

### 3 次元双曲型空間の線形 Weingarten 曲面について

- On linear Weingarten surfaces in hyperbolic three-space -

東京電機大学工学部 國分雅敏 (Masatoshi Kokubu)

## 1 序

3次元双曲型空間  $H^3$  の曲面に関する微分幾何においては、平均曲率が一定値 1 の曲面 (CMC-1 曲面) や Gauss 曲率一定値 0 の曲面 (平坦曲面) が比較的良好に研究されている。([Br], [GMM1], [KRSUY], [KRUY], [KUY1], [KUY2], [R], [RUY], [UY] など参照されたい。) これらの曲面は、複素解析が有効に働くような、表現公式をもつ。つまり、Euclid 空間の極小曲面論における Weierstrass の公式の役割を担うような表現公式が存在する。

Gálvez, Martínez, Milán [GMM2] は CMC-1 曲面や平坦曲面を特別な場合として含むような Weingarten 曲面についても、やはり表現公式を導出した。彼らの研究の対象とした Weingarten 曲面は、Gauss 曲率  $K$  と平均曲率  $H$  がある定数  $\alpha, \beta$  に対して  $\alpha(H-1) = \beta K$  を満たすものである。彼らはそれを Bryant 型の線形 Weingarten 曲面 (BLW 曲面) と呼んだ。(CMC-1 曲面が Bryant 曲面とも呼ばれているから、そして、彼らの研究対象は CMC-1 曲面の一般化であるからだろう。)

筆者は彼らの仕事に興味をもち、それに関連してひとつプレプリント [K] を書いたが、まだまだ研究すべきことがたくさんあると思っている。そして何より、BLW 曲面について広く知ってもらいたいと思っている。そこで、本稿では、プレプリント [K] の内容の前段階 (動機, 背景, 基本事項) についてできる限り詳しく解説し、その上で [K] で得られた結果を紹介したい。

前半の第2節~4節は、 $H^3$  の曲面に関する動標構による方法で、主曲率の計算などから平行曲面に関するまでを述べた。初等的・基本的事項であるが極力定義・証明付きで述べ、self-contained に読めるように努めた。とくに平行曲面に関して詳しく解説し、平行曲面の不変量、およびいくつかの不変量が、その平行曲面族を決定付けることに言及した。このあたりのことは  $H^3$  に限定した形で述べてあるが、もちろん他の空間形  $E^3$  や  $S^3$  でもほとんど同じ方法で、同じような結果が得られることをあらかじめ断っておく。

後半の第5節~7節はプレプリント [K] の内容の紹介で、証明なしに結果のみの記述に留めた。大雑把に [K] の主結果を述べると、BLW 曲面は Riemann 面とその上の有理型関数、共形的定曲率計量から具体的に書き下せるということである。この結

果は大域的なものである。つまり、必ずしも単連結ではない Riemann 面  $M$  で始めても、 $M$  上の有理型関数  $G$  と共形的定曲率計量  $ds_g^2$  が具体的に与えられれば、それに対応する BLW 曲面も  $M$  からの写像として具体的に書き下すことができるのである。

## 2 基本事項

$L^4$  を Minkowski 空間とし、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  でその Lorentz 内積を表わす。すなわち  $x = (x^\alpha), y = (y^\alpha) \in L^4$  に対し、 $\langle x, y \rangle_L = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$  である。よく知られるように、

$$H^3 := \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = -1, x^0 > 0\}$$

は、単連結完備、定曲率  $-1$  の 3 次元 Riemann 多様体であり、これを 3 次元双曲型空間と呼ぶ。

$M^2$  を連結な向き付けられた曲面とし、 $f: M^2 \rightarrow H^3$  を immersion とする。また  $f$  の単位法ベクトル場を  $n$  と書く。  $e_1, e_2$  を  $M^2$  のある開集合  $U$  上で定義された局所正規直交枠とする。

### 構造方程式

$f, e_1, e_2, n$  をすべて  $L^4$  値関数と見て、局所枠  $(e_0 = f, e_1, e_2, e_3 = n): U \subset M^2 \rightarrow SO(1,3)$  を考えよう。  $de_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 e_\beta \otimes \omega_\alpha^\beta$  により定義される 1-form  $(\omega_\alpha^\beta)$  は  $o(1,3)$  に値をもつ。すなわち 1-form  $\omega_\alpha^\beta$  は

$$\omega_\alpha^\alpha = 0, \quad -\omega_i^0 + \omega_0^i = 0, \quad -\omega_3^0 + \omega_0^3 = 0, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad \omega_3^j + \omega_j^3 = 0$$

を満たす。

更に次の方程式が成り立つ：

$$de_0 = e_i \otimes \omega^i \tag{2.1}$$

$$de_i = e_0 \otimes \omega^i + e_j \otimes \omega_i^j + e_3 \otimes \omega_i^3 \tag{2.2}$$

$$de_3 = e_j \otimes \omega_3^j \tag{2.3}$$

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j \tag{2.4}$$

$$0(= d\omega^3) = -\omega_j^3 \wedge \omega^j \tag{2.5}$$

$$d\omega_2^1 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 - \omega^1 \wedge \omega^2 \tag{2.6}$$

$$d\omega_j^3 = -\omega_k^3 \wedge \omega_j^k \tag{2.7}$$

但しここで、添え字  $i, j, k$  は  $1 \leq i, j, k \leq 2$  を動くものとし、(Gauss の記法に従い) 上下の同じ添え字に関して和をとる場合、和の記号  $\sum$  は省略してある。また、 $\omega_0^i$  は  $\omega^i$  と略記している。以降においても、混乱のない範囲で、これらの記法を使う。

### 基本形式, 曲率

第一, 第二基本形式 I, II はその定義より,

$$I = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \quad II = \omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3$$

