数理解析研究所講究録
1529 巻 2007 年 26-41



# 特異値分解とウェーブレットを使った画像処理

大阪教育大学 数理科学　芦野 隆一 (Ryuichi Ashino)
Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University
大阪電気通信大学 数理科学研究センター　萬代 武史 (Takeshi Mandai)
Research Center for Physics and Mathematics
Osaka Electro-Communication University
大阪教育大学 情報科学　守本 晃 (Akira Morimoto)
Information Science, Osaka Kyoiku University

**概要**

本論文は著者達が特異値分解とウェーブレットを使った画像処理に関して Michihiro Nagase (Osaka University), Weibin Qi (University of Ottawa), Shinichi Shimano (Osaka Kyoiku University), Rémi Vaillancourt (University of Ottawa) と共同研究を行った際に用いた基本的なアイデアについて説明する.

## 1 導入

グレースケールのディジタル画像とは, 0 から 1 までの実数に値を持つ行列 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ である. ディジタル画像ではそれぞれの実数は画素またはピクセルと呼ばれ, 0 は黒に対応し, 1 は白に対応する. (図 1 を参照せよ.) 灰色は 0 から 1 の間の値に対応する. 通常のコンピュータは $2^8 = 256$ 段階 (階調という) の値しかとれないので, 0 から 255 の整数値を並べる場合もある.

画像処理とは, このディジタル画像を表す画像行列の左右から適当な行列 $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ をかけて, ディジタル画像の持っている目的とする情報にアクセスしたり, 新しい画像行列 $X_1 = UXV \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を得ることである. 新しい画像行列 $X_1$ に何らかの処理 (たとえば, 0 に近い成分を 0 とすれば画像圧縮ができる) を行って $X_2$ を得たとする. 元の画像行列 $X$ と比較できる処理画像 $X_3$ を得るには, $X_3 = U^{-1}X_2V^{-1}$ というように左右からはじめにかけた行列 $U, V$ の逆行列をそれぞれ左右からかければよい. この過程は再構成と呼ばれる. 再構成ができるためには, $U, V$ はそれぞれ正則行列でなければならない. また, 画像 $X$ 全体の明るさは $X$ のフロベニウスノルム (行列成分の 2 乗和の平方根) $\|X\|_F$ で表現できる. 画像全体の明るさを一定に保つ, つまり $\|X_1\|_F = \|X\|_F$ で

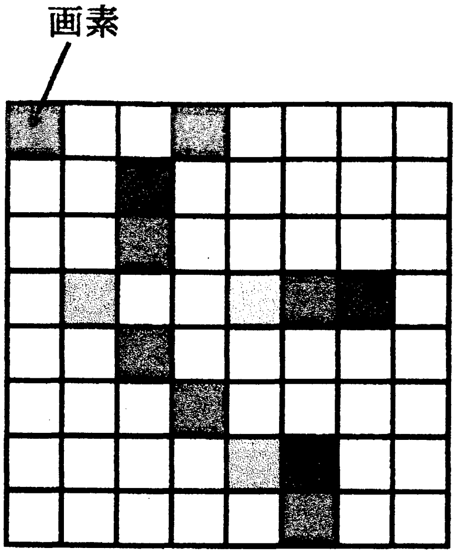


図 1: ディジタル画像の画素

あるためには，左右からかける行列 $U, V$ はそれぞれ直交行列であればよい．このことから，右からかける行列 $V$ は $V^T$ の形が使われる．($V^T$ は $V$ の転置行列を表す.) 左右からかける行列 $U, V$ は画像行列に依存することもある．この場合，処理は適応的といわれる．後で述べる特異値分解を使う場合が適合的処理の例である．

一般には行列 $X_1 = UXV^T$ の成分は 0 から 1 までの実数ではないので，グレースケールのディジタル画像とするためには，行列成分の値を 0 から 1 までの実数とする処理が必要である．たとえば，行列成分（あるいは行列成分の絶対値）の最小値を 0 に対応させ，最大値を 1 に対応させるような線形変換を行うといった各種の方法があり，方法によって画像の見え方が大きく違うので注意が必要である．

