのことから帰結するのは二元集合  $a = \{(k_1, l_1), (k_2, l_2)\}$  について  $F'(a, m) = n$  が成り立つということだけであり、これはせいぜい  $F'$  が安定写像であるということを示しているに過ぎない。

また、線形写像は Weakening についても閉じていない。なぜならば Weakening を使うと「一度も使われないサブルーチンを含む」ようなプログラムが構成できてしまうからである。実際、線形写像  $F : N \multimap N$  が与えられたとして、写像  $F' : [N \multimap N] \otimes N \multimap N$  を  $F'(f, m) = F(m)$  と定義する。するとこの  $F'$  はもはや線形ではない。なぜならば、 $F'(f, m) = n$  とするとどんな  $g$  につ

いても  $F'(g, m) = n$  となり、とくに空集合  $\emptyset$  をとつても  $F'(\emptyset, m) = n$  が成り立つ。このとき単一呼び出し性が満たされないことは明らかであろう。

Contraction と Weakening について閉じていないということは論理的に言えばテンソル積に関して

$$X \multimap X \otimes X, \quad X \multimap 1$$

という原理が成り立たないということである。一方で直積については

$$X \multimap X \& X, \quad X \multimap \top$$

が成り立つ。(1 と  $\top$  はそれぞれ  $\otimes$  と  $\&$  についての単位空間である。) しかしこのことは決して「サブルーチンを二回以上使えるような」線形写像を構成できるということではない。このことを見るために、先ほどと類比的に線形写像  $F : ([\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \& [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}]) \otimes \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  が与えられたとして、そこから写像  $F' : [\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}] \otimes \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  を  $F'(\langle f, f \rangle, m) = F(\langle f, f \rangle, m)$  と定義する。この場合  $F'$  は確かに線形写像となる。しかしここには何の不思議もない。いま、 $F(\langle f, g \rangle, m) = n$  とすると、単一呼び出し性により  $F(\langle v \rangle, m) = n$  となるような  $v \in \langle f, g \rangle$  が一つ定まるが、そのような  $v$  は  $(v_1, 1)$  ( $v_1 \in f$ ) の形であるか  $(v_2, 2)$  ( $v_2 \in g$ ) の形であるかのどちらかである。いわば  $F$  は最初から「サブルーチンの対  $\langle f, g \rangle$  が与えられたときに、(入力  $m$  に依存して) どちらか一方のみを使う」ようなプログラムなのである。このような  $F$  から始めて  $F'$  を構成したとしても、それは決して「サブルーチンを二回使う」ようなプログラムとはならないのである。

さてこのようにテンソル積と直積の間には大きな差があるのだが、両者の差は“指数関数上では”無化されるのである。

命題 4.15 (指数関数的同型性)  $!X \otimes !Y \cong !(X \& Y), \quad 1 \cong !\top$

証明  $(a, b) \in !|X \otimes !Y|$  が与えられたとき、 $(a \sqsubset X, b \sqsubset Y)$  であるから  $\langle a, b \rangle \in !|(X \& Y)|$  を対応させることができる。逆に  $c \in !|(X \& Y)|$  が与えられたとき、 $(c \sqsubset X \& Y)$  であるから  $(p_1(c), p_2(c)) \in !|X \otimes !Y|$  を対応させることができる。この二つの写像が互いに逆になっていることは、命題 3.5 から明らかである。

さて、 $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in !|X \otimes !Y|$  とすると、

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \circ_{!X \otimes !Y} (a_2, b_2) &\iff a_1 \circ_{!X} a_2 \text{ かつ } b_1 \circ_{!Y} b_2 \\ &\iff a_1 \cup a_2 \sqsubset X \text{ かつ } b_1 \cup b_2 \sqsubset Y \\ &\iff \langle a_1 \cup a_2, b_1 \cup b_2 \rangle \sqsubset X \& Y \\ &\iff \langle a_1, b_1 \rangle \cup \langle a_2, b_2 \rangle \sqsubset X \& Y \\ &\iff \langle a_1, b_1 \rangle \circ_{!(X \& Y)} \langle a_2, b_2 \rangle. \end{aligned}$$

$!X \otimes !Y \cong !(X \& Y)$  が言えた。  $1 \cong !\top$  は自明である。 ■

上の同型性は通常の指数関数法則  $2^x 2^y = 2^{x+y}$  の整合空間版に他ならない。この理由から、 $\otimes$  と  $\&$  はそれぞれ乗法的 (multiplicative) な演算子、加法的 (additive) な演算子と呼ばれる。そして両者を結びつける  $!$  は指数関数的 (exponential) な演算子と呼ばれる。

指数関数演算子のもとでは、Contraction と Weakening の原理

$$!X \multimap !X \otimes !X, \quad !X \multimap 1$$

が成り立つ。前者については  $a \in !X$  に対して  $Cont(a) = (a, a)$  となる線型写像  $Cont$  が存在し、後者については  $a \in !X$  に対して  $Weak(a) = \{\bullet\}$  となる線型写像  $Weak$  が存在する。 $(\bullet \in Weak(\{a\}))$  を満たす最小の  $a$  とは  $\emptyset \in !|X|$  のことに他ならない。

## 5 受肉 — 線形論理の誕生

### 5.1 線形論理の統語論

これまでに意味論的なレベル（いわば“精神的”なレベル）で展開してきた議論を、統語論という具体的なレベル（いわば“肉体的”なレベル）へと“受肉”させることにより線形論理の体系は完成する。

まず、線形論理の論理式を定義する。整合空間の構造を反映して連言・選言・真・偽は、それぞれ加法的なものや乗法的ものの二種類へと分裂することになる。また、一度分裂した加法的なものや乗法的なものを再び結び付けるために、指数関数的な様相演算子  $!$ （必然性）、 $?$ （可能性）が必要となる。

**定義 5.1 (線形論理の論理式)** 線形論理の命題論理式とは次のものである。

1. リテラル  $\alpha, \alpha^\perp, \beta, \beta^\perp, \dots$  は論理式である。
2.  $A, B$  が論理式ならば、次のものも論理式である。

- 加法的／乗法的結合子：

	連言	選言	真	偽
乗法的	$A \otimes B$	$A \wp B$	1	$\perp$
加法的	$A \& B$	$A \oplus B$	$\top$	0

- 指数関数的結合子： $!A, ?A$

原子論理式  $\alpha$  に対しては、その否定  $\alpha^\perp$  もリテラルであり、すなわち論理式である。より複雑な論理式に対しては、ドモルガンの法則を用いて否定を定義する。

定義 5.2 (論理式の否定, 線形含意) 論理式  $A$  の否定  $A^\perp$  を次のように定義する。

$$\begin{array}{ll}
 (\alpha)^\perp \equiv \alpha^\perp & (\alpha^\perp)^\perp \equiv \alpha \\
 (A \otimes B)^\perp \equiv A^\perp \wp B^\perp & (A \wp B)^\perp \equiv A^\perp \otimes B^\perp \\
 1^\perp \equiv \perp & \perp^\perp \equiv 1 \\
 (A \& B)^\perp \equiv A^\perp \oplus B^\perp & (A \oplus B)^\perp \equiv A^\perp \& B^\perp \\
 \top^\perp \equiv 0 & 0^\perp \equiv \top \\
 (!A)^\perp \equiv ?A^\perp & (?A)^\perp \equiv !A^\perp
 \end{array}$$

また、線形含意論理式を次のように定義する。

$$A \multimap B \equiv A^\perp \wp B, \quad A \circ\text{-}\circ B \equiv (A \multimap B) \& (B \multimap A)$$

線形論理の論理結合子には、加法・乗法・指数関数という三分法のほかに、もう一つの分類法がある。それは極性 (polarity) に基づく分類法である：

- 正の結合子 (positive) :  $\otimes, \oplus, 1, 0$
- 負の結合子 (negative) :  $\&, \wp, \top, \perp$

分配律などの代数法則は同じ極性をもつ論理結合子間で成り立つ。否定は極性をチェンジする。シーケント計算においては、負の結合子の導入規則は常に反転可能 (invertible) である。一方正の結合子の導入規則は焦点性 (focalization property) という反転可能性の反対の性質を満たす [4]。

ついでに言うと、線形論理では代数的な記号  $\otimes, \oplus, 1, 0$  と論理的な記号  $\&, \wp, \top, \perp$  を併用するが、これらは極性によって使い分けられているのである。他方で部分構造論理 (substructural logics, [33]) の分野では加法性・乗法性に従って記号を使い分けるので、両者を比較する際にはやや注意が必要である。

指数関数的結合子  $!, ?$  についても極性の概念を与えることはできるのであるが、デリケートな点が含まれるのでここでは説明を割愛する。

次に線形論理のシーケント計算を考える。線形論理には多くの論理結合子が含まれるので、左右両側を持つシーケントについて推論規則を導入すると、とんでもない数の推論規則が必要になる。かわりに

$$A_1, \dots, A_m \vdash B_1, \dots, B_n \quad \text{を} \quad \vdash A_1^\perp, \dots, A_m^\perp, B_1, \dots, B_n$$

と同一視して、右側にのみ論理式を含むようなシーケントを考える。つまり線形論理のシーケント (sequent) は、 $\vdash \Gamma$  の形である。ここで  $\Gamma$  は論理式の多重集合 (multiset, すなわち同一の要素を複数回含むことができるような集合) を表す。

線形論理の推論規則は表 1 の通りである。ただし  $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$  のとき、 $? \Gamma \equiv ?A_1, \dots, ?A_n$  とする。シーケント  $\vdash \Gamma$  をこれらの規則によって導出することができるとき、 $\vdash \Gamma$  は証明可能 (provable) であるという。

古典論理のシーケント計算  $LK$  との最大の違いは、Weakening, Contraction などの構造規則が使えるのは  $?A$  の形の論理式に限るという点である。



$\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Identity}$	$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, A^\perp}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{Cut}$		
$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B} \otimes$	$\frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \wp B} \wp$	$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, \perp} \perp$	$\frac{}{\vdash \mathbf{1}} \mathbf{1}$
$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \&$	$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus 1$	$\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \oplus B} \oplus 2$	$\frac{}{\vdash \Gamma, \top} \top$
$\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A} ?D$	$\frac{\vdash \Gamma, ?A, ?A}{\vdash \Gamma, ?A} ?C$	$\frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, ?A} ?W$	$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A} !$

図1 線形論理の推論規則

## 5.2 線形論理の基本的性質

線形論理において成り立つ基本的な代数的性質をまとめておく。

- 交換律:  $A \otimes B \circ \circ B \otimes A$ ,  $A \oplus B \circ \circ B \oplus A$ .
- 結合律:  $(A \otimes B) \otimes C \circ \circ A \otimes (B \otimes C)$ ,  $(A \oplus B) \oplus C \circ \circ A \oplus (B \oplus C)$ .
- 単位元:  $\mathbf{1} \otimes A \circ \circ A$ ,  $\mathbf{0} \oplus A \circ \circ A$ .
- 分配律:  $A \otimes (B \oplus C) \circ \circ (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ ,  $A \otimes \mathbf{0} \circ \circ \mathbf{0}$ .
- 随伴性:  $(A \otimes B \multimap C) \circ \circ (A \multimap (B \multimap C))$ .
- 指数関数的同型性:  $!A \otimes !B \circ \circ !(A \& B)$ ,  $\mathbf{1} \circ \circ !\top$ .

これらはすべて線形論理のシーケント計算において証明可能である。たとえば指数関数的同型性の証明は次のようになる。

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{\vdash A^\perp, A}}{\vdash ?A^\perp, A}}{\vdash ?A^\perp, ?B^\perp, A} \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash B^\perp, B}}{\vdash ?B^\perp, B}}{\vdash ?A^\perp, ?B^\perp, B}}{\vdash ?A^\perp, ?B^\perp, A \& B} \\
 \frac{\vdash ?A^\perp, ?B^\perp, A \& B}{\vdash ?A^\perp, ?B^\perp, !(A \& B)} \\
 \frac{\vdash ?A^\perp \wp ?B^\perp, !(A \& B)}{\vdash (?A^\perp \wp ?B^\perp) \wp !(A \& B)} \\
 \hline
 \vdash !A \otimes !B \circ \circ !(A \& B)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{}{\vdash A^\perp, A}}{\vdash A^\perp \oplus B^\perp, A}}{\vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), A} \quad \frac{\frac{\frac{}{\vdash B^\perp, B}}{\vdash A^\perp \oplus B^\perp, B}}{\vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), B}}{\vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), !A} \\
 \frac{\vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), !A \quad \vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), !B}{\vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), !(A \otimes B)} \\
 \frac{\vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp), !(A \otimes B)}{\vdash (?A^\perp \oplus B^\perp) \wp !(A \otimes B)} \\
 \hline
 \vdash ?(A^\perp \oplus B^\perp) \wp !(A \otimes B)
 \end{array}$$

上では主に正の結合子について成立する法則を述べた。負の結合子に関する同様の法則は次の双対原理により得ることができる。

$A$  を線形含意記号  $\multimap$  を含まない論理式とする。 $A$  に対して

$$\begin{array}{ll} \otimes \Leftrightarrow \wp & \mathbf{1} \Leftrightarrow \perp \\ \& \Leftrightarrow \oplus & \top \Leftrightarrow \mathbf{0} \\ ! \Leftrightarrow ? & \end{array}$$

という交換操作を行って得られる論理式を  $A^d$  とする。

### 定理 5.3 (双対原理)

$$A \multimap B \text{ が証明可能} \iff B^d \multimap A^d \text{ が証明可能}$$

が成り立つ。

かくて一度失われた双対性が、線形論理において見事に復活を果たしたのである。もちろんそこには代償がある。それは連言や選言などの結合子が乗法的なものに加法的なものに分裂してしまったこと、指数関数的な様相演算子が必要なこと、さらには Contraction や Weakening などの構造規則は  $?A$  の形の論理式にしか適用できないこと、などなどである。

## 5.3 整合空間上での証明解釈

線形論理シーケント計算の推論規則は、整合空間の構造を反映するように導入されたものである。ゆえに当然のことながら、線形論理の証明は整合空間上で解釈することができる。以下では、列  $x_1, \dots, x_n$  を  $\bar{x}$  のように表す。

1. 原子論理式  $\alpha$  に対して何らかの整合空間  $\alpha^*$  を割り当てる。写像  $(\cdot)^*$  はその他の論理式へと自然に拡張できる。例えば  $(\alpha^\perp)^* = (\alpha^*)^\perp$ ,  $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$  である。また、 $\Gamma \equiv A_1, \dots, A_n$  のとき

$$\Gamma^* \equiv A_1^* \wp \dots \wp A_n^*$$

とする。

2.  $\vdash \Gamma$  の証明  $\pi$  に対して、クリーク  $\pi^* \sqsubset \Gamma^*$  を次のように割り当てる。

(a)  $\pi$  が

$$\frac{}{\vdash A, A^\perp} \text{Identity}$$

の形的时候には、 $\pi^* = \{(x, x) \mid x \in |A|^*\}$ 。

(b)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdash \Gamma, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \pi_2 \\ \vdash \Delta, A^\perp \end{array}}{\vdash \Gamma, \Delta} \text{Cut}$$

の形的时候には、 $\pi^* = \{(\bar{z}, \bar{w}) \mid \text{ある } x \in |A| \text{ について } (\bar{z}, x) \in \pi_1^*, (\bar{w}, x) \in \pi_2^*\}$ 。

(c)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdots \pi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2} \quad \frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2} \otimes$$

の形のときには、 $\pi^* = \{(\bar{z}, \bar{w}, (x, y)) \mid (\bar{z}, x) \in \pi_1^*, (\bar{w}, y) \in \pi_2^*\}$ .

(d)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\vdots \pi_1} \quad \frac{\vdots \pi_2}{\vdots \pi_2}}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2} \wp$$

の形のときには、 $\pi^* = \{(\bar{z}, (x, y)) \mid (\bar{z}, x, y) \in \pi_1^*\}$ .

(e)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\vdots \pi_1}}{\vdots \pi_1} \perp$$

の形のときには、 $\pi^* = \{(\bar{z}, \bullet) \mid (\bar{z}) \in \pi_1^*\}$ .

(f)  $\pi$  が

$$\overline{\vdots \pi_1} \quad 1$$

の形のときには、 $\pi^* = \{\bullet\}$ .

(g)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdots \pi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2} \quad \frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}}{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2} \&$$

の形のときには、 $\pi^* = \{(\bar{z}, (x, 1)) \mid (\bar{z}, x) \in \pi_1^*\} \cup \{(\bar{z}, (y, 2)) \mid (\bar{z}, y) \in \pi_2^*\}$ .

(h)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\vdots \pi_1}}{\vdots \pi_1} \oplus 1$$

の形のときには、 $\pi^* = \{(\bar{z}, (x, 1)) \mid (\bar{z}, x) \in \pi_1^*\}$ .

(i)  $\pi$  が

$$\overline{\vdots \pi_1} \quad \top$$

の形のときには、 $\pi^* = \emptyset$ .

(j)  $\pi$  が

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \pi_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \frac{\vdots \pi_1}{\vdots \pi_1}}{\vdots \pi_1} \quad ?D$$

の形のときには、 $\pi^* = \{(\bar{z}, \{x\}) \mid (\bar{z}, x) \in \pi_1^*\}$ .

(j)  $\pi$  が

$$\frac{\vdots \pi_1}{\vdash \Gamma, ?A, ?A} ?C$$

の形的时候には、 $\pi^* = \{(\bar{z}, a \cup b) \mid (\bar{z}, a, b) \in \pi_1^*\}$ .(k)  $\pi$  が

$$\frac{\vdots \pi_1}{\vdash \Gamma} ?W$$

の形的时候には、 $\pi^* = \{(\bar{z}, \emptyset) \mid (\bar{z}) \in \pi_1^*\}$ .(l)  $\pi$  が

$$\frac{\vdots \pi_1}{\vdash ?\Gamma, A} !$$

の形的时候には、 $c \in \pi^* \iff$  ある  $m \geq 0$ , ある  $(a_1^1, \dots, a_n^1, x^1), \dots, (a_1^m, \dots, a_n^m, x^m) \in \pi_1$  について

$$c = (\bigcup_j a_j^1, \dots, \bigcup_j a_j^m, \{x_1, \dots, x_m\}).$$

定理 5.4  $\pi$  が  $\vdash \Gamma$  の証明ならば、 $\pi^*$  は  $\Gamma^*$  のクリークである。

ではこの逆は成り立つのか、というのが気になるところであろう。すなわち  $\Gamma^*$  のどのクリークも何らかの証明を表すといえるのだろうか？答えは明らかにノーである。実際、空集合は  $\Gamma^*$  の自明なクリークであるが、( $\Gamma$  に  $\top$  が含まれていない限り) これは証明の解釈にはならない。また、極大なクリーク (すなわち  $a \subseteq b$  かつ  $b \sqsubset \Gamma^*$  となるような  $b$  が存在しないようなクリーク  $a$ ) に限ったとしても、 $\Gamma^*$  には証明の解釈とならないようなクリークが多々含まれる。この問題はいわゆる充満完全性 (full completeness) の問題 (論理的証明をちょうどびつたり特徴付ける表示の意味論を与える問題) の特殊例である。この問題の解決のためには整合空間ではあまりにも素朴すぎ、より洗練された道具立てが必要となる。

## 5.4 線形論理におけるカット除去

古典論理や直観主義論理同様、線形論理についてもカット除去定理が成り立つ。

定理 5.5 (カット除去) シークエント  $\vdash \Gamma$  が証明可能ならば、 $\vdash \Gamma$  はカット規則を用いずに証明可能である。

ここでは厳密な証明を与えることはしない。ただしカット除去が“局所的に”うまくいくこと、すなわちどんなカットも何らかの意味でより単純なカットへと書き換えられることだけは見ておくことにしよう。

(a) 始式とのカット

$$\frac{\frac{\vdots \rho}{\vdash A^\perp, A} \quad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash A^\perp, \Delta} \rightarrow \frac{\vdots \rho}{\vdash A^\perp, \Delta}$$

(b) 論理規則の主論理式同士のカット

$$\frac{\frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdash \Gamma_1, A} \quad \frac{\vdots \rho}{\vdash \Gamma_2, B} \quad \vdash A^\perp, B^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, A \otimes B} \quad \vdash A^\perp \wp B^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta} \rightarrow \frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdash \Gamma_1, A} \quad \frac{\vdots \rho}{\vdash \Gamma_2, B} \quad \vdash A^\perp, B^\perp, \Delta}{\vdash A^\perp, \Gamma_2, \Delta}}{\vdash \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta}$$

$$\frac{\frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \pi_2}{\vdash \Gamma, A} \quad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \& B} \quad \frac{\vdots \rho}{\vdash A^\perp, \Delta}}{\vdash \Gamma, \Delta} \rightarrow \frac{\vdots \pi_1 \quad \vdots \rho}{\vdash \Gamma_1, A} \quad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

$$\frac{\frac{\vdots \rho}{\vdash \Delta}}{\vdash \Delta} \rightarrow \frac{\vdots \rho}{\vdash \Delta}$$

$$\frac{\frac{\vdots \pi}{\vdash ?\Gamma, A} \quad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash ?\Gamma, !A} \quad \vdash ?A^\perp, \Delta}{\vdash ?\Gamma, \Delta} \rightarrow \frac{\vdots \pi \quad \vdots \rho}{\vdash ?\Gamma, A} \quad \vdash A^\perp, \Delta}{\vdash ?\Gamma, \Delta}$$

(c) !規則の主論理式と構造規則の間のカット

$$\frac{\frac{\vdots \pi}{\vdash ?\Gamma, !A} \quad \frac{\vdots \rho}{\vdash ?A^\perp, ?A^\perp, \Delta}}{\vdash ?\Gamma, \Delta} \rightarrow \frac{\frac{\vdots \pi}{\vdash ?\Gamma, !A} \quad \frac{\vdots \rho}{\vdash ?A^\perp, ?A^\perp, \Delta}}{\vdash ?\Gamma, ?\Gamma, \Delta}}{\vdash ?\Gamma, \Delta}$$

$$\frac{\frac{\vdots \pi}{\vdash ?\Gamma, !A} \quad \frac{\vdots \rho}{\vdash \Delta}}{\vdash ?\Gamma, \Delta} \rightarrow \frac{\vdots \rho}{\vdash \Delta}$$

(d) 主論理式でない論理式に関するカット (省略)

上記のような局所的な書き換え (あるいはそのヴァリエーション) を続けていくことにより、原理上はどんな証明もカットを含まないものへと書き換えることができる。この性質は一階の量子子

や二階、さらには高階の量子化子を含む体系においても保たれる。カット除去定理の統語論的な証明については例えば [39] を、意味論的な証明については [29] を参照。

重要なのは、整合空間上での証明解釈は上のカット除去手続きによって不変に保たれるという点である。

定理 5.6 証明  $\pi_1$  が上記の書き換え規則により  $\pi_2$  へと書き換えられるならば、 $\pi_1^* = \pi_2^*$ 。

## 5.5 エルブランの定理と存在特性

古典論理と直観主義論理を対比するために、2.4 節においてエルブランの定理と存在特性に言及した。では線形論理ではどちらが成り立つのかというと、ある意味で両方が成り立つのである。そしてどちらが成り立つのかは、古典か直観主義かといった論理の違いによってではなく、指数関数結合子のありなしにより決まってくる。

まずは線形論理に一階の量子化子を導入する。

定義 5.7 (一階述語線形論理) 一階の項を古典論理の場合と同様に定義し  $t_1, t_2, \dots$  により表す。論理式の定義は命題線形論理の場合と同様である。ただし、

- $p$  が  $n$  項述語記号のとき、 $p(t_1, \dots, t_n)$  と  $p^\perp(t_1, \dots, t_n)$  はリテラルである。
- $A(x)$  が論理式ならば  $\forall x.A(x)$ ,  $\exists x.A(x)$  も論理式である。

量化表現の否定を次のように定義する：

$$(\forall x.A(x))^\perp \equiv \exists x.A^\perp(x) \quad (\exists x.A(x))^\perp \equiv \forall x.A^\perp(x)$$

量子化子に対する推論規則は次のとおりである：

$$\frac{\vdash \Gamma, A(x)}{\vdash \Gamma, \forall x.A(x)} \forall \quad \frac{\vdash \Gamma, A(t)}{\vdash \Gamma, \exists x.A(x)} \exists$$

ただし  $\forall$  規則において変項  $x$  は  $\Gamma$  の中には自由に現れないものとする。

定理 5.8 (存在特性)  $A(x)$  を述語線形論理の論理式とする。もしも  $\exists x A(x)$  が証明可能ならば、一つの項  $t$  が存在して  $A(t)$  が証明可能である。

証明  $\vdash \exists x A(x)$  が証明可能ならば、カット除去定理により、カットを含まない証明が存在する。Contraction や Weakening を ? のついていない論理式に対して使うことはできないので、そのような証明の最後に使われている規則は  $\exists$  規則しかありえない。ゆえにある  $t$  について  $\vdash A(t)$  が証明可能である。 ■

定理 5.9 (エルブランの定理)  $A(x)$  を全称量子化子を含まない述語線形論理の論理式とする。もしも  $\exists x A(x)$  が証明可能ならば、ある有限個の項  $t_1, \dots, t_n$  が存在して  $\?(A(t_1) \oplus \dots \oplus A(t_n))$  が証明可能である。

証明  $\vdash ?\exists x A(x)$  のカットを含まない証明  $\pi$  を考える。  $\pi$  の中では  $?\exists x A(x)$  の部分論理式しか用いられることはない。このとき、  $\pi$  の中に現れる各シーケント  $S$  について次のことが成り立つ。

- $S$  が  $\vdash ?\exists x \vec{A}(x), \exists x \vec{A}(x), \Gamma$  の形で  $\Gamma$  の中には  $?\exists x A(x)$  や  $\exists x A(x)$  の形の論理式は含まれないとする。このとき多重集合  $\Delta, \Pi$  が存在し、  $\vdash ?\Delta, \Pi, \Gamma$  が証明可能である。ただし、  $\Delta$  は  $A(t_1) \oplus \dots \oplus A(t_n)$  の形の論理式から成り、  $\Pi$  は  $A(t)$  の形の論理式からなるものとする。

$?A \wp ?B \circ \circ ?(A \oplus B)$  に注意すれば、このことは簡単な帰納法により証明できる。 ■

## 5.6 直観主義論理の解釈

線形論理は直観主義論理を一度分解し、組み立てなおすことにより得られた論理である。ゆえにこの新しい論理が確かに直観主義論理の拡張になっていること、すなわち後者が前者に埋め込めることを確認しておくのが筋であろう。

直観主義論理との対応を明確にするため、本節では、しばしばシーケント  $\vdash A_1, \dots, A_n$  を  $A_1^\perp, \dots, A_{n-1}^\perp \vdash A_n$  のように書くことにする。もちろん同じシーケントは  $A_2^\perp, \dots, A_n^\perp \vdash A_1$  のように書くこともできるので、書き方は一通りではない。この記法によれば、例えば  $\vdash ?(\alpha^\perp \wp \beta^\perp), \gamma$  は  $!(\alpha \otimes \beta) \vdash \gamma$  と書ける。

さて、まずは直観主義論理から線形論理への二つの変換法を与えよう。第一の変換法（ジラール変換）は4.4節で見た安定写像の線形分解を含意以外の論理結合子へと拡張することにより得られる。第二の変換法（ここではゲーデル変換と呼ぶことにする）はよく知られている直観主義論理から様相論理  $S4$  への変換法を線形論理に当てはめたものである。

**定義 5.10** (直観主義論理から線形論理への変換) 直観主義論理の論理式から線形論理の論理式への二つの写像  $^\circ$  (ジラール変換)、  $^\bullet$  (ゲーデル変換) を次のように定義する。

$$\begin{array}{ll}
 (p(\bar{t}))^\circ \equiv p(\bar{t}) & (p(\bar{t}))^\bullet \equiv !p(\bar{t}) \\
 (A \Rightarrow B)^\circ \equiv !A^\circ \multimap B^\circ & (A \Rightarrow B)^\bullet \equiv !(A^\bullet \multimap B^\bullet) \\
 (\neg A)^\circ \equiv !A^\circ \multimap 0 & (\neg A)^\bullet \equiv !(A^\bullet \multimap 0) \\
 (A \wedge B)^\circ \equiv A^\circ \& B^\circ & (A \wedge B)^\bullet \equiv A^\bullet \otimes B^\bullet \\
 (A \vee B)^\circ \equiv !A^\circ \oplus !B^\circ & (A \vee B)^\bullet \equiv A^\bullet \oplus B^\bullet \\
 (\forall x.A)^\circ \equiv \forall x.A^\circ & (\forall x.A)^\bullet \equiv !\forall x.A^\bullet \\
 (\exists x.A)^\circ \equiv \exists x.!A^\circ & (\exists x.A)^\bullet \equiv \exists x.A^\bullet
 \end{array}$$

二つの変換法は証明可能性に関して言えば（ジラール変換のほうに！をつけることにより）同値になる。

**補題 5.11**  $A$  を直観主義論理の論理式とすると、  $!A^\circ \circ \multimap A^\bullet$  が線形論理において証明可能である。

しかし証明の構造の観点からすると二つの変換法の間には微妙な違いがある。そしてその違いは操作的な観点からすると、関数型プログラムの二つの評価法である名前呼び出しと値呼び出しの違いと密接な関わりがあるのである。

補助的な変換として、線形論理から様相論理  $S4$  への変換を定義しておく。

定義 5.12 (線形論理から  $S4$  への変換) 線形論理から様相論理  $S4$  への写像  $-$  を次のように定義する。

$$\begin{array}{ll}
 (p(\bar{t}))^- \equiv p(\bar{t}) & (p^\perp(\bar{t}))^- \equiv \neg p(\bar{t}) \\
 (A \otimes B)^- \equiv (A \& B)^- \equiv A^- \wedge B^- & (A \wp B)^- \equiv (A \oplus B)^- \equiv A^- \vee B^- \\
 (!A)^- \equiv \Box A^- & (?A)^- \equiv \Diamond A^- \\
 (\forall x.A)^- \equiv \forall x.A^- & (\exists x.A)^- \equiv \exists x.A^-
 \end{array}$$

この変換フィルターを通すと、上で定義したゲーデル変換は普通の直観主義論理から  $S4$  への変換になることがわかる。

以上の準備の下で、次の定理を証明することができる。

定理 5.13  $\Gamma \vdash A$  を直観主義論理のシーケントとすると、以下の4つの条件は同値である。

1.  $\Gamma \vdash A$  が直観主義論理で証明可能である。
2.  $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$  が線形論理で証明可能である。
3.  $\Gamma^\circ \vdash A^\circ$  が線形論理で証明可能である。
4.  $\Gamma^\circ \dashv\vdash (A^\circ)^-$  が  $S4$  で証明可能である。

証明 (2  $\Rightarrow$  3) は補題 5.11 による。(3  $\Rightarrow$  4) は明らか。(4  $\Rightarrow$  1) は様相論理と直観主義論理に関する古典的な結果である。

最後に (1  $\Rightarrow$  2) を示す。 $\pi$  を直観主義論理の自然演繹における  $\Gamma \vdash A$  の証明とする。このとき  $\pi$  を線形論理のシーケント計算における  $!\Gamma^\circ \vdash A^\circ$  の証明  $\pi^\circ$  へと変換することが可能である。以下にいくつかの推論規則について変換方法を示す。

$$\begin{array}{l}
 \frac{A \in \Gamma}{\Gamma \vdash A} \Rightarrow \frac{\frac{A^\circ \vdash A^\circ}{!A^\circ \vdash A^\circ}}{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ} \\
 \frac{A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow \frac{!A^\circ, !\Gamma^\circ \vdash B^\circ}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ \multimap B^\circ} \\
 \frac{\frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow \frac{\frac{\frac{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ} \quad \frac{B^\circ \vdash B^\circ}{!\Gamma^\circ, !A^\circ \multimap B^\circ \vdash B^\circ}}{!\Gamma^\circ, !\Gamma^\circ \vdash B^\circ}}{!\Gamma^\circ \vdash B^\circ} \\
 \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \Rightarrow \frac{\frac{!\Gamma^\circ \vdash A^\circ}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ}}{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ \oplus !B^\circ} \\
 \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash C} \Rightarrow \frac{\frac{!\Gamma^\circ \vdash !A^\circ \oplus !B^\circ \quad \frac{!A^\circ, !\Gamma^\circ \vdash C^\circ \quad !B^\circ, !\Gamma^\circ \vdash C^\circ}{!A^\circ \oplus !B^\circ, !\Gamma^\circ \vdash C^\circ}}{!\Gamma^\circ, !\Gamma^\circ \vdash C^\circ}}{!\Gamma^\circ \vdash C^\circ}
 \end{array}$$



ジラール変換について重要なのは、直観主義論理の正規化手続きを保存するという性質である。

命題 5.14 直観主義論理の証明  $\pi_1$  が (通常) の正規化手続きにより  $\pi_2$  へと書き換えられるならば、 $\pi_1^0$  は  $\pi_2^0$  へと書き換えられる。

直観主義論理の証明は、関数型プログラムを表すものと見なすことができる。ゆえにこの命題により、関数型プログラムを線形論理を用いて分析することが可能となる。

## 5.7 古典論理の解釈

次に古典論理を線形論理へと埋め込むことを考えよう。古典論理と線形論理の違いは、前者においては構造規則はどんな論理式についても用いることができるのに対し、後者においてはそれが  $?A$  の形の論理式に限られるという点に尽きる。ゆえに古典論理を線形論理へと変換する際に、十分な数の  $?$  (および!) を組み入れれば十分だということになる。

定義 5.15 (古典論理から線形論理への変換) 古典論理式から線形論理式への写像  $+$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} p(\bar{t})^+ &\equiv ?!p(\bar{t}) & (\neg A)^+ &\equiv ?(A^{+\perp}) \\ (A \vee B)^+ &\equiv A^+ \wp B^+ & (\forall x.A)^+ &\equiv ?!\forall x.A^+ \end{aligned}$$

定理 5.16  $A$  が古典論理で証明可能  $\iff A^+$  が線形論理で証明可能

実際には、古典論理の解釈にはいろいろとデリケートな点があるのだが、ここではこれ以上深入りしないことにする [16]。

## 6 それから — 線形論理の行方

かくして線形論理は産み出された。それから — どうなったのであろうか。ここでは本稿で触れることができなかつた線形論理の重要なアイデアについて参考文献を紹介しつつ、線形論理がその後どのように発展していったのかを概観する。

線形論理一般： 本稿を読んで興味を持たれた方は、ぜひ [17] へと読み進んでほしい。線形論理について書かれた書物としては、[38, 39] がある。線型論理が生まれるきっかけとなった整合空間については [19] に詳しい。領域理論の好著 [3] も整合空間および線型論理についての章を含む。

相空間 (phase spaces)： 論理的な観点から言えば、整合空間は矛盾した意味論である ( $\top = 0$ )。では線形論理に無矛盾・健全でかつ完全な意味論を与えることは不可能なのかといえば、そんなことはない。相空間意味論がそのような意味論の代表例である [13, 17]。相空間は健全かつ完全であるのみならず、線形論理やその関連体系の持つ様々な性質を意味論的に示すためにも有用である。例えばカット除去定理 [30, 31]、決定可能性 [25, 32]、決定不能性 [24]

などがその例である。[37, 7]においては、一群の部分構造論理についてカット除去定理が成り立つための必要十分条件を相空間を用いて与えている。相空間については [29] において詳しく解説されているはずである。

**証明網 (proof nets) :** 5.1 節では、シークエント計算に基づいて線形論理を導入した。では線形論理を自然演繹に基づいて導入するとどうなるのだろうか？直観主義論理の自然演繹の証明は

$$\begin{array}{c} A_1 \cdots A_n \\ \vdots \\ B \end{array}$$

という形をしている。すなわち仮定が複数許されるのに対して結論は常にただ一つという、非対称的な形をしている。線形論理においては双対性が成り立つので、複数の結論を許し、上下対称な

$$\begin{array}{c} A_1 \cdots A_n \\ \vdots \\ B_1 \cdots B_m \end{array}$$

のような形の証明を考えるのが自然である。古典論理でそのようなことをすると、証明の正規化を考えた途端に破綻してしまうのであるが、線形論理においては構造規則が指数関数様相によりコントロールされているため、正規化手続きも含めてうまく定義をすることができる。結果として得られるのは、木構造ではなく、証明網とよばれるグラフ構造になる。(実際には、シークエント計算において右側のみに論理式を含むシークエントを考えれば十分であったように、ここでも結論のみを持つような証明網を考えれば十分である。) しかも乗法的な連言・選言  $\otimes, \wp$  のみに論理結合子を制限すれば、どのようなグラフが証明であるかについて、純粋にグラフ論的な必要十分条件を与えることができる [13, 9]。証明網については [23] が非常によい入門である。加法的な論理結合子の取り扱いについては [18, 20] を参照。

**相互作用の幾何学 (geometry of interaction) :** 普通カット除去の手続きは、統語論に密着した統語論に特有の操作と考えられている。しかし必ずしもそうでなければいけないというわけではない。相互作用の幾何学とは、カット除去のダイナミクスを統語論の詳細に依存しない意味論的な操作として捉え直そうという試みである。相互作用の幾何学の“第一世代”については [15, 14, 8] などを参照のこと。圏論的に再定式化された“第二世代”については、[34] という解説論文がある。

**証明可能性の計算量 :**  $X$  を線形論理の部分体系とすると、次の問題を考える。

部分体系  $X$  に含まれる論理式  $A$  が与えられたとき、 $A$  は  $X$  において証明可能か？

この問題の計算量については次のような結果が知られている。

乗法的部分体系	$NP$ 完全
加法・乗法的部分体系	$PSPACE$ 完全
線形論理全体	決定不能
線形論理 + Weakening	決定可能
線形論理 + Contraction	決定可能

最大の未解決問題は、乗法・指数関数的部分体系が決定可能かどうかである。この分野についての調査論文としては（やや古い） [27] がある。上の表のうち、下の二つについては [21, 32] を参照。線形論理の決定不能性、二階加法・乗法部分体系の決定不能性については [25] で相空間意味論を用いた非常に美しい証明が与えられており、一見の価値がある。

証明正規化の計算量： 同じく  $X$  を線形論理の部分体系とすると、次の問題を考える。

部分体系  $X$  における証明  $\pi_1, \pi_2$  が与えられたとき、 $\pi_1$  と  $\pi_2$  は同じ正規形を持つか？  
乗法的部分体系においては証明の正規化は非常に容易である。なぜならば、主論理式同士のカットを除去すると証明のサイズが真に小さくなるからである。ゆえに証明網を用いれば実質上、証明のサイズに対して線形ステップで正規化を行うことができる。線形論理はこの意味でも“線形”なのである。

上の問題については次の結果がある [28]。

乗法的部分体系	$P$ 完全
加法・乗法的部分体系	$coNP$ 完全
線形論理全体	非初等的

多項式時間論理 (logics of polynomial time)： 線形論理の亜種として軽線形論理 (light linear logic) および関連体系 [11, 5, 35, 6]、柔線形論理 (soft linear logic) [22] が挙げられる。これらの体系においては、証明は常に多項式時間関数 (polynomial time function) を表し、逆にどんな多項式時間関数も何らかの証明により表すことができる。また、軽線形論理 (の亜種) 上では素朴集合論を展開することが可能である。この素朴集合論において全域性が証明可能な関数はちょうど多項式時間関数と一致する [36]。

これらの論理はみな線形論理の指数関数様相を“多項式的な”様相に制限することにより得られるものである。計算の量的側面に対する線形論理の豊富な表現力が顕著に見られる分野である。

構成的古典論理 (constructive classical logic)： 2.1 節で述べたとおり、古典論理のシークエント計算  $LK$  に基づいて証明の表示的意味論を導入しようとする、解釈が一つにつぶれてしまつてうまくいかない。しかしこのことは  $LK$  という一つの定式化の問題に過ぎず、古典論理に別の証明体系を導入すれば、無矛盾な表示的意味論を与えられる可能性は依然として残っている。現に  $\lambda\mu$  計算を代表例として様々な体系が古典論理の証明体系として提案されている。線形論理に基づく体系としては、Girard のシークエント計算  $LC$  [16]、O. Laurent の極性つき線形論理 (polarized linear logic, [26]) の体系などがあり、 $\lambda\mu$  計算やそれに付随

する制御圏 (control categories) との関係が盛んに取り沙汰されている。

その他にも、ゲーム意味論 (game semantics)[2, 1]、充満完全性問題、遊び (ludics) の理論 [12]、また最近の話題として微分  $\lambda$  計算 (differential lambda calculus)[10] などなど、ここでは語りきれなかった多くのアイデアが線形論理から生まれている。

最後に一言。序章において、線形論理にとって最も重要なのは分解の精神であると述べた。極言すれば、線形論理とは分解の精神そのもののことであると言ってもよい。そして分解が線形論理で終わる必然性は全くなく、むしろ最近の動向を見れば、分解はさらにどんどん進んでいっている。そして線形論理という論理体系そのものは、発展的に解消しつつある。きっとそういうものなのだろう。分解の精神を忘れ、線形論理そのものにこだわったり、教条主義的になったりしだしたら、それはすでに線形論理ではないのである。

線形論理はこれから先どこへ行くのか？ 下人の行方は誰も知らない。

## 参考文献

- [1] S. Abramsky and G. McCusker. Game semantics. In H. Schwichtenberg and U. Berger, editors, *Logic and Computation: Proceedings of the 1997 Marktoberdorf Summer School*. Springer-Verlag, 1998.
- [2] S. Abramsky and R. Jagadeesan. New foundations for the geometry of interaction. *Information and Computation*, Vol. 111, No. 1, pp. 53–119, 1994. Extended version of the paper published in the Proceedings of LICS'92.
- [3] R. Amadio and P.-L. Curien. *Domains and Lambda-Calculi*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 1998.
- [4] J.-M. Andreoli. Logic programming with focusing proofs in linear logic. *Journal of Logic and Computation*, Vol. 2, No. 3, pp. 297–347, 1992.
- [5] A. Asperti. Light affine logic. In *Proceedings of LICS'98*, 1998.
- [6] P. Baillot and K. Terui. Light types for polynomial time computation in lambda-calculus. In *Proceedings of LICS'04*, pp. 266–275, 2004.
- [7] A. Ciabattini and K. Terui. Towards a semantic characterization of cut-elimination. *Studia Logica*, Vol. 82, pp. 95–119, 2006.
- [8] V. Danos and L. Regnier. Proof-nets and Hilbert space. In J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pp. 307–328. Cambridge University Press, 1995. Proceedings of the Workshop on Linear Logic, Ithaca, New York, June 1993.
- [9] V. Danos and L. Regnier. The structure of multiplicatives. *Archive for Mathematical Logic*, Vol. 28, pp. 181–203, 1989.
- [10] T. Ehrhard and L. Regnier. The differential lambda-calculus. *Theoretical Computer Science*, Vol. 309, pp. 1–41, 2003.

- [11] J.-Y. Girard. Light linear logic. *Information and Computation*, Vol. 14, No. 3, pp. 175–204, 1998.
- [12] J.-Y. Girard. Locus solum: from the rules of logic to the logic of rules. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 11, pp. 301–506, 2001.
- [13] J.-Y. Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, Vol. 50, pp. 1–102, 1987.
- [14] J.-Y. Girard. Geometry of interaction I: Interpretation of system F. In C. Bonotto, R. Ferro, S. Valentini, and A. Zanardo, editors, *Logic Colloquium '88*, pp. 221–260. North-Holland, 1989.
- [15] J.-Y. Girard. Towards a geometry of interaction. In J. W. Gray and A. Scedrov, editors, *Categories in Computer Science and Logic*, pp. 69–108. American Mathematical Society, 1989. Proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, June 14–20, 1987, Boulder, Colorado; Contemporary Mathematics Volume 92.
- [16] J.-Y. Girard. A new constructive logic: Classical logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 1, pp. 255–296, 1991.
- [17] J.-Y. Girard. Linear logic: Its syntax and semantics. In J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pp. 1–42. Cambridge University Press, 1995. Proceedings of the Workshop on Linear Logic, Ithaca, New York, 1993.
- [18] J.-Y. Girard. Proof-nets: The parallel syntax for proof-theory. In P. Agliano and A. Ursini, editors, *Logic and Algebra*, Marcel Dekker, New York, 1996.
- [19] J.-Y. Girard, Y. Lafont, and P. Taylor. *Proofs and Types*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7. Cambridge University Press, 1988. (著者たちのウェブサイトよりダウンロード可)
- [20] D. J. D. Hughes and R. J. van Glabbeek. Proof nets for unit-free multiplicative-additive linear logic (extended abstract). In *Proceedings of LICS'03*, pp. 1 – 10, 2003.
- [21] A. P. Kopylov. Decidability of linear affine logic. In *Proceedings of Lics'95*, pp. 496–504, San Diego, California, 1995.
- [22] Y. Lafont. Soft linear logic and polynomial time. *Theoretical Computer Science*, Vol. 318, pp. 163–180, 2004.
- [23] Y. Lafont. From proof nets to interaction nets. In J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pp. 225–247. Cambridge University Press, 1995. Proceedings of the Workshop on Linear Logic, Ithaca, New York, 1993.
- [24] Y. Lafont. The undecidability of second order linear logic without exponentials. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 61, No. 2, pp. 541 – 548, 1996.
- [25] Y. Lafont. The finite model property for various fragments of linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 62, No. 4, pp. 1202 – 1208, 1997.
- [26] O. Laurent. Polarized proof-nets and lambda-mu calculus. *Theoretical Computer Science*, Vol. 290, No. 1, pp. 161–188, 2004.

- [27] P. Lincoln. Deciding provability of linear logic formulas. In J.-Y. Girard, Y. Lafont, and L. Regnier, editors, *Advances in Linear Logic*, pp. 109–122. Cambridge University Press, 1995. Proceedings of the Workshop on Linear Logic, Ithaca, New York, June 1993.
- [28] H. Mairson and K. Terui. On the computational complexity of cut-elimination in linear logic. In *Proceedings of ICTCS 2003*, pp. 23–36. LNCS 2841, 2003.
- [29] M. Okada. An introduction to linear logic: Phase semantics and expressiveness. In M. Takahashi, M. Okada, and M. Dezani-Ciancaglini, editors, *Theories of Types and Proofs*, pp. 255–295. MSJ Memoirs vol.2, Mathematical Society of Japan, 1998.
- [30] M. Okada. Phase semantics for higher order completeness, cut-elimination and normalization proofs (extended abstract). In J.-Y. Girard, M. Okada, and A. Scedrov, editors, *ENTCS (Electronic Notes in Theoretical Computer Science) Vol.3: A Special Issue on the Linear Logic 96, Tokyo Meeting*. Elsevier-ENTCS, 1996.
- [31] M. Okada. A uniform semantic proof for cut-elimination and completeness of various first and higher order logics. *Theoretical Computer Science*, Vol. 281, pp. 471–498, 2002.
- [32] M. Okada and K. Terui. The finite model property for various fragments of intuitionistic linear logic. *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 64, No. 2, pp. 790–802, 1999.
- [33] H. Ono. Proof-theoretic methods for nonclassical logic – an introduction. In M. Takahashi, M. Okada, and M. Dezani-Ciancaglini, editors, *Theories of Types and Proofs*, pp. 207–254. MSJ Memoirs vol.2, Mathematical Society of Japan, 1998.
- [34] Y. Shirahata. Geometry of interaction explained. 代数・論理・幾何と情報科学短期共同研究報告集. 京都数理解析研究所講究録 1318, 2003.
- [35] K. Terui. Light affine lambda calculus and polytime strong normalization. In *Proceedings of LICS'01*, pp. 209–220, 2001.
- [36] K. Terui. Light affine set theory: a naive set theory of polynomial time. *Studia Logica*, Vol. 77, pp. 9–40, 2004.
- [37] K. Terui. Which structural rules admit cut elimination? — an algebraic criterion. *Journal of Symbolic Logic*, to appear.
- [38] Anne S. Troelstra. *Lectures on Linear Logic*. CSLI Lecture Notes 29, Center for the Study of Language and Information, Stanford, California, 1992.
- [39] 竹内外史. 線型論理入門. 日本評論社, 1995.