である。  $\omega_i^3 = h_{ij} \omega^j$  により関数  $h_{ij}$  を導入すれば、  $h_{ij} = h_{ji}$  が示せ、  $II = h_{ij} \omega^i \omega^j$  と表わせる。(2.6) と Gauss 曲率  $K$  の (内在的) 定義式  $d\omega_2^3 = K \omega^1 \wedge \omega^2$  より、  $K = -1 + h_{11}h_{22} - h_{12}^2$  が成り立つ。対称行列  $(h_{ij})$  の固有値を  $\kappa_1, \kappa_2$  で表わし、これらを主曲率と呼ぶ。また固有方向を主方向と呼ぶ。Gauss 曲率を主曲率で表わせれば  $K = -1 + \kappa_1 \kappa_2$  である。一方、主曲率の平均  $H := (\kappa_1 + \kappa_2)/2$  を平均曲率と呼ぶ。  $H$  は  $(h_{11} + h_{22})/2$  に等しい。まとめておこう:

$$K = -1 + h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = -1 + \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

第三基本形式は  $III = (\omega_1^3)^2 + (\omega_2^3)^2$  である。また、  $IV = \det(f, df, n, dn) = \omega^2 \omega_1^3 - \omega^1 \omega_2^3$  と置いて、これを第四基本形式と呼ぼう。  $v$  が主方向であることと  $IV(v, v) = 0$  が成り立つことが同値である。曲面上の曲線  $\gamma: I \rightarrow M^2$  は、その接ベクトルが常に主方向であるとき、曲率線と呼ばれる。言い換えれば、曲率線とは  $\gamma^* IV = 0$  を満たす曲線のことである。

### 双曲型 Gauss 写像

$L^4$  の光錐 (lightcone)

$$C := \{p \in L^4 \setminus \{0\}; \langle p, p \rangle_L = 0\}$$

を考える。超平面  $\pi: x_0 = 1$  と  $C$  の交わりが 2 次元球面に微分同相であることは明らかである。また、

$$C := \{ty \in L^4; y \in C \cap \pi, t \neq 0\}$$

だから、  $C$  の  $L^4$  からの誘導計量は

$$\langle dt \cdot y + tdy, dt \cdot y + tdy \rangle_L = dt^2 \langle y, y \rangle_L + 2tdt \langle y, dy \rangle_L + t^2 \langle dy, dy \rangle_L = t^2 \langle dy, dy \rangle_L$$

である。したがって、誘導計量は符号  $(0, +, +)$  の二次形式となる。(t 方向に零的 (null) である。)

さて、光錐  $C$  に同値関係「 $p \sim p' \iff p = \lambda p'$  for some  $\lambda$ 」を入れると  $C/\sim$  は球面に微分同相であり、上で述べた二次形式により共形構造が決まる。この共形的球面  $S^2$  は  $H^3$  の理想境界  $\partial H^3$  と呼ばれるものである。

曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  に対して、 $f \pm n$  は null であるから、理想境界への写像  $G^\pm = [f \pm n]: M \rightarrow S^2 = \partial H^3$  が定義できる。曲面  $f$  の双曲型 Gauss 写像とはこの  $G^\pm$  のことである。

### 中心曲面

曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3 \subset L^4$  の主曲率のひとつ  $\kappa_i$  が  $M^2$  上常に  $|\kappa_i| > 1$  であると仮定する。このとき、 $\kappa_i$  に対応する主曲率半径  $r_i$  が存在する。主曲率半径とは

$$\coth r_i = \kappa_i$$

を満たす実数値関数  $r_i$  のことである。この  $r_i$  を用いて

$$C_i = \cosh r_i e_0 + \sinh r_i e_3: M^2 \rightarrow H^3 \subset L^4$$

と定義される  $C_i$  を  $f$  の中心曲面もしくはコースティック (caustic) と呼ぶ。焦曲面 (focal surface) とも呼ぶ。ちょうど、 $C_i$  の像は、 $f$  の ( $\kappa_i$  に関する) 主曲率円の中心の軌跡を描く。一般に、曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  に対して中心曲面は  $M^2$  全体で定義されるとは限らない、詳しくは、 $C_i$  は  $U_i = \{p \in M^2 \mid |\kappa_i(p)| > 1\}$  上でしか定義されない。

最後に、中心曲面  $C_1, C_2$  の2つともが存在すると仮定し、それらから、もとの曲面  $f = e_0$  と単位法ベクトル場  $n = e_3$  が復元されることについて述べておこう。

$$C_1 = \cosh r_1 e_0 + \sinh r_1 e_3, \quad C_2 = \cosh r_2 e_0 + \sinh r_2 e_3$$

より、

$$\begin{aligned} C_1 \sinh r_2 - C_2 \sinh r_1 &= (\cosh r_1 \sinh r_2 - \sinh r_1 \cosh r_2) f \\ &= -\sinh(r_1 - r_2) f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 \cosh r_2 - C_2 \cosh r_1 &= (\sinh r_1 \cosh r_2 - \cosh r_1 \sinh r_2) n \\ &= \sinh(r_1 - r_2) n \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$f = \frac{1}{\sinh(r_1 - r_2)} (C_2 \sinh r_1 - C_1 \sinh r_2) \quad (2.8)$$

$$n = \frac{1}{\sinh(r_1 - r_2)} (C_1 \cosh r_2 - C_2 \cosh r_1) \quad (2.9)$$

である。

### 3 平行曲面

曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  と実数  $t$  に対し,  $f_t = \cosh t \cdot f + \sinh t \cdot n: M^2 \rightarrow H^3$  を距離  $t$  の位置にある平行曲面と呼ぶ.  $f_t$  の単位法ベクトル場は  $n_t = \sinh t \cdot f + \cosh t \cdot n$  で与えられる.

#### 平行曲面の特異点

一般には, 平行曲面  $f_t$  を考えたとき,  $f_t$  が immersion ではなくなってしまうような点, すなわち, 特異点もでてくる. 実際,

$$df_t = \cosh t \, de_0 + \sinh t \, de_3 = \cosh t \, e_i \omega^i + \sinh t \, e_i \omega_3^i = e_i (\cosh t \, \omega^i + \sinh t \, \omega_3^i)$$

より, 第一基本形式  $I_t = \langle df_t, df_t \rangle_L$  は

$$I_t = (\cosh t \, \omega^1 + \sinh t \, \omega_3^1)^2 + (\cosh t \, \omega^2 + \sinh t \, \omega_3^2)^2$$

となるから,  $\theta^i = \cosh t \, \omega^i + \sinh t \, \omega_3^i$  と置けば,  $f_t$  の特異点は  $\theta^1 \wedge \theta^2 = 0$  なる点に現れる.  $\theta^1 \wedge \theta^2 \neq 0$  なる点では  $\theta^1, \theta^2$  は  $f_t$  の正規直交双対枠である.

**命題 3.1.**  $p \in M^2$  が  $f_t$  の特異点となるのは,  $t$  が  $f$  の  $p$  における主曲率半径に等しいとき, かつそのときに限る.

Proof)  $p \in M^2$  が  $f_t$  の特異点であるための必要十分条件は  $(\cosh t \, \omega^1 + \sinh t \, \omega_3^1) \wedge (\cosh t \, \omega^2 + \sinh t \, \omega_3^2) = 0$  が  $p$  において成り立つことである. とくに,  $e_1, e_2$  が  $p$  で主方向であるような枠でこの条件を調べると ( $\omega_1^3 = \kappa_1 \omega^1, \omega_2^3 = \kappa_2 \omega^2$  だから)  $\kappa_i = \coth t$  が  $p$  で成り立つことに同値であることが分かる.  $\square$

この命題と中心曲面の定義から, 次が成り立つことがすぐ分かる.

**系 3.2.** 特異値集合  $S_i = \{f_t(p) \mid p \in M^2, \kappa_i(p) = \coth t\}$  ( $i = 1, 2$ ) は中心曲面 (の像) に一致する.

### 平行曲面の不変量

まず, 平行曲面  $f_t$  の基本形式は, 元の基本形式を使って

$$I_t = \cosh^2 t I - 2 \cosh t \sinh t II + \sinh^2 t III \quad (3.1)$$

$$II_t = -\cosh t \sinh t I + (\cosh^2 t + \sinh^2 t) II - \cosh t \sinh t III \quad (3.2)$$

$$III_t = \sinh^2 t I - 2 \cosh t \sinh t II + \cosh^2 t III \quad (3.3)$$

$$IV_t = IV \quad (3.4)$$

と書けることを注意しておく. 最後の式 (3.4) は第 4 基本形式  $IV$  が平行曲面族で不変であると主張しているわけだが, それ以外にも次のような不変量がある.

**命題 3.3.** 平行曲面 (族) は共通の

- (1) 双曲型 Gauss 写像  $G^\pm$  (2)  $KdA$  (Gauss 曲率  $\times$  面積要素)  
 (3) 比  $[\kappa_1 - \kappa_2 : 1 - \kappa_1 \kappa_2] (= [H^2 - K - 1 : K^2])$  (4) 臍点 (5) 曲率線  
 (6) 主曲率半径の差  $r_1 - r_2$  (7) 中心曲面を持つ.

Proof)

- (1) 次の等式より明らか:

$$\begin{aligned} [f_t \pm n_t] &= [(\cosh t e_0 + \sinh t e_3) \pm (\sinh t e_0 + \cosh t e_3)] \\ &= [(\cosh t \pm \sinh t)(e_0 \pm e_3)] = [e_0 \pm e_3]. \end{aligned}$$

- (2)  $I_t = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$ ,  $\theta^i = \cosh t \omega^i + \sinh t \omega_3^i$  であつた. (2.4), (2.7) より  $d\theta^i = -\omega_j^i \wedge \theta^j$  と計算される. したがつて,  $\omega_2^1$  は  $f_t$  の接続形式でもある. ゆえに  $(d\omega_2^1) = K_i \theta^1 \wedge \theta^2 = K \omega^1 \wedge \omega^2$ .

- (3) かつてな点  $p$  で,  $e_1, e_2$  が主方向であるような枠をとつておく. このとき,  $I(p) = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$ ,  $II(p) = \kappa_1(\omega^1)^2 + \kappa_2(\omega^2)^2$ ,  $III(p) = \kappa_1^2(\omega^1)^2 + \kappa_2^2(\omega^2)^2$  であるから, (3.1), (3.2) より

$$I_t(p) = \sum_i \{ \cosh^2 t - 2\kappa_i \cosh t \sinh t + \kappa_i^2 \sinh^2 t \} (\omega^i)^2$$

$$II_t(p) = \sum_i \{ -\cosh t \sinh t + \kappa_i (\cosh^2 t + \sinh^2 t) - \kappa_i^2 \cosh t \sinh t \} (\omega^i)^2$$

を得る。したがって、 $f_t$  の主曲率  $\kappa_i^{(t)}$  は  $p$  において、

$$\begin{aligned}\kappa_i^{(t)} &= \frac{-\cosh t \sinh t + \kappa_i(\cosh^2 t + \sinh^2 t) - \kappa_i^2 \cosh t \sinh t}{\cosh^2 t - 2\kappa_i \cosh t \sinh t + \kappa_i^2 \sinh^2 t} \\ &= \frac{-(\cosh t - \kappa_i \sinh t)(\sinh t - \kappa_i \cosh t)}{(\cosh t - \kappa_i \sinh t)^2} \\ &= \frac{\kappa_i \cosh t - \sinh t}{-\kappa_i \sinh t + \cosh t} = \begin{bmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{bmatrix} * \kappa_i \quad (3.5)\end{aligned}$$

である。 $p$  は任意だから、(3.5) は各点で成り立つ。

さて、 $\kappa_i^{(t)}$  は  $\tanh t$  を用いて  $\kappa_i^{(t)} = \frac{\kappa_i - \tanh t}{-\kappa_i \tanh t + 1}$  と表わせる。こ

れを  $\tanh t$  について解くと  $\tanh t = \frac{\kappa_i - \kappa_i^{(t)}}{1 - \kappa_i \kappa_i^{(t)}}$  となるから、

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_1^{(t)}}{1 - \kappa_1 \kappa_1^{(t)}} = \frac{\kappa_2 - \kappa_2^{(t)}}{1 - \kappa_2 \kappa_2^{(t)}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{1 - \kappa_1 \kappa_2} = \frac{\kappa_1^{(t)} - \kappa_2^{(t)}}{1 - \kappa_1^{(t)} \kappa_2^{(t)}}$$

を得る。

(4) これは (3) より明らか。

(5) これは (3.4) より明らか。

(6)  $f_t$  の主曲率半径を  $r_j^{(t)}$  と表わすと (3.5) より

$$\begin{aligned}\coth r_j^{(t)} &= \frac{\kappa_j \cosh t - \sinh t}{-\kappa_j \sinh t + \cosh t} = \frac{\coth r_j \cosh t - \sinh t}{-\coth r_j \sinh t + \cosh t} \\ &= \frac{\cosh r_j \cosh t - \sinh r_j \sinh t}{-\cosh r_j \sinh t + \sinh r_j \cosh t} = \frac{\cosh(r_j - t)}{\sinh(r_j - t)} \\ &= \coth(r_j - t).\end{aligned}$$

したがって、 $r_j^{(t)} = r_j - t$  である。ゆえに  $r_1^{(t)} - r_2^{(t)} = r_1 - r_2$  が成り立つ。

(7)  $r_j^{(t)} = r_j - t$  より、 $f_t$  の中心曲面  $C_i^{(t)} = \cosh r_i^{(t)} \cdot f_t + \sinh r_i^{(t)} \cdot n_t$  は、

$$\begin{aligned}C_i^{(t)} &= \cosh(r_i - t) \{ \cosh t \cdot f + \sinh t \cdot n \} \\ &\quad + \sinh(r_i - t) \{ \sinh t \cdot f + \cosh t \cdot n \} \\ &= \cosh((r_i - t) + t) \cdot f + \sinh((r_i - t) + t) \cdot n \\ &= \cosh r_i \cdot f + \sinh r_i \cdot n = C_i\end{aligned}$$

である。 □

命題 3.3 の逆に関する問題を考えることは自然であろう。それに関して次が成り立つ。

**定理 3.4.** 2つの曲面  $f, \tilde{f}: M^2 \rightarrow H^3$  に関して, 中心曲面  $C_i, \tilde{C}_i$  の一方が共通 (例えば  $C_1 = \tilde{C}_1$ ) で, 双曲型 Gauss 写像  $G^\pm$  も一致しているならば,  $f$  と  $\tilde{f}$  は同一の平行曲面族に属する。

Proof) 双曲型 Gauss 写像  $G^+$  が一致しているので  $e_0 + e_3 = \lambda(\tilde{e}_0 + \tilde{e}_3)$  と置くことができる。だから, 中心曲面  $C_1, \tilde{C}_1$  が一致しているという条件  $\cosh r_1 e_0 + \sinh r_1 e_3 = \cosh \tilde{r}_1 \tilde{e}_0 + \sinh \tilde{r}_1 \tilde{e}_3$  は

$$\begin{aligned} \cosh r_1 e_0 + \sinh r_1 \{\lambda(\tilde{e}_0 + \tilde{e}_3) - e_0\} &= \cosh \tilde{r}_1 \tilde{e}_0 + \sinh \tilde{r}_1 \tilde{e}_3 \\ \therefore (\cosh r_1 - \sinh r_1) e_0 &= (\cosh \tilde{r}_1 - \lambda \sinh r_1) \tilde{e}_0 + (\sinh \tilde{r}_1 - \lambda \sinh r_1) \tilde{e}_3 \end{aligned}$$

となる。つまり,  $e_0 = a\tilde{e}_0 + b\tilde{e}_3$  と置くことができる。ここで両辺それぞれのノルムをとれば  $a^2 - b^2 = 1$  でなければならないことに気づく。

さて,  $\langle de_0, e_0 \rangle_L = \langle de_0, e_3 \rangle_L = 0$  より  $\langle de_0, e_0 \pm e_3 \rangle_L = 0$  だが, これより  $\langle de_0, \tilde{e}_0 \pm \tilde{e}_3 \rangle_L = 0$  を得る。したがって,

$$\langle de_0, \tilde{e}_0 \rangle_L = \langle de_0, \tilde{e}_3 \rangle_L = 0.$$

一方,  $e_0 = a\tilde{e}_0 + b\tilde{e}_3$  を外微分した式  $de_0 = da\tilde{e}_0 + ad\tilde{e}_0 + db\tilde{e}_3 + b\tilde{d}e_3$  より,

$$-da + b\langle d\tilde{e}_3, \tilde{e}_0 \rangle_L = 0, \quad a\langle d\tilde{e}_0, \tilde{e}_3 \rangle_L + db = 0$$

となる。ここで,  $\langle d\tilde{e}_3, \tilde{e}_0 \rangle_L = 0, \langle d\tilde{e}_0, \tilde{e}_3 \rangle_L = 0$  を使って,  $da = db = 0$  を得る。すなわち,  $a, b$  共に定数である。これは,  $e_0$  が  $\tilde{e}_0$  の平行曲面であることに他ならない。□

**定理 3.5.**  $f, \tilde{f}: M \rightarrow H^3$  は共通の中心曲面を持ち (i.e.,  $C_1 = \tilde{C}_1, C_2 = \tilde{C}_2$ ), 主曲率半径の差も一致している (i.e.,  $r_1 - r_2 = \tilde{r}_1 - \tilde{r}_2$ ) とする。このとき,  $f$  と  $\tilde{f}$  は同一の平行曲面族に属する。

Proof) 仮定に注意して, まず, 前節の公式 (2.8), (2.9) より,

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \frac{1}{\sinh(r_1 - r_2)} (C_2 \sinh \tilde{r}_1 - C_1 \sinh \tilde{r}_2) \\ \tilde{n} &= \frac{1}{\sinh(r_1 - r_2)} (C_1 \cosh \tilde{r}_2 - C_2 \cosh \tilde{r}_1) \end{aligned}$$



を得る。したがって、双曲型 Gauss 写像は

$$\begin{aligned}
 [\tilde{f} \pm \tilde{n}] &= [C_1(\pm \cosh \tilde{r}_2 - \sinh \tilde{r}_2) + C_2(\sinh \tilde{r}_1 \mp \cosh \tilde{r}_1)] \\
 &= [C_1 e^{-\tilde{r}_2} + C_2(-e^{-\tilde{r}_1})] \text{ or } [C_1(-e^{\tilde{r}_2}) + C_2 e^{\tilde{r}_1}] \\
 &= [C_1 + C_2(-e^{\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1})] \text{ or } [C_1 - C_2 e^{-\tilde{r}_2 + \tilde{r}_1}] \\
 &= [C_1 + C_2(-e^{r_2 - r_1})] \text{ or } [C_1 - C_2 e^{-r_2 + r_1}] = [f \pm n]
 \end{aligned}$$

というように、一致する。後は、定理 3.4 から従う。

## 4 線形 Weingarten 曲面

Gauss 曲率  $K$  と平均曲率  $H$  に関数関係があるとき、その曲面は Weingarten 曲面と呼ばれる。つまり、Weingarten 曲面は 2 つの主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  に関数関係がある曲面と言っても良い。したがって、定理 3.3 の証明中で得た式 (3.5) から次がすぐに分かる。

**命題 4.1.** Weingarten 曲面の平行曲面はまた Weingarten 曲面である。

Weingarten 曲面の中でもとくに

$$aK + bH + c = 0 \text{ for some } [a : b : c] \in \mathbb{RP}^2$$

なる関係式を満たすものを線形 Weingarten 曲面と呼ぶ。

**命題 4.2.** 線形 Weingarten 曲面の平行曲面は、再び線形 Weingarten 曲面である。

Proof) 平行曲面  $f_t$  の主曲率の公式 (3.5) より、Gauss 曲率  $K_t$ 、平均曲率  $H_t$  は、元の  $H, K$  を用いて

$$K_t = \frac{K}{K \sinh^2 t - 2H \cosh t \sinh t + \cosh^2 t + \sinh^2 t} \quad (4.1)$$

$$H_t = \frac{H(\cosh^2 t + \sinh^2 t) - (2 + K) \cosh t \sinh t}{K \sinh^2 t - 2H \cosh t \sinh t + \cosh^2 t + \sinh^2 t} \quad (4.2)$$

と表わせる。(4.1), (4.2) より、

$$\begin{aligned}
 K &= (K_t)_{-t} = \frac{K_t}{K_t \sinh^2 t + 2H_t \cosh t \sinh t + \cosh^2 t + \sinh^2 t} \\
 H &= (H_t)_{-t} = \frac{H_t(\cosh^2 t + \sinh^2 t) + (2 + K_t) \cosh t \sinh t}{K_t \sinh^2 t + 2H_t \cosh t \sinh t + \cosh^2 t + \sinh^2 t}
 \end{aligned}$$

であるから、これらを  $aK + bH + c = 0$  に代入して、

$$\begin{aligned} 0 &= \{a + b \cosh t \sinh t + c \sinh^2 t\} K_t \\ &+ \{b(\cosh^2 t + \sinh^2 t) + 2c \cosh t \sinh t\} H_t \\ &+ 2b \cosh t \sinh t + c(\cosh^2 t + \sinh^2 t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

を得ることができるが、これは  $f_t$  が線形 Weingarten であることを意味する。□

上の証明における等式 (4.3) の右辺の各係数を  $a_t, b_t, c_t$  とする。すなわち、

$$\begin{aligned} a_t &= \{a + b \cosh t \sinh t + c \sinh^2 t\} \\ b_t &= \{b(\cosh^2 t + \sinh^2 t) + 2c \cosh t \sinh t\} \\ c_t &= 2b \cosh t \sinh t + c(\cosh^2 t + \sinh^2 t) \end{aligned}$$

とする。  $a_t, b_t, c_t$  の比  $[a_t : b_t : c_t]$  は

$$\begin{aligned} [a_t : b_t : c_t] &= [a : b : c] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cosh t \sinh t & \cosh^2 t + \sinh^2 t & 2 \cosh t \sinh t \\ \sinh^2 t & 2 \cosh t \sinh t & \cosh^2 t + \sinh^2 t \end{bmatrix} \\ &= [a : b : c] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \sinh 2t & \cosh 2t & \sinh 2t \\ \frac{1}{2}(\cosh 2t - 1) & \sinh 2t & \cosh 2t \end{bmatrix} \\ &= [1 : \cosh 2t : \sinh 2t] \begin{bmatrix} 2a - c & 0 & 0 \\ c & 2b & 2c \\ b & 2c & 2b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書くことができる。

行列  $\begin{bmatrix} 2a - c & 0 & 0 \\ c & 2b & 2c \\ b & 2c & 2b \end{bmatrix}$  の階数を求めると次のようになる：

$$\begin{aligned}
 \text{rk} &= \begin{cases} 3 & \iff c \neq 2a, b^2 \neq c^2 \\ 2 & \iff (c \neq 2a, b^2 = c^2 \neq 0) \text{ or } (c = 2a, b^2 \neq c^2) \\ 1 & \iff (c \neq 2a, b = c = 0) \text{ or } (c = 2a, b^2 = c^2) \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & \iff [a : b : c] = [1 : 0 : 0] \text{ or } [1 : \pm 2 : 2] \\ 2 & \iff [a : b : c] = [a : \pm b : b](2a \neq b \neq 0) \text{ or} \\ & [a : b : 2a](4a^2 \neq b^2) \\ 3 & \iff \text{otherwise} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1 & \iff K = 0 \text{ or } K \pm 2H + 2 = 0 \\ 2 & \iff aK + b(1 \pm H) = 0(2a \neq b \neq 0) \text{ or} \\ & a(K + 2) = bH(4a^2 \neq b^2) \\ 3 & \iff \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

ここで,

階数が3になるということは曲線  $r: t \mapsto [a_t : b_t : c_t]$  が full に入っていること；  
 階数が2になることは曲線  $r$  が1次元射影部分空間（射影直線）になっていること；  
 階数が1になることは曲線  $r$  が実は1点になっていること  
 を意味する。以上の考察より，線形 Weingarten 曲面のいくつかの特別なクラスに対して，次の命題が示されたことになる。

**命題 4.3.** (1) 平坦曲面 ( $K = 0$ ) の平行曲面は，再び平坦である。

(2)  $2H = \pm(K + 2)$  を満たす曲面は，その平行曲面も  $2H = \pm(K + 2)$  を満たす。

(3) 比  $[a : b](\neq [\pm 1 : 2])$  に対し  $bH = a(K + 2)$  を満たす曲面は，その平行曲面も  $b'H = a'(K + 2)$  を満たす。

(4) 比  $[a : b](\neq [1 : 0], [1 : 2])$  に対し  $aK + b(1 \pm H) = 0$  を満たす曲面は，その平行曲面も  $a'K + b'(1 \pm H) = 0$  を満たす。

## 5 Bryant 型の線形 Weingarten 曲面

以下，断らない限り  $\alpha(H - 1) = \beta K$  を満たす線形 Weingarten 曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  を考えることとする。とくに  $\beta = 0$  のとき，平均曲率が一定値1の曲面 (CMC-1 曲

面, Bryant 曲面) となることに由来して, しばしば Bryant 型の線形 Weingarten 曲面 (略して BLW 曲面) と呼ばれるものである.  $\alpha = 0$  のとき平坦曲面で,  $\alpha = 2\beta$  のとき,  $2H = K + 2$  の曲面であるから, (曲面の向きをとりかえれば, 平均曲率は  $H$  か  $-H$  になることも考慮すると) 前節の命題 4.3 における (1), (2), (4) のタイプの線形 Weingarten 曲面のすべてを総称して BLW 曲面と呼ぶと言ってもよい.

さて, 命題 4.3 (1), (2), (4) は, BLW 曲面は平行曲面をとっても BLW 曲面であることを主張しているのであるが, もう少し精密には

$$\mathcal{W}_{[\alpha:\beta]} := \{ \alpha(H-1) = \beta K \text{ を満たす Weingarten 曲面} \}$$

$$\mathcal{W} := \bigcup_{[\alpha:\beta] \in \mathbb{R}P^1} \mathcal{W}_{[\alpha:\beta]}$$

とおくと, 次の各サブクラス  $\mathcal{W}^i$  が平行曲面をとることに閉じていることを主張している.

$$\mathcal{W}^0 := \mathcal{W}_{[0:1]}, \quad \mathcal{W}^1 := \bigcup_{\lambda < 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]}, \quad \mathcal{W}^2 := \mathcal{W}_{[1:1/2]}, \quad \mathcal{W}^3 := \bigcup_{\lambda > 1/2} \mathcal{W}_{[1:\lambda]}$$

ここで,  $\mathcal{W}^0$  は平坦曲面のクラスであり,  $\mathcal{W}^1$  は CMC-1 曲面を含むクラスであることに注意したい. ( $\mathcal{W}^1$  に属する曲面は, 適当な CMC-1 曲面の平行曲面として得られるから)  $\mathcal{W}^0, \mathcal{W}^1$  に属する曲面は, 第 1 節で述べた意味でよく研究されていると言えよう. それに比べ,  $\mathcal{W}^2, \mathcal{W}^3$  に関してはあまり研究されていないようである. そこで  $\mathcal{W}^3$  について調べたくなるわけだが, それには  $\mathcal{W}^3$  のある代表的なサブクラス  $\mathcal{W}_{[1:\lambda]}$  ひとつについて調べれば十分であろう. このときの代表的なサブクラスは  $\mathcal{W}_{[1:1]}$  が適当と考える. なぜなら,  $\mathcal{W}_{[1:1]}$  に属する曲面は,  $H-1 = K$  を満たす曲面であり, この条件は主曲率の調和平均\*が一定値 1 であることと言い換えられる. そこで, 我々は, この曲面を HMC-1 曲面 (surfaces with harmonic-mean curvature one) と呼ぶ.  $\mathcal{W}^3$  は HMC-1 曲面を含むクラスと言える.

あとは  $\mathcal{W}^2$  が残るが, 実は  $\mathcal{W}^2$  は他のクラスと少し事情が違うことが次の補題, 命題から分かる. なので, 本稿ではこれ以上  $\mathcal{W}^2$  については取り扱わず, 別の機会にゆずりたい.

**補題 5.1** ([K]). BLW 曲面に対して,  $\alpha \neq 2\beta$  であるならば,  $\alpha I - 2\beta II$  は正定値か負定値である.

\*  $R^3$  の古典的曲面論 (Christoffel の時代) では, 主曲率の調和平均 (主曲率半径の平均) は, 基本的な量と考えられていたようである. (cf. [S, pp.299–302])

命題 5.2 ([K]).  $f: M^2 \rightarrow H^3$  が  $\alpha(H-1) = \beta K$  ( $\alpha \neq 2\beta$ ) を満たす BLW 曲面ならば,  $[\alpha I - 2\beta II]$  は  $M^2$  上に共形構造を定める. また,  $\langle de_0 + de_3, de_0 + de_3 \rangle_L \in [\alpha I - 2\beta II]$  である. したがって, 双曲型 Gauss 写像  $G^+: (M^2, [\alpha I - 2\beta II]) \rightarrow S^2$  は共形写像である.

逆に, 曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  がある定数  $\alpha_0, \beta_0$  ( $\alpha_0 \neq 2\beta_0$ ) に対し,

(1)  $\alpha_0 I - 2\beta_0 II$  が正定値または負定値

(2)  $G^+: (M^2, [\alpha_0 I - 2\beta_0 II]) \rightarrow S^2$  が共形的

ならば,  $f$  は全臍的曲面か  $\alpha_0(H-1) = \beta_0 K$  を満たす BLW 曲面である.

### 複素構造

向きを指定して  $M^2$  を Riemann 面と見たい. Bryant [Br] に習い,

$$\eta := (\omega^1 - \omega_1^3) - \sqrt{-1}(\omega^2 - \omega_2^3) (= \bar{\omega} - \pi)$$

と置く.

$$|\eta|^2 = \langle de_0 + de_3, de_0 + de_3 \rangle_L \in [\alpha I - 2\beta II]$$

だから,  $|\eta|^2$  と  $\alpha I - 2\beta II$  は (弱) 共形同値と言える. したがって, 向きの入れ方により,  $\eta$  は  $(1,0)$  か  $(0,1)$ -form となる. 我々は,  $M^2$  に  $\eta$  が  $(1,0)$ -form となるような複素構造を入れることとする.

## 6 表現公式

Gálvez, Martínez, Milán [GMM2] は BLW 曲面に対する表現公式を与えた. [K] では, その改良 (微分方程式を解かずに済むこと, 波面<sup>†</sup>で扱うこと, 曲面の周期条件を明確にすること) として, 次の結果を得た.

定理 6.1 ([K]).  $M$  を Riemann 面とする.  $M$  上の有理型関数  $G$  と, 定曲率  $\epsilon$  の共形的計量  $ds_\epsilon^2$  に対して, BLW 曲面  $f: M'(\subset M) \rightarrow H^3$  で,

(i)  $2\epsilon(H-1) = (\epsilon-1)K$

(ii)  $G$  は双曲型 Gauss 写像

---

<sup>†</sup>波面については次節で定義する. さしあたりこの節では, 波面とは曲面にある種の特異点を許容したものと理解しておけばよい.

であるようなものが構成できる。

実際の手順は以下のとおりである：

まず、 $M$  の普遍被覆  $\tilde{M}$  をとる。定曲率共形計量  $ds_\epsilon^2$  の存在より、正則写像  $h: \tilde{M} \rightarrow N(\epsilon)$  で

$$ds_\epsilon^2 = \frac{4|dh|^2}{(1 + \epsilon|h|^2)^2}$$

を満たすものが存在する。ここで、 $N(\epsilon)$  は、 $\epsilon$  の正、0、負に応じて  $N(\epsilon) = \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  or  $\mathbb{C}$  or  $D(1/\sqrt{-\epsilon}) = \{|z| < 1/\sqrt{-\epsilon}\}$  である。

この  $h$  を用いて

$$g = (-G_h)^{-3/2} \begin{bmatrix} -GG_h & GG_{hh}/2 - G_h^2 \\ -G_h & G_{hh}/2 \end{bmatrix} : \tilde{M} \setminus \{\tilde{p}_i\} \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

と定める。ここで、記号  $G_h, G_{hh}$  はそれぞれ  $dG/dh, d^2G/dh^2$  を意味し、 $\{\tilde{p}_i\} = \{\text{poles of } dh \text{ or } \{G; h\}dh\}$  である。ただし、 $\{G; h\}$  は  $h$  を変数と見て  $G$  を  $h$  で Schwartz 微分したものである。また、

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{1+\epsilon^2|h|^2}{1+\epsilon|h|^2} & -\epsilon\bar{h} \\ -\epsilon h & 1 + \epsilon|h|^2 \end{bmatrix}$$

と置いて  $f := g\mathcal{H}g^*$  とする。すると、 $f$  は (普遍被覆ではなく)  $M' := M \setminus \{p_i\}$  から  $H^3 = PSL(2, \mathbb{C})/PSU(2)$  への写像を定めることとなる。 $(p_i$  は  $\tilde{p}_i \in \tilde{M}$  に対応する  $M$  の点である。) この  $f$  を  $(G, ds_\epsilon^2)$  に関連した BLW 写像と呼ぶことにする。このように構成された  $f$  は特異点を持つ可能性がある。特異点をもたないためには、

$$\frac{(1 + \epsilon|h|^2)^2}{4} |\{G; h\}dh|^2 - \frac{(1 - \epsilon)^2 |dh|^2}{(1 + \epsilon|h|^2)^2}$$

が定値であることが必要十分で、この条件が満たされている場合、(もしくは定義域をそのような条件が満たされる範囲に制限すれば)  $f$  は BLW 曲面である。

## 例

実際に例を作るには、Riemann 面  $M$  とその上の有理型関数  $G$ 、および  $\tilde{M}$  からの正則写像  $h$  で始め、

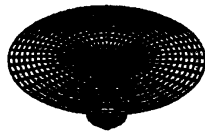
(1)  $ds_\epsilon^2$  が  $M$  上一価であるかどうかを見る

(2) 必要ならば  $dh$  や  $\{G; h\}dh$  の極を定義域  $M$  から取り除く

という手順が自然である。

例 6.2.  $M = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{0\} & \text{if } \epsilon \geq 0 \\ D(1/\sqrt{-\epsilon}) \setminus \{0\} & \text{if } \epsilon < 0 \end{cases}$  とその上の有理型関数  $G(z) = z$  を考える。

また,  $h(z) = \sqrt{z}$  を考えると  $ds_\epsilon^2 = \frac{|dz|^2}{|z|(1+\epsilon|z|)^2}$  となつて, これは  $M$  上一価である。したがって, この  $(G, h)$  は  $M$  からの BLW 写像を定める。実際,  $\epsilon$  が  $-1, 0, 1$  の場合, すなわち HMC-1, Flat, CMC-1 の図を下に載せておく。(  $H^3$  は Poincaré 球モデルで実現してある。)



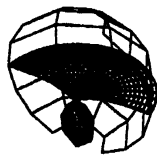
HMC-1



CMC-1



FLAT



## 7 波面

曲面  $f: M^2 \rightarrow H^3$  と単位法ベクトル場の組  $(f, n)$  は単位法バンドル  $T_1H^3$  への写像と見なせる。このとき,  $M$  上で 1-form  $\langle df, n \rangle_L$  は消えているのであるが, これは  $T_1H^3$  上の標準的な接触形式の  $(f, n)$  による引き戻しが 0 という意味づけができる。

定義 7.1. immersion  $L = (\phi, \nu): M^2 \rightarrow T_1H^3 (\cong T_1^*H^3)$  が Legendre はめ込みであるとは,  $T_1H^3$  上の接触形式の  $L$  による引き戻しが 0 であることを意味する。このとき, 射影  $\phi: M^2 \rightarrow H^3$  は wave front(波面) と呼ばれる。また,  $\phi$  から見て  $(\phi, \nu)$  を Legendre 持ち上げと呼ぶ。

$f: M^2 \rightarrow H^3$  が immersion ならば ( $f$  を  $(f, n)$  の射影と解釈して) 波面であるが, 逆に, 波面  $\phi: M^2 \rightarrow H^3$  自身には immersion であることは要請していないことに注意されたい.

曲面の平行曲面をとり, 特異点が生じたものは波面である. また, 最初に波面から始めても, その平行曲面族を定義することができる. したがって, 我々の研究対象 BLW 曲面も BLW 波面の範疇で扱ったほうが都合がよいことが多い.

**命題 7.2** ([K]).  $f: M \rightarrow H^3$  を BLW 写像とする. 3条件

- (i)  $f$  は波面である.
- (ii) 第一基本形式  $I$  の  $(1, 1)$ -part  $I^{1,1}$  が正定値である.
- (iii) 複素正則曲線  $\mathcal{G}: \tilde{M} \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$  が非特異である.

を考える. このとき,

- (1)  $\epsilon \neq 1$  ならば (i), (ii), (iii) は同値である.
- (2)  $\epsilon = 1$  ならば, (i) と (iii) は同値である. また, (i) または (iii) が成り立つならば 第一基本形式  $I$  は正定値となる. つまり, CMC-1 波面は必然的に CMC-1 はめ込みでなければならない.

CMC-1 曲面を除いて, BLW 曲面には完備であるものが少ない. しかしながら  $I^{1,1}$  が完備 Riemann 計量であるとき BLW 波面は弱完備であると定義すると, 弱完備な BLW 波面は豊富に存在することとなり, 大域的研究がより興味深くなる.

## 8 終わりに

$H^3 = \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = -1, x^0 > 0\}$  であったのに対し,  $S_1^3 := \{x \in L^4; \langle x, x \rangle_L = 1\}$  は定曲率 1 をもつ Lorentz 多様体であり, 3次元 de Sitter 空間と呼ばれる.  $H^3$  の波面と  $S_1^3$  の空間的波面は密接な関連がある. というのも,  $H^3$  の波面  $f$  に対してその単位法ベクトル場  $n$  は  $S_1^3$  への写像と見なせる. このとき  $n$  を  $S_1^3$  の波面と見るならば, 今度は  $f$  がその単位法ベクトル場となる. つまり,  $f$  と  $n$  の役割が互いに入れ替わる. それだけに留まらず, 主曲率を調べることにより, 次のような対応が見つかる.



$f: M \rightarrow H^3$		$n: M \rightarrow S_1^3$
Weingarten	$\iff$	Weingarten
totally umbilical	$\leftrightarrow$	totally umbilical
LW	$\iff$	LW
CGC- $c$	$\leftrightarrow$	CGC- $(c/(c+1))$
minimal	$\leftrightarrow$	minimal
CMC- $k$	$\leftrightarrow$	HMC- $(1/k)$
HMC- $(1/k)$	$\leftrightarrow$	CMC- $k$
BLW	$\iff$	BLW
flat	$\leftrightarrow$	flat
CMC-1	$\leftrightarrow$	HMC-1
HMC-1	$\leftrightarrow$	CMC-1
PC-1	$\leftrightarrow$	PC-1

つまり,  $H^3$  の興味深い Weingarten 波面は, その単位法ベクトル場の作る  $S_1^3$  の波面でも興味深い Weingarten 波面になっている。(逆もまたそうである。) したがって,  $H^3$  または  $S_1^3$  の一方で Weingarten 波面の研究を進めれば, 他方の研究結果も自然と導けることがあるだろう。もしくは, Legendre はめ込み  $L: M^2 \rightarrow T_1H^3$  の研究は, いっぺんに,  $H^3$  と  $S_1^3$  の波面論を研究することとよいのではないだろうか。

$S_1^3$  の CMC 1 曲面などは [F] およびその参考文献にある論文を参照されたい。

## 参考文献

- [Br] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, in *Théorie des variétés minimales et applications*, Astérisque, 154–155 (1988), 321–347.
- [F] S. Fujimori, *Spacelike CMC 1 surfaces with elliptic ends in de Sitter 3-Space*, Hokkaido Math. J., 35 (2006), 289–320.
- [GMM1] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Math. Ann., 316 (2000), 419–435.
- [GMM2] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, *Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. A Plateau problem at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc., 356 (2004), no. 9, 3405–3428.

- [K] M. Kokubu, *Surfaces and fronts with harmonic-mean curvature one in hyperbolic three-space*, preprint, math.DG/0504124.
- [KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math. **221** 303–351.
- [KRUY] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [KUY1] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *An elementary proof of Small's formula for null curves in  $PSL(2, \mathbb{C})$  and an analogue for Legendrian curves in  $PSL(2, \mathbb{C})$* , Osaka J. Math., **40**(3) (2003), 697–715.
- [KUY2] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **216** (2004), no.1, 149–175.
- [R] P. Roitman, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space as normal surfaces to a congruence of geodesics*, preprint.
- [RUY] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *A new flux for mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space, and applications*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2147–2154.
- [UY] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space*, Ann. of Math. (2) **137** (1993), no.3, 611–638.
- [S] M. Spivak, A COMPREHENSIVE INTRODUCTION TO DIFFERENTIAL GEOMETRY, Vol. V, Publish or Perish, Inc., (1979).