## 2 特異値分解

任意の行列 $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ に対して，$m$ 次直交行列 $U$ と $n$ 次直交行列 $V$ があって，

$$U^T XV = S := \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X = USV^T$$

が成り立つ．ここで，$S_1$ は $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_r > 0$ を対角成分に持つ正則な対角行列であり，$r$ は $X$ の階数である．特異値分解の歴史については [17] を見よ．

**SVD 近似**

$B$ が階数 1 の行列であるとすると，$B$ の各列ベクトルは $u$ のスカラー倍となり，$B = uv^T$ と表される．

SVD を使って $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を階数 1 の行列の和で表すと，

$$X = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i v_i^T$$

となる．この表現で，初めの $r$ 項までの和は $X$ の階数 $r$ の近似：

$$X_r = \sum_{i=1}^{r} s_i u_i v_i^T$$

を与える．$X$ を $X_r$ で近似するときの誤差は

$$E_r = X - X_r = \sum_{i=r+1}^{m} s_i u_i v_i^T$$

で表される．このとき，

$$\|E_r\|_F^2 = \sum_{i=r+1}^{m} s_i^2, \qquad \|X\|_F^2 = \|X_r\|_F^2 + \|E_r\|_F^2$$

が成り立つ．ノルム $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルム．$X_r$ はフロベニウスノルムに関して最良の階数 $r$ 近似を与えることが知られている．たとえば，[11] や [8] を見よ．相対誤差は

$$\frac{\|E_r\|_F}{\|X\|_F} = \sqrt{\sum_{i=r+1}^{m} s_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{m} s_i^2}$$

と表され，通常 $r < \min\{m, n\}$ はこの相対誤差を適当に定めた閾値より小さくなるように選ぶ．

# 3 離散コサイン変換

JPEG（ISO により設置された専門家組織の名称 Joint Photographic Experts Group がそのまま使われている）で知られている静止画像データの圧縮方式では離散コサイン変換が使われる．直交行列 $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ を

$$U(i,j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{m}}, & i = 1, \\ \sqrt{\frac{2}{m}}\cos\left(\frac{\pi(2j-1)(i-1)}{2m}\right), & 2 \le i \le m. \end{cases} \tag{1}$$

とおく．$U$ の $m$ を $n$ で置き換えた直交行列が $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ である．画像行列 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ の離散コサイン変換は $X_1 = UXV^T$ で定義され，$X_1$ の逆離散コサイン変換は $X = U^T X_1 V$ で定義される．$U, V$ は画像行列 $X$ には依存しない．

# 4 離散ウェーブレット変換

JPEG 2000 では離散ウェーブレット変換が使われる．正規直交ウェーブレットの場合には，スケーリング関数 $\varphi(x)$ は伸張方程式

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\ell} h_k\sqrt{2}\,\varphi(2x-k) \tag{2}$$

の解である．ここで，$\{h_k\}$ はある有限数列である．ウェーブレット関数 $\psi(x)$ はウェーブレット方程式

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\ell} g_k\sqrt{2}\,\varphi(2x-k), \quad g_k = (-1)^k h_{\ell-k} \tag{3}$$

の解である．これらの有限数列 $\{h_k\}, \{h_k\}$ を使って行列 $U, V$ を定義する．簡単のために $m, n$ は偶数であるとする．$U$ の上半分の行は $\{h_n\}$ で作る．第 1 行は $h_0, h_1, \ldots, h_\ell, 0, \ldots$ とし，第 2 行は第 1 行を右に 2 つ移動して $0, 0, h_0, h_1, \ldots, h_\ell, 0, \ldots$ とする．以下同様にすぐ上の行を右に 2 つずつ移動して作る．右にはみ出すときは，左端に順に送って周期 $n$ の数列にする．下半分の行は $\{g_n\}$ を使って同様に作る．$V$ は $U$ の $m$ を $n$ に置き換えて同様に作る．画像行列 $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ の離散ウェーブレット変換は $X_1 = UXV^T$ で定義され，$X_1$ の逆離散ウェーブレット変換は

$X = U^T X_1 V$ で定義される．この定義の場合には周期境界条件を考えていることになる．

双直交ウェーブレットの場合には行列 $U, V$ は直交行列ではない．逆離散ウェーブレット変換は別の数列を使った $\widetilde{U}, \widetilde{V}$ を使って $X = \widetilde{U}^t X_1 \widetilde{V}$ で定義される．

この定義からわかるように，$U, V$ はそれぞれ 2 つの部分から成り，$U$ は 画像行列の列ベクトルに対して働き，$V$ は画像行列の行ベクトルに対して働くので，画像行列は 4 つの部分に分解される．

# 5 SVD とウェーブレットによる画像圧縮

数値解析や画像処理で共通する二つの知見は以下の通りである．

(1) スケールの逆数は周波数

小さいスケールは大きな周波数に対応し，大きいスケールは小さな周波数に対応する．ウェーブレット解析，とりわけ多重解像度解析 (MRA) はこの知見に数学的な説明を与える．

(2) スケールとエネルギーの関連

小さいスケールは急激な変化に対応し，急激な変化のエネルギーは変化のエネルギーの中で小さな割合を占める．大きいスケールは穏やかな変化に対応し，穏やかな変化のエネルギーは変化のエネルギーの中で大きな割合を占める．ある意味で，SVD MRA はこの知見に意味を与える試みであるといえる．

**SVD 多重解像度解析**

$n$ 次元行ベクトルを $[x(1) \cdots x(n)]$ と表し，$m \times n$ 行列 $X$ を

$$X = \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & \cdots & x(1,n) \\ x(2,1) & x(2,2) & \cdots & x(2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(m,1) & x(m,2) & \cdots & x(m,n) \end{bmatrix}$$

と表す．行列 $X$ の第 $k$ 行と第 $\ell$ 列をそれぞれ $X(k,\cdot), X(\cdot,\ell)$ と表す．

有限な 1 次元信号 $X=[x(1),\ldots,x(N)]$ を考える．$N$ は $2^L$, $L\in\mathbb{N}$ で割り切れるとする．レベル 1 の $2\times N/2$ データ行列 $X_1$ を

$$X_1=\begin{bmatrix} x(1) & x(3) & \cdots & x(N-1) \\ x(2) & x(4) & \cdots & x(N) \end{bmatrix}$$

で定義する．$X_1$ に SVD を適用すると，

$$X_1=U_1S_1V_1^T=\sum_{k=1}^{2} s_1(X;k)U_1(\cdot,k)V_1(\cdot,k)^T.$$

周波数・スケール・エネルギーの対応関係により，

$$s_1(X;1)U_1(\cdot,1)V_1(\cdot,1)^T:\text{近似},$$

$$s_1(X;2)U_1(\cdot,2)V_1(\cdot,2)^T:\text{詳細}$$

と定義する．

$$S_1V_1^T=U_1^TX_1\in\mathbb{R}^{2\times N/2}$$

に注意する．第 1 行 $U_1^TX_1(1,\cdot)$ の各成分には $s_1(X;1)$ がかかっているので，$U_1^TX_1(1,\cdot)$ を近似係数と定義し，第 2 行 $U_1^TX_1(2,\cdot)$ の各成分には $s_1(X;2)$ がかかっているので，$U_1^TX_1(2,\cdot)$ を詳細係数と定義する．

- 多重レベルの分解は $X_2=U_1^TX_1(1,\cdot)$ とおき SVD MRA を適用する．

### 2-D SVD MRA

図 2 のように近似と 3 つの詳細が得られるように 4 行の行列に並べ替えて SVD を適用し，元の行列に並べ戻す．2-D SVD MRA は画像を近似と詳細に分解するが，一般には詳細を水平・垂直・対角方向には分解しない．(図 3 参照.)

### 圧縮の符号化の方法

SPIHT アルゴリズム [16] を使う．SPIHT はゼロツリーアルゴリズムを使っている．つまり，詳細係数の絶対値が小さいならば，別のレベルの詳細係数も対応する部分の絶対値が小さいことを使っている．(図 4 参照.)

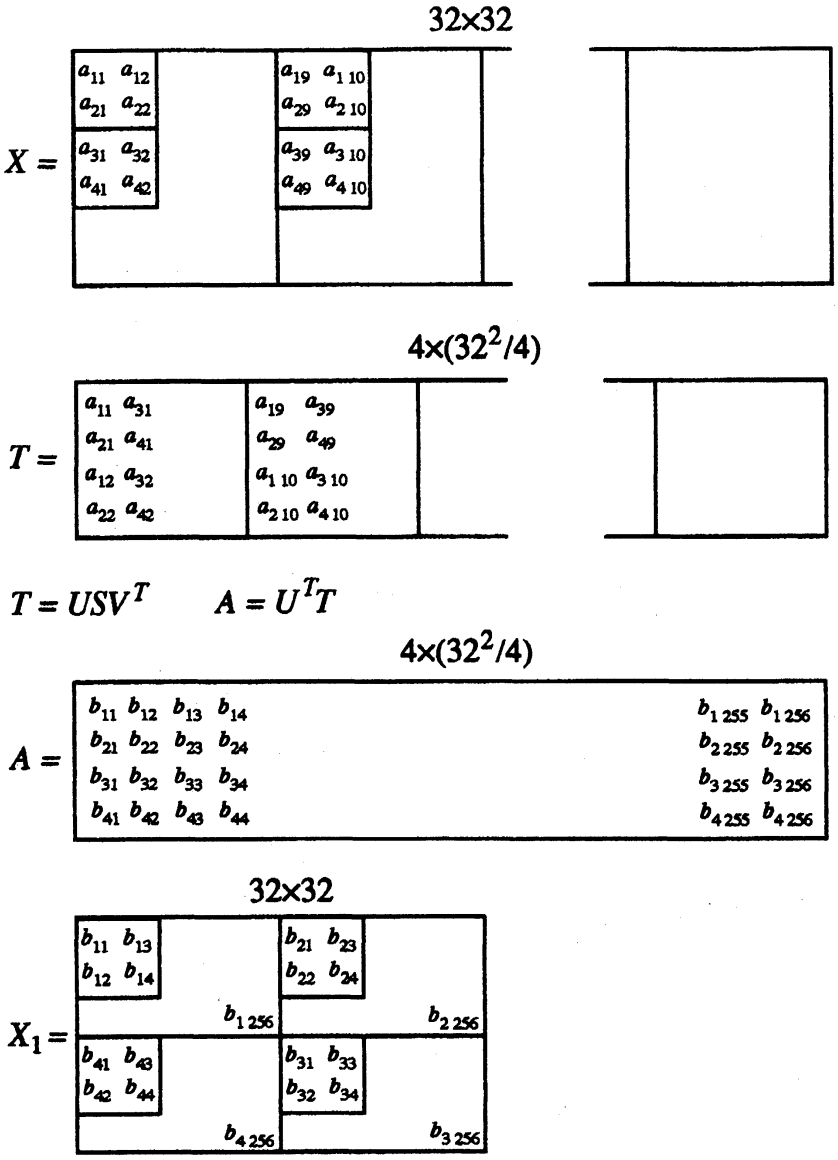


図 2: 32 × 32 行列に対する 2-D SVD MRA.

### ウェーブレットー SVD ハイブリッド法

ウェーブレットは 2-D SVD MRA + SPIHT よりもパフォーマンスがよいので，ウェーブレットと SVD MRA を使った方法を提案する．その方法は次の 3 つのステップからなる．

(i) $m \times n$ 画像行列 $X$ を 9/7 双直交ウェーブレットによる離散ウェーブレット変換を用いてレベル 2 まで分解し，その分解画像を $X_1$ とおく．

(ii) $X_1$ に対して $2 \times 2$-block SVD MRA を用いてレベル 2 まで分解

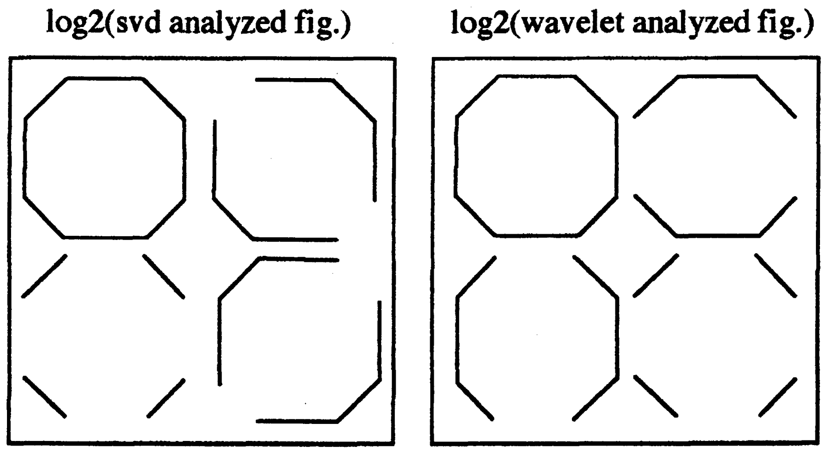


図 3: SVD（左）と 9/7 双直交ウェーブレット（右）を使って 8 角形を近似と詳細に分解.

し，その分解画像を $X_2$ とおく.

(iii) $X_2$ を SPIHT を使って符号化し，gzip を使って圧縮する.

## 結論

(i) SVD 分解はデータに依存しており時間周波数領域でデータを扱うことはできないが，ウェーブレットを組み合わせて時間周波数を行うことによりパフォーマンスがよくなった.（図 5 参照.）

(ii) 再構成の最後の段階でフィルタ長の長いウェーブレットを使うので，SVD に比べブロック歪みは少なくなった.

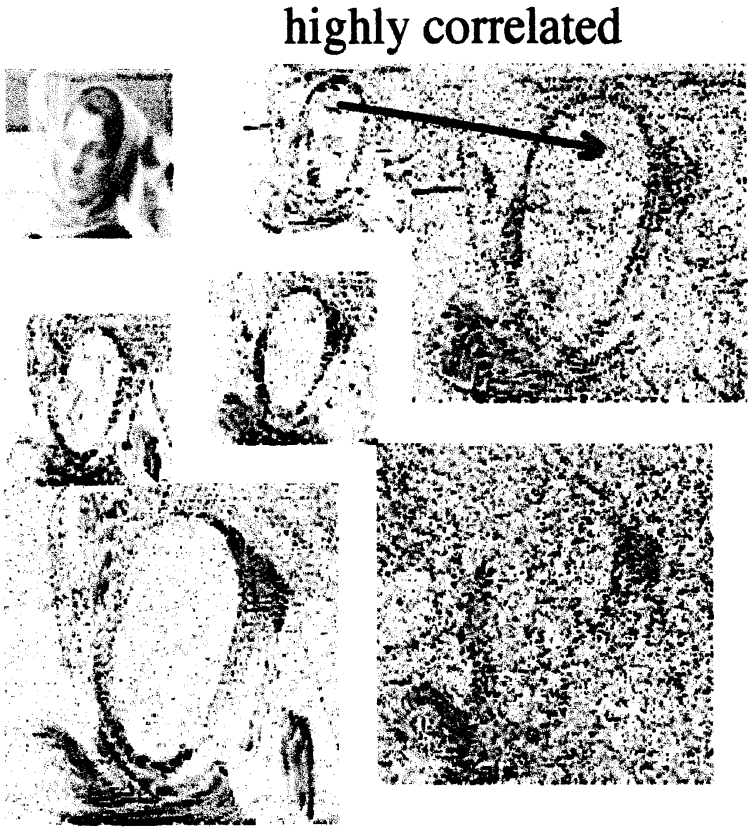


図 4: 詳細係数の強い相関関係（詳細は nagative.）

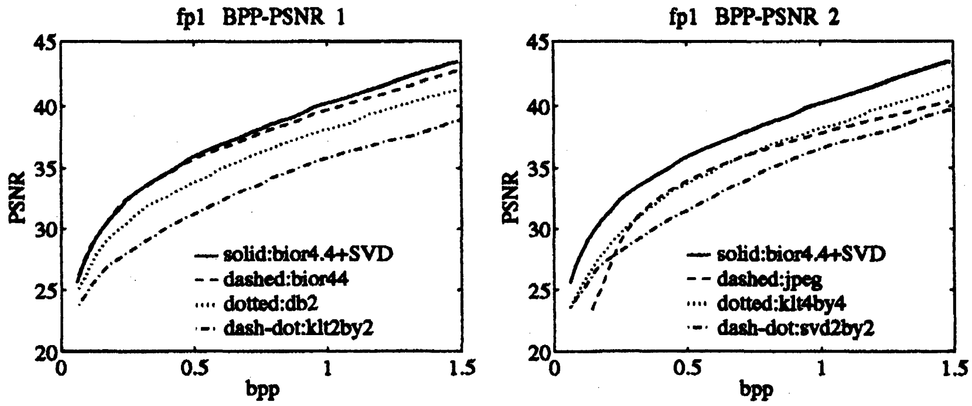


図 5: PSNR curve against bpp for `fp1` with: (left) `bior4.4+SVD`, `bior4.4`, `db2`, `klt2by2`; (right) `bior4.4+SVD`, `jpeg`, `klt4by4`, and `svd2by2`.

# 6 SVD とウェーブレットによる雑音除去

## BlockSvd 法

BlockSvd [6] による雑音除去は次の 4 つのステップからなる．

- 画像を小さなブロックに分割する．
- それぞれのブロックを SVD で分解する．
- それぞれのブロックの特異値と特異ベクトルから雑音の影響と思われるものを取り除く．
- 画像を再構成する．

原画像を $K \times L$ 行列 $F$ とし，$N$ を $K \times L$ ランダム行列とする．雑音が入った行列を $G = F + N$ とする．$K = kb$, $L = lb$ と仮定し，雑音が入った行列を $b \times b$ サイズの正方形ブロックに分解する．それぞれのブ

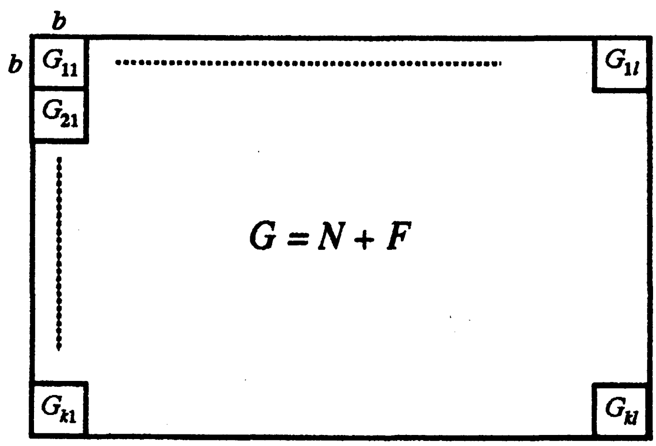


図 6: $G$ を $b \times b$ ブロックに分解

ロックを SVD で分解すると

$$G_{ij} = U_{ij} S_{ij} V_{ij}^T, \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, l.$$

これは次のように表せる．

$$G_{ij} = \sum_{r=1}^{R} U_{ijr} S_{ijr} V_{ijr}^T.$$

雑音は画像の特異値と特異ベクトルに影響を与えるはずである．このことは，$K \times L$ サイズの全体画像についても，それぞれの $b \times b$ サイズのブロック画像についても正しい．

雑音が画像に直交していると思えば，雑音を付加した画像は元の画像よりも大きなエネルギーを持つ．つまり，雑音付加により特異値は増加するはずである．このことは数値実験により確かめることができる．

**問題**：雑音を付加した画像の特異値をどのように減らせば，原画像の特異値に近づけることができるか？

**観察**：原画像のそれぞれの $b \times b$ サイズのブロック画像の特異値を $\widetilde{s}_{ijr}$ とし，雑音を付加した画像のそれぞれの $b \times b$ サイズのブロック画像の特異値 $s_{ijr}$ とする．いろいろな画像とガウシアン雑音について $s_{ijr} - \widetilde{s}_{ijr}$ の $i, j$ に関する平均の分布を調べ，高さを 1 に正規化したユニバーサルな重み関数 $w(r)$ を求める．

[6] は重み関数 $w(r)$ を放物線

$$w(r) = 1 - \left(1 - \frac{r-1}{b/2}\right)^2, \qquad r = 1, 2, \ldots, b$$

で与えた．

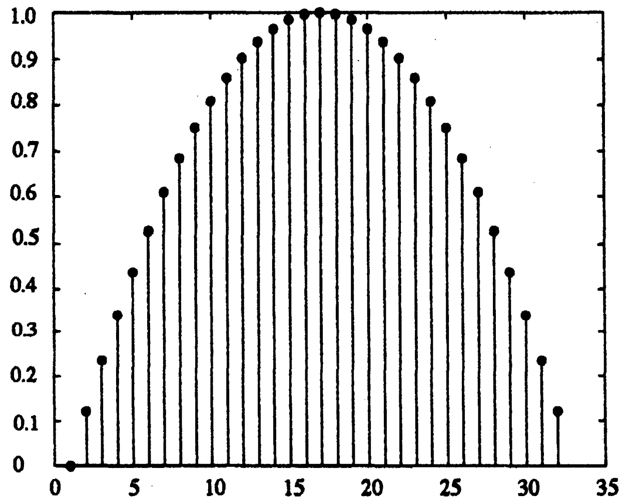


図 7: Devčić & Lončarić による正規化された重み関数

それぞれの $b \times b$ サイズのブロック画像の特異値の最後から $t$ 個の平均を

$$n_s = \frac{1}{k \times l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \sum_{r=b-t+1}^{b} s_{ijr}$$

とおく．これは雑音の分散ではないが，雑音の分散に比例していると考えられる．

第 1 段階：　雑音が付加された画像に応じて適当に値を取るパラメータを $p_1$ とし，それぞれの $b \times b$ サイズのブロック画像の特異値 $s_{ijr}$ を

$$\hat{s}_{ijr} = s_{ijr} - p_1 n_s w(r)$$

によって修正する．

第 2 段階：　特異値ベクトルを離散フーリエ変換し，雑音が付加された画像に応じて適当に値を取るパラメータを $p_2$ を使って，高周波部分を減らして逆離散フーリエ変換して修正した特異値ベクトルを得る．

### 我々の観察

重み関数は放物線でない．($b = 32$ とした．)

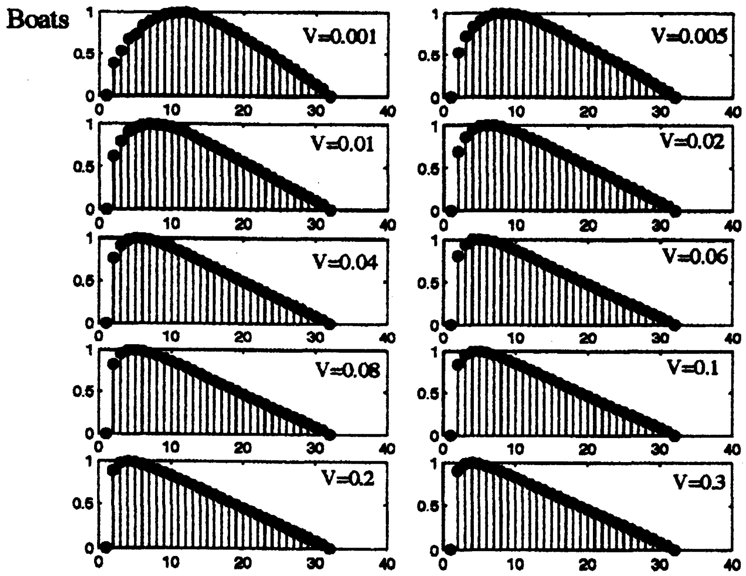


図 8: いろいろな分散の平均 0 のガウシアン雑音を付加した場合の特異値の差の平均（画像は Boats）

### スプライン法

BlockSvd アルゴリズムで我々のデザインした正規化された重み関数 $w(r)$ を使う．

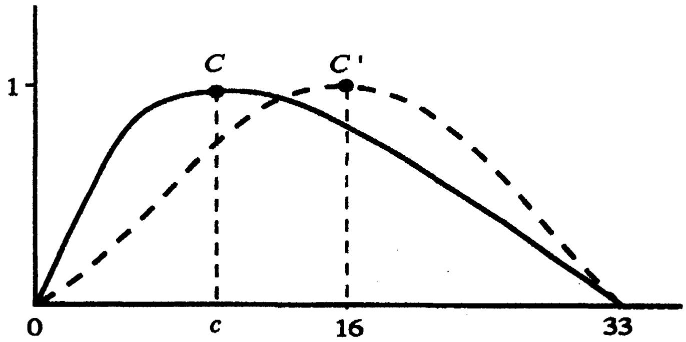


図 9: 点線は Devčić & Lončarić の重み関数，実線は我々の重み関数

スプラインーウェブレット法

スプライン法の第 2 段階：離散フーリエ変換を使うフィルタリングをウェーブレットを使ったフィルタリングで置き換える．
第 1 段階（スプライン）：

- ブロック分割した画像を特異値分解する．
- スプライン法により重み関数をデザインする．
- それぞれのブロックで特異値から雑音の影響を除去する．
- 画像を再構成する．

第 2 段階（ウェーブレット）：

- 第 1 段階で処理された画像をウェーブレットで分解する．
- MATLAB wavelet toolbox の関数 `ddencmp` を使って，雑音除去に必要ないろいろなパラメータの適切な値を推定する．
- 関数 `wdencmp` を使って画像から雑音除去する．
- 画像を再構成する．

ウェブレットー SVD 法

論文 [13] において，ウェーブレットで分解された詳細のような画像でも重み関数は同じ形かという問題に対して，詳細の重み関数は直線に近いという結果を得た．このことを使って，まずウェーブレットで近似と

詳細に分解して，それぞれの画像に対してスプライン法で雑音除去を行うのであるが，近似はスプラインを重み関数として使い，詳細は直線を重み関数として使うことにより，スプライン法よりも良いパフォーマンスを得ることができた．

### 結論

(i) スプラインーウェブレット法は雑音レベルが高くない場合に適している．雑音レベルが高い場合でも雑音は除去できるが，パフォーマンスはウェーブレット単独の場合とほとんど同じとなる．

(ii) 平均するとスプラインーウェブレット法は BlockSvd 法やスプライン法よりもパフォーマンスが良いが，絶対ではない．

(iii) ウェブレットー SVD 法はスプライン法より良いが，雑音レベルが高いときにはブロック歪みが現れる．

### 今後の課題

雑音が特異値に与える影響を理論的に明らかにすること，重み関数のタイプから画像を分類することなどが課題である．

## 参考文献

[1] S. O. Aase, J. H. Husøy and P. Waldemar, *A critique of SVD-based image coding systems*, Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems VLSL, **4** pp. 13–16, IEEE Press, Piscataway, NJ.

[2] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, *Image coding using wavelet transform*, IEEE Trans. Image Processing, **1** (April 1992) 205–220.

[3] R. Ashin, A. Morimoto, M. Nagase and R. Vaillancourt, *Image compression with multiresolution singular value decomposition and other methods*, Math. Comput. Modelling, **41**, No. 6-7, 773-790, 2005.

[4] Burden, R.L. & Faires, J.D. 2001. *Numerical Analysis*, 7th ed., Brooks/Cole.

[5] J. Chen, *Image compression with SVD*, ECS 289K Scientific Computation, Dec. 13, 2000. 13 pages. `http://graphics.cs.ucdavis.edu/~jchen007/UCD/ECS289K/Project.html`

[6] Devčić, Ž. & Lončarić, *SVD Block processing for non-linear image noise filtering*, J. of Computing and Information Technology, **7**(3), 255–259, 1999.

[7] J. J. Gerbrands, *On the relationships between SVD, KLT, and PCA*, Pattern Recognition, **14** (1981) 375–381.

[8] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, 3rd edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

[9] A. K. Jain, *Fