数理解析研究所講究録
1527巻 2007年 37-48

ケーリー代数内の6次元部分多様体上の概複素構造のある曲率について

On some curvature of 6-dimensional submanifolds in the octonions

橋本 英哉　名城大学理工学部
(Hashimoto, Hideya, Faculty of Science and Technology, Meijo University)

ケーリー代数 $\mathfrak{C}$ 内の任意の可符号6次元部分多様体上 $\varphi: M^6 \to \mathfrak{C}$ には次の様に概エルミート構造が存在する。ケーリー代数 $\mathfrak{C}$ は非可換性より、外積 $\times$ が存在することを用いて次の様に構成する。ξ, η を法空間の局所的な正規直交枠場とする。M 上の概複素構造 J を

$$\varphi_*(JX) = \varphi_*(X)(\eta \times \xi)$$

と定義する。ここに $X \in T_pM$, を表す。ケーリー代数 $\mathfrak{C}$ は非結合的、交代的な可除代数であるから $J^2 = -I$ であることが示され、かつ、誘導計量 $<, >$ に関しても適合する；$< JX, JY >=< X, Y >$. M^6 上に誘導される概エルミート構造は $Spin(7)$ 合同類に関する不変量である。従って、第二基本形式を概エルミート構造で分解し得られるある不変量と $*$−scalar curvature は、$Spin(7)$ 合同類に関する不変量となる。一方、8次元ユークリッド空間内の可符号6次元リーマン部分多様体は, 平行移動を除いて、$SO(8)$ 合同類として理解されているが、上記の様に $SO(8)$ 合同ではあるが $Spin(7)$ 合同でない等長はめ込みを許容するのが一般的である。具体的な例を用いて、この状況を説明したい。

実際に $SO(8)$ の作用ではめ込みを動かした場合に $S^2 \times \mathbf{R}^4$ (リーマン積) 上の概エルミート構造が変形することを示す。まず、$Spin(7)$ はケーリー代数内の向きをもつ3次元部分空間の為す Grassmann 多様体 $G_3(\mathfrak{C}) = SO(8)/SO(3) \times SO(5)$ に推移的に作用し、等質空間 $Spin(7)/(Sp(1) \times Sp(1)/Z_2)$ と表示できる。これより S^2 によって定まる3次元部分空間は、$Spin(7)$ の作用によってケーリー代数内の4元数内の純虚数のなす3次元部分空間に同一視できる。一方、残りの5次元部分空間内の $\mathbf{R}^4$ は、一般に四元数の構造を持つとは限らない。従って、等長はめ込みによって定まる概複素構造は、$Spin(7)$ 合同にはならないと予測される。実際、概複素構造は $Spin(7)$ 不変量であることから対応する概エルミート構造の不変量例えば $*$−scalar curvature を計算することにより、この事実が確認できる。

1 準備

四元数を $\mathbf{H}$ で表す。$\{1, i, j, k\}$ を四元数の基底とすると

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j.$$

が成立する。次に、ケーリー代数 $\mathfrak{C}$ を四元数の直和 $\mathbf{H} \oplus \mathbf{H} = \mathfrak{C}$ に、下記の積構造を持つものとして定義する。

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac - \bar{d}b + (da + b\bar{c})\varepsilon,$$

ここに、$\varepsilon = (0,1) \in \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$ $a, b, c, d \in \mathbf{H}$, を表し、記号"-" は、四元数での共役を表す。この積に関して、任意の $x, y \in \mathfrak{C}$, に対して

$$< xy, xy > = < x, x >< y, y >$$

が成立する。

ケーリー代数は、非可換、非結合的、交代的な可除代数である。ケーリー代数の自己同型群は、14 次元例外型単純 Lie 群

$$G_2 = \{g \in SO(8) \mid g(uv) = g(u)g(v) \text{ for any } u, v \in \mathfrak{C}\}$$

と一致する。ここで用いる Lie 群は、G_2 を含む Lie 群 $Spin(7)$ であり次の様に定義される。

$$Spin(7) = \{g \in SO(8) \mid g(uv) = g(u)\chi_g(v) \text{ for any } u, v \in \mathfrak{C}\}.$$

ここに $\chi_g(v) = g(g^{-1}(1)v)$ である。特に $G_2 = \{g \in Spin(7) \mid g(1) = 1\}$ となる。写像 χ は $Spin(7)$ から $SO(7)$ への二重被覆となり次の性質をみたす。

$$g(u) \times g(v) = \chi_g(u \times v)$$

ここに $u, v \in \mathfrak{C}$ であり

$$u \times v = (1/2)(\bar{v}u - \bar{u}v)$$

はケーリー代数の外積を表す。ここに $\bar{v} = 2 < v, 1 > -v$ は $v \in \mathfrak{C}$ の共役を表している。外積は $u \times v = -v \times u$ を満たし、$\mathfrak{C}$ の純虚数の元となる。

1.1 Spin(7)-合同定理

ケーリー代数内の可符号 6 次元部分多様体の $Spin(7)$-合同定理は以下の様に述べられる。M^6 を連結な 6 次元多様体とし $\varphi_1, \varphi_2 : M^6 \to \mathfrak{C}$ を 2 つの等長はめ込みとする。このはめ込みが $Spin(7)$-合同と仮定する。即ち、$g \in Spin(7)$ が存在して

$$g \circ \varphi_1 = \varphi_2$$

(平行移動の作用を除いて) となると仮定する。この時、M 上に誘導された計量と概複素構造は一致する。逆に、次の命題が成立する。

Proposition 1.1 M^6 を連結な*6*次元多様体とし$\varphi_1, \varphi_2 : M^6 \to \mathfrak{C}$ を*2*つの等長はめ込みとし、同じ誘導計量と同じ概複素構造をもつものと仮定する。$II^{(2,0)}_{\varphi_1}, II^{(2,0)}_{\varphi_2}$ を、それぞれの第二基本形式の *(2,0) part* とする。このとき、$Spin(7)$ のある元 g が存在して

$$g \circ \varphi_1 = \varphi_2$$

となるための必要十分条件は $II^{(2,0)}_{\varphi_1} = II^{(2,0)}_{\varphi_2}$ となることである。ここに

$$II^{(2,0)} =< II(f_i, f_j), \overline{n} > (\omega^i \odot \omega^j) \otimes n$$

であり、$\odot$ は、対称テンソル積を表す。

1.2 Spin(7) の構造方程式

この節では Spin(7) の構造方程式について説明する。ケーリー代数の複素化を $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathfrak{C}$ とし、その標準基底を次の様に定める。

$$N = (1/2)(1 - \sqrt{-1}\varepsilon),\ \bar{N} = (1/2)(1 + \sqrt{-1}\varepsilon)$$
$$E_1 = iN,\ E_2 = jN,\ E_3 = -kN,\ \bar{E}_1 = i\bar{N},\ \bar{E}_2 = j\bar{N},\ \bar{E}_3 = -k\bar{N}.$$

ケーリー代数の積構造を複素線型に拡張すると次の乗積表を得る。

$A \backslash B$	N	E_1	E_2	E_3	$\bar{N}$	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_3$
N	N	0	0	0	0	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_3$
E_1	E_1	0	$-\bar{E}_3$	$\bar{E}_2$	0	$-\bar{N}$	0	0
E_2	E_2	$\bar{E}_3$	0	$-\bar{E}_1$	0	0	$-\bar{N}$	0
E_3	E_3	$-\bar{E}_2$	$\bar{E}_1$	0	0	0	0	$-\bar{N}$
$\bar{N}$	0	E_1	E_2	E_3	$\bar{N}$	0	0	0
$\bar{E}_1$	0	$-N$	0	0	$\bar{E}_1$	0	$-E_3$	E_2
$\bar{E}_2$	0	0	$-N$	0	$\bar{E}_2$	E_3	0	$-E_1$
$\bar{E}_3$	0	0	0	$-N$	$\bar{E}_3$	$-E_2$	E_1	0

次に、$\mathfrak{C}$ と Spin(7) の半直積 $\mathfrak{C} \times Spin(7)$ の構造方程式を述べる。

$$\begin{aligned}
(x, g)(o; N, E, \bar{N}, \bar{E}) &= (g \cdot o + x, g(N), g(E), g(\bar{N}), g(\bar{E})) \\
&= (x, g(N), g(E), g(\bar{N}), g(\bar{E})) \\
&= (o; N, E, \bar{N}, \bar{E}) \begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times 8} \\ \rho(x) & \rho(g) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$o = {}^t(0,\cdots,0) \in \mathbf{R}^8 \simeq \mathfrak{C}$ は複素化されたケーリー代数の原点を (x,g) は $\mathfrak{C}\times Spin(7)$ の元をそれぞれ表す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{1\times 8} \\ \rho(x) & \rho(g) \end{pmatrix}$$

は $M_{9\times 9}$ に値をもつ行列表現を表す。$(x;n,f,\bar{n},\bar{f})$ が $\mathfrak{C}\times Spin(7)$ admissible frame であるとは $(x,g)\in\mathfrak{C}\times Spin(7)$ が存在して

$$(x;n,f,\bar{n},\bar{f}) = (x,g)(o;N,E,\bar{N},\bar{E}).$$

を満たす場合をいう。

Proposition 1.2 ([Br1]) 半直積 $\mathfrak{C}\times Spin(7)$ の *Maurer-Cartan form* は、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} d(x;n,f,\bar{n},\bar{f}) &= (x;n,f,\bar{n},\bar{f})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0_{1\times 3} & 0 & 0_{1\times 3} \\ \nu & \sqrt{-1}\rho & -{}^t\bar{\mathfrak{h}} & 0 & -{}^t\theta \\ \omega & \mathfrak{h} & \kappa & \theta & [\bar{\theta}] \\ \bar{\nu} & 0 & -{}^t\bar{\theta} & -\sqrt{-1}\rho & -{}^t\mathfrak{h} \\ \bar{\omega} & \bar{\theta} & [\theta] & \bar{\mathfrak{h}} & \bar{\kappa} \end{pmatrix} \\ &= (x;n,f,\bar{n},\bar{f})\psi \end{aligned}$$

ここに ψ は $spin(7)\oplus\mathfrak{C}(\subset M_{9\times 9}(\boldsymbol{C}))$ に値をもつ *1-form* であり, ρ は実数に値をもつ *1-form*, ν は複素数に値もつ *1-form*, $\omega,\mathfrak{h},\theta$ は $M_{3\times 1}$-に値をもつ *1-form*, κ は $\mathfrak{u}(3)$-に値を持つ関数であり次の条件 $\sqrt{-1}\rho + tr\kappa = 0$, を満たし、記号 [ ] は次で定義される。

$$[\theta] = \begin{pmatrix} 0 & \theta^3 & -\theta^2 \\ -\theta^3 & 0 & \theta^1 \\ \theta^2 & -\theta^1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここに、$\theta = {}^t(\theta^1,\theta^2,\theta^3)$ である。 可積分条件は $d\psi + \psi\wedge\psi = 0$ で与えられる。より詳細に述べると

$$\begin{aligned} dx &= (n,f,\bar{n},\bar{f})\begin{pmatrix} \nu \\ \omega \\ \bar{\nu} \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}, \\ dn &= n\sqrt{-1}\rho + f\mathfrak{h} + \bar{f}\bar{\theta}, \\ df &= n(-{}^t\bar{\mathfrak{h}}) + f\kappa + n(-{}^t\bar{\theta}) + \bar{f}[\theta], \end{aligned}$$

となり、可積分条件は以下の式によって与えられる。

$$
\begin{aligned}
d\nu &= \sqrt{-1}\rho\wedge\nu+{}^t\bar{\mathfrak{h}}\wedge\omega+{}^t\bar{\theta}\wedge\bar{\omega},\\
d\omega &= -\mathfrak{h}\wedge\nu-\kappa\wedge\omega-\theta\wedge\bar{\nu}-[\theta]\wedge\bar{\omega},\\
d(\sqrt{-1}\rho) &= {}^t\bar{\mathfrak{h}}\wedge\mathfrak{h}+{}^t\theta\wedge\bar{\theta},\\
d\mathfrak{h} &= -\mathfrak{h}\wedge\sqrt{-1}\rho-\kappa\wedge\mathfrak{h}-[\bar{\theta}]\wedge\bar{\theta},\\
d\theta &= \theta\wedge\sqrt{-1}\rho-\kappa\wedge\theta-[\bar{\theta}]\wedge\bar{\mathfrak{h}},\\
d\kappa &= \mathfrak{h}\wedge{}^t\bar{\mathfrak{h}}-\kappa\wedge\kappa+\theta\wedge{}^t\bar{\theta}-[\bar{\theta}]\wedge[\theta].
\end{aligned}
$$

2 Gram-Schmidt process of Spin(7)

G_2-枠を構成しその後に Spin(7)-枠を構成する。$\mathfrak{C}_0=\{x\in\mathfrak{C}|<x,1>=0\}$ とする。

Lemma 2.1 e_1, e_4 を $\mathfrak{C}_0$ の互いに直交する単位ベクトルとする。$e_5=e_1e_4$ とおく。つぎに e_2 を e_1, e_4, e_5 によって張られる *3* 次元部分空間に直交する $\mathfrak{C}_0$ の元とする。$e_3=e_1e_2$, $e_6=e_2e_4$ $e_7=e_3e_4$ とおく。このとき行列

$$g=[e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7]\in SO(7)$$

は G_2 の元となる。.

Lemma 2.1 によって、特に $e_4=\eta\times\xi$, とおくと G_2-枠場を得る。

$$
\begin{aligned}
N^* &= (1/2)(1-\sqrt{-1}e_4),\quad \bar{N}^*=(1/2)(1+\sqrt{-1}e_4),\\
E_1^* &= (1/2)(e_1-\sqrt{-1}e_5),\quad \bar{E}_1^*=(1/2)(e_1+\sqrt{-1}e_5),\\
E_2^* &= (1/2)(e_2-\sqrt{-1}e_6),\quad \bar{E}_2^*=(1/2)(e_2+\sqrt{-1}e_6),\\
E_3^* &= -(1/2)(e_3-\sqrt{-1}e_7),\quad \bar{E}_3^*=-(1/2)(e_3+\sqrt{-1}e_7).
\end{aligned}
$$

ここに $span_{\mathbf{C}}\{N^*,E_1^*,E_2^*,E_3^*\}$ は、概複素構造 $J=R_{\eta\times\xi}$ at $p\in\mathfrak{C}$. に関する $\sqrt{-1}$-固有空間 $T_p^{(1,0)}\mathfrak{C}(\subset\mathfrak{C}\otimes\mathbf{C})$ を表す。一方 $n=(1/2)(\xi-\sqrt{-1}\eta)$ は、複素化した法ベクトルバンドル $T^{\perp(1,0)}M$ の局所直交枠場を与える。ここで $T^{\perp(1,0)}_{\varphi(m)}M\subset T^{(1,0)}_{\varphi(m)}\mathfrak{C}$, であるから $M_{4\times1}(\mathbf{C})$-に値を持つ関数 $a_1={}^t(a_{11},a_{21},a_{31},a_{41})$, が存在して

$$n=(1/2)(\xi-\sqrt{-1}\eta)=(N^*,E_1^*,E_2^*,E_3^*)a_1.$$

となる。ここで $T^{(1,0)}_{\varphi(m)}\mathfrak{C}$, 上のエルミート内積に関する Gram-Schmidt の直交化を行ない $M_{4\times1}(\mathbf{C})$-に値を持つ関数 $\{a_2,a_3,a_4\}$ が存在して $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ が special unitary frame となる様にとる。

$$f_i=(N^*,E_1^*,E_2^*,E_3^*)a_{i+1}$$

$i = 1, 2, 3$ とおく。すると

$$(n, f, \bar{n}, \bar{f}) = (n, f_1, f_2, f_3, \bar{n}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)$$

は局所的な M 上の Spin(7)-枠場を与える。

Remark 2.1 この構成方法は次の等質空間の表示の存在から保証されている。

$$Spin(7)/Spin(6) = Spin(7)/SU(4) = S^6 \cong G_2/SU(3).$$

3 $Spin(7)$ の作用する等質空間

以下に述べる様に $Spin(7)$ 及びその部分群は7次元以下の球面の例外的な表示を持つ。実際、

$$S^7 = Spin(7)/G_2, S^6 = G_2/SU(3), S^5 = SU(3)/SU(2)$$

となる。特に、最後の $SU(2)$ の作用は、$\mathbf{C}^2$ への標準的な作用であることに気をつけると、5次元球面 S^5 上の接空間 T_pS^5 $(p \in S^5)$ 内の4次元球面に推移的に作用しないことがわかる。従って、8次元ユークリッド空間内の直交4枠の為す Stiefel 多様体 $V_4(\mathbf{R}^8)$ 及び、8次元ユークリッド空間内の4次元可符号平面の為す Grassmann 多様体 $G_4^+(\mathbf{R}^8)$ には $Spin(7)$ は推移的に作用しない。

一方、k を3以下の自然数とするとき、8次元ユークリッド空間内の直交 $k-$ 枠の為す Stiefel 多様体 $V_k(\mathbf{R}^8)$ 及び、8次元ユークリッド空間内のk次元可符号平面の為す Grassmann 多様体 $G_k^+(\mathbf{R}^8)$ は、次の表示を持つ。

$$V_2(\mathbf{R}^8) \simeq Spin(7)/SU(3), \quad V_3(\mathbf{R}^8) \simeq Spin(7)/SU(2),$$

$$G_2^+(\mathbf{R}^8) \simeq Spin(7)/U(3), \quad G_3^+(\mathbf{R}^8) \simeq Spin(7)/SO(4).$$

以上の様に $Spin(7)$ は 直交群 $SO(8)$ の部分群ではあるが、面白い幾何学的な性質を持っている。

4 $S^2 \times \mathbf{R}^4$ の埋め込みの1径数族

$V_3(\mathbf{R}^8) \simeq Spin(7)/SU(2)$ であることに気をつけると $S^2 \times \mathbf{R}^4$ のケーリー代数への埋め込み（標準的な積）は $Spin(7)$ の作用によって次の様な φ_t に標準化される。埋め込み φ_t は $(\varphi_t : S^3 \times \mathbf{R}^4 \to \mathfrak{C})$

$$\varphi_t(q, \tilde{y}) = qi\bar{q} + (-\sin(t) + \cos(t)\varepsilon)y_1 + (y_2 i + y_3 j + y_4 k)\varepsilon.$$

によって与えられるとしてよい。ここに、$0 \leq t \leq \pi/2, q \in S^3 \subset \mathbf{H}, \tilde{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{R}^4$ を表す。$\varphi_0(S^3 \times \mathbf{R}^4)$ は $S^2 \times \mathbf{R}^4$ とリーマン多様体として一致する。

特に、φ_0 は、

$$\varphi_0(S^3 \times \mathbf{R}^4) = S^2 \times \mathbf{R}^4 \subset \mathrm{Im}\mathbf{H} \oplus \mathbf{H}\varepsilon.$$

となり（部分空間への分解に注意）、誘導される概エルミート構造は等質であり Qusai-Kähler 構造となることが知られている。

次に、この埋め込みの族に関しての $Spin(7)$ frame field を記述する。そのために、ケーリー代数への $Sp(1)$ 群作用を次の様に定義する。

$$\rho_{II}(q)(a + b\varepsilon) = qa\overline{q} + (qb\overline{q})\varepsilon$$

ここに、$q \in S^3 \simeq Sp(1), a + b\varepsilon \in \mathfrak{C}$ である。この表示を用いると $Spin(7)$ frame field は

$$\begin{aligned}
n &= \frac{1}{2}\Big\{\rho_{II}(q)(\cos(t)\cdot 1 + \sin(t)\varepsilon - \sqrt{-1}i)\Big\},\\
f_1 &= \frac{1}{2}\Big\{\rho_{II}(q)(j\varepsilon + \sqrt{-1}(\cos(t)\cdot k - \sin(t)k\varepsilon))\Big\},\\
f_2 &= \frac{1}{2}\Big\{\rho_{II}(q)(j\varepsilon + \sqrt{-1}(\cos(t)\cdot k - \sin(t)k\varepsilon))\Big\},\\
f_3 &= -\frac{1}{2}\Big\{\rho_{II}(q)(-\sin(t)\cdot 1 + \cos(t)\varepsilon + \sqrt{-1}\varepsilon)\Big\},
\end{aligned}$$

となる。Coframe field $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ は S^2 上の (局所的な) 一次微分形式を

$$\mu_1 =< d(qi\overline{q}), qj\overline{q} >,\ \mu_2 =< d(qi\overline{q}), qk\overline{q} >,$$

また、ImH に値を持つ 1−form $d\beta$ を

$$d\beta = idy_1 + jdy_2 + kdy_3$$

とおくとき、次の式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \mu_1 - \sqrt{-1}(\cos(t)\mu_2 - \sin(t) < qk\overline{q}, d\beta >),\\
\omega^2 &=< qj\overline{q}, d\beta > + \sqrt{-1}(\sin(t)\mu_2 + \cos(t) < qk\overline{q}, d\beta >),\\
\omega^3 &= dy_1 - \sqrt{-1} < qk\overline{q}, d\beta > .
\end{aligned}$$

ここで

$$dn = -\frac{\sqrt{-1}}{2}dqi\overline{q} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}(qj\overline{q} \otimes \mu_1 + qk\overline{q} \otimes \mu_2).$$

及び、Cartan's Lemma $(\nu = 0)$ よりある $M_{3\times 3}$ に値をもつ関数 A, B, C が存在して

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{B} & \overline{A} \\ {}^tB & \overline{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}$$

となる。埋め込み φ_t に関する上記の行列は次の様に定まる。

$$A=-C=\frac{\sqrt{-1}}{4}\begin{pmatrix}\sin^2(t) & \sin(t)\cos(t) & 0\\ \sin(t)\cos(t) & -\sin^2(t) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$B=\frac{\sqrt{-1}}{4}\begin{pmatrix}1+\cos^2(t) & -\sin(t)\cos(t) & 0\\ -\sin(t)\cos(t) & \sin^2(t) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

従って $Spin(7)$ 不変量である $*-$ scalar curvature $\tau^*=-4\{\mathrm{tr}A\overline{A}-2\mathrm{tr}^t\overline{B}B+\mathrm{tr}C\overline{C}\}$ は次の式で与えられる。

$$\tau^*=1+\cos 2t\geq 0$$

従って、変形のパラメーター t によって誘導される概複素構造は変形することがわかる。

5 $S^1\times S^2\times\mathbf{R}^3$ の埋め込みの1径数族

この節では、リーマン等質空間 $S^1\times S^2\times\mathbf{R}^3$ 上に誘導される非等質な概複素構造の変形を与える。以下の様に埋め込みの1径数族を定義し $Spin(7)$ 合同でないことを示す。$(e^{i\theta},q,x_1,x_2,x_3)\in S^1\times S^3\times\mathbf{R}^3$ とし、S^3 から S^2 への Hopf 写像を $q\to qi\overline{q}$ と表す。各 $t\in\mathbf{R}$ に対して次の様に埋め込みを定める。

$$\begin{aligned}&\varphi_t(e^{i\theta},q,x_1,x_2,x_3)\\&=\cos(\theta)\Big(\cos(t)\cdot 1-\sin(t)\cdot i\varepsilon\Big)+x_1\Big(\sin(t)\cdot 1+\cos(t)\cdot i\varepsilon\Big)\\&+qi\overline{q}+\sin(\theta)\varepsilon+x_2j\varepsilon+x_3k\varepsilon.\end{aligned}$$

このとき、φ_t に沿った $Spin(7)$-frame field は

$$\begin{aligned}n&=\frac{1}{2}\{\cos(\theta)\cos(t)\cdot 1+\alpha_0\varepsilon-\sqrt{-1}qi\overline{q}\},\\ f_1&=\frac{1}{2}\Big\{qj\overline{q}+\sqrt{-1}(\cos(\theta)\cos(t)qk\overline{q}-(\alpha_0qk\overline{q})\varepsilon\Big\},\\ f_2&=\frac{1}{2}\{-|\alpha_0|\cdot 1+(\cos(\theta)\cos(t)/|\alpha_0|)(\alpha_0)\varepsilon+\sqrt{-1}\Big((1/|\alpha_0|)(\alpha_0qi\overline{q})\varepsilon\Big)\},\\ f_3&=-\frac{1}{2}\Big\{(1/|\alpha_0|)(\alpha_0qj\overline{q})\varepsilon-\sqrt{-1}(|\alpha_0|qi\overline{q}+(\cos(\theta)\cos(t)/|\alpha_0|)(\alpha_0qk\overline{q})\varepsilon\Big\},\end{aligned}$$

である。ここに $\alpha_0=\sin(\theta)-\cos(\theta)\sin(t)\cdot i$ を表す。次に、構造方程式による不変量を計算する。$d\varphi_t,dn$ を表示し、第二基本形式と $SU(3)$ の作用による分解を与える。まず、上記の Spin(7) 枠場の coframe ω_i を上記の座標を用いて記述する。

$$d\varphi_t=\sum_{i=1}^{3}f_i\omega^i+\overline{f_i}\,\overline{\omega^i}$$

を満たすことに注意すると

$$
\begin{aligned}
&\omega^1\\
&= \mu_1 - \sqrt{-1}\Big\{\cos(\theta)\cos(t)\mu_2 - \sin(t) < iq, qk > d\theta\\
&- \cos(t)\sin(\theta) < iq, qk > dx_1\\
&-(\sin(\theta) < jq, qk > + \cos(\theta)\sin(t) < kq, qk >)dx_2\\
&-(\sin(\theta) < kq, qk > - \cos(\theta)\sin(t) < jq, qk >)dx_3\Big\},\\
&\omega^2\\
&= (1/|\alpha_0|)\Big\{(\sin(\theta)\cos(t) - \sqrt{-1}\sin(t) < iq, qi >)d\theta\\
&-(\sin(t) + \sqrt{-1}\sin(\theta)\cos(t) < iq, qi >)dx_1\\
&-\sqrt{-1}(\sin(\theta) < jq, qi > + \cos(\theta)\sin(t) < kq, qi >)dx_2\\
&-\sqrt{-1}(\sin(\theta) < kq, qi > - \cos(\theta)\sin(t) < jq, qi >)dx_3\Big\},\\
&\omega^3\\
&= -(1/|\alpha_0|)\Big\{\sqrt{-1}|\alpha_0|^2\mu_2\\
&+\Big(\sin(\theta) < iq, qj > +\sqrt{-1}\cos(\theta)\sin(t) < iq, qk >\Big)d\theta\\
&+\cos(t)\Big(\sin(\theta) < iq, qj > +\sqrt{-1}\cos(\theta)\cos(t) < iq, qk >\Big)dx_1\\
&+\Big(\sin(\theta) < jq, qj > + \cos(\theta)\sin(t) < kq, qj >\\
&+\sqrt{-1}\cos(\theta)\cos(t)(\sin(\theta) < jq, qk > + \cos(\theta)\sin(t) < kq, qk >)\Big)dx_2\\
&+\sqrt{-1}\cos(\theta)\cos(t)\Big(\sin(\theta) < kq, qk > - \cos(\theta)\sin(t) < jq, qk >\Big)dx_3\Big\}
\end{aligned}
$$

を得る。ここで Cartan's Lemma ($\nu = 0$) よりある $M_{3\times3}$ に値をもつ関数 A, B, C が存在して、次を満たす。

$$
\begin{pmatrix} \mathfrak{h} \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{B} & \overline{A} \\ {}^tB & \overline{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} \tag{5.1}
$$

ここに ${}^tA = A, {}^tC = C$ であり，第二基本形式の Spin(7) 枠場に沿った成分表示である。上記の計算からこの行列成分を求めると

$$
\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{1}{4}\Big\{(p_3)^2\sin^2(t) + \sqrt{-1}(1 + \cos^2(\theta)\cos^2(t))\Big\},\\
B_{12} &= \frac{\sin(t)p_3}{4|\alpha_0|}\Big\{p_1\sin(t) + \sqrt{-1}\sin(\theta)\cos(t)\Big\},\\
B_{13} &= \frac{1}{4|\alpha_0|}\Big\{-(p_3)^2\cos(\theta)\cos(t)\sin^2(t)\\
&+\sqrt{-1}(p_2p_3\sin^2(t) + |\alpha_0|^2\cos(\theta)\cos(t))\Big\},
\end{aligned}
$$

$$B_{21} = \frac{\sin(t)p_3}{4|\alpha_0|}\Big\{-p_1\sin(t) + \sqrt{-1}\sin(\theta)\cos(t)\Big\},$$
$$B_{22} = \frac{1}{4|\alpha_0|^2}\{\sin^2(\theta)\cos^2(t) + (p_1)^2\sin^2(t)\},$$
$$B_{23} = -\frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2}\Big\{p_2\sin(\theta)\cos(t) - p_1p_3\cos(\theta)\cos(t)\sin(t)$$
$$+\sqrt{-1}(p_1p_2\sin(t) + p_3\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(t))\Big\},$$
$$B_{31} = \frac{1}{4|\alpha_0|}\Big\{-(p_3)^2\cos(\theta)\cos(t)\sin^2(t)$$
$$+\sqrt{-1}(-p_2p_3\sin^2(t) + |\alpha_0|^2\cos(\theta)\cos(t))\Big\},$$
$$B_{32} = -\frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2}\Big\{p_2\sin(\theta)\cos(t) - p_1p_3\cos(\theta)\cos(t)\sin(t)$$
$$-\sqrt{-1}(p_1p_2\sin(t) + p_3\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(t))\Big\},$$
$$B_{33}$$
$$= \frac{\sin^2(t)}{4|\alpha_0|^2}\{(p_2)^2 + \cos^2(\theta)\cos^2(t)(p_3)^2\} + \frac{\sqrt{-1}|\alpha_0|^2}{4}.$$

となる。同様に

$$A_{11} = C_{11} = -\frac{1}{4}\{(p_3)^2\sin^2(t) + \sqrt{-1}|\alpha_0|^2\},$$
$$A_{12} = A_{21} = C_{12} = C_{21}$$
$$= \frac{\sin(t)p_3}{4|\alpha_0|}\{p_1\sin(t) - \sqrt{-1}\sin(\theta)\cos(t)\},$$
$$A_{13} = A_{31}$$
$$= \frac{p_3\sin^2(t)}{4|\alpha_0|}\{p_3\cos(\theta)\cos(t) + \sqrt{-1}p_2\}$$
$$-\frac{\sqrt{-1}|\alpha_0|\cos(\theta)\cos(t)}{4},$$
$$A_{22} = \frac{1}{4|\alpha_0|^2}\{\sin(\theta)\cos(t) + \sqrt{-1}p_1\sin(t)\}^2,$$
$$A_{23} = A_{32} = -\frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2}\{(p_2\sin(\theta)\cos(t) - p_1p_3\cos(\theta)\cos(t)\sin(t))$$
$$+\sqrt{-1}(p_3\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(t) + p_1p_2\sin(t))\}$$
$$A_{33} = \frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2}\{(p_2 - \sqrt{-1}\cos(\theta)\cos(t)p_3)\}^2 - \frac{\sqrt{-1}|\alpha_0|^2}{4},$$
$$C_{13} = C_{31}$$
$$= \frac{p_3\sin^2(t)}{4|\alpha_0|}\{p_3\cos(\theta)\cos(t) - \sqrt{-1}p_2\} + \frac{\sqrt{-1}|\alpha_0|\cos(\theta)\cos(t)}{4},$$
$$C_{23} = C_{32} = \frac{\sin(t)}{4|\alpha_0|^2}\Big(p_2\sin(\theta)\cos(t) + p_1p_3\cos(\theta)\cos(t)\sin(t))$$
$$+\sqrt{-1}(-p_3\cos(\theta)\sin(\theta)\cos^2(t) + p_1p_2\sin(t)\Big),$$

$$C_{33} = \frac{\sin^2(t)}{4|\alpha_0|^2}\{p_2 - \sqrt{-1}p_3\cos(\theta)\cos(t)\}^2 + \frac{\sqrt{-1}|\alpha_0|^2}{4}.$$

上記の式から埋め込み φ_t に関する $*-$ scalar curvature $\tau^* = -4\{\mathrm{tr}A\overline{A} - 2\mathrm{tr}{}^t\overline{B}B + \mathrm{tr}C\overline{C}\}$ は次の式で与えられる。

Theorem 5.1 $\tau^* = 2\cos^2(\theta)\cos^2(t)$

Corollary 5.1 *$t \neq \pi/2 \bmod \pi$ であるとき $*-$ scalar curvature は定数ではない。*

従って誘導される概複素構造は等質にはなり得ない。さらに概複素構造の変形の次元が1以上となることが示された。

一方、$Spin(7)/(Sp(1)\times Sp(1)/Z_2) = G_3(\mathfrak{C})$ であることを用いると変形の次元は1次元しか可能性がないことが分る。従って上記の定理から概複素構造の moduli 空間の次元は1であることがわかる。

実際、群作用に注目して以下の様に示される。まず、部分群の作用 $\rho : Sp(1)\times Sp(1) \to Spin(7)$ は、次の様に与えられる。

$$\rho(q_1, q_2)(a + b\varepsilon) = q_1 a\overline{q_1} + (q_2 a\overline{q_1})\varepsilon$$

ここに、$(q_1, q_2) \in Sp(1)\times Sp(1), a + b\varepsilon \in \mathfrak{C}$ である。従って $S^2 = \{q_1 i\overline{q_1} | q_1 \in Sp(1)\}$ を指定すると S^2 を含む3次元部分空間 V と4次元部分空間

$$W = \mathrm{span}\{\overline{q_1}\varepsilon, (i\overline{q_1})\varepsilon, (j\overline{q_1})\varepsilon, (k\overline{q_1})\varepsilon\}$$

が指定される。1次元円 $S^1(\subset U \cong \mathbf{R}^2)$ は V の補空間 $V^\perp$ に含まれかつ $\dim W^\perp \cap U \leqq 1$ となることから概複素構造の moduli 空間の次元は1以下である。従って、定理により変形する次元は1であることが示された。

参考文献

[Br1] R. L. Bryant. Submanifolds and special structures on the octonions. J. Diff. Geom., 17 (1982) 185-232.

[H-L] R.Harvey and H.B.Lawson. Calibrated geometries. Acta Math., 148 (1982) 47-157.

[H1] H.Hashimoto. Characteristic classes of oriented 6-dimensional submanifolds in the octonians. Kodai Math. J.,16 (1993) 65-73.

[H2] H.Hashimoto. Oriented 6-dimensional submanifolds in the octonions **III** . Internat. J. Math and Math. Sci., 18 (1995) 111-120.

[HsL] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson. Minimal submanifolds of low cohomogenity. J. Differential geometry., 5 (1971) 1-38.

[KN] S.Kobayashi and K.Nomizu. Foundations of Differential geometry **II.** Wiley-Interscience, New York. 1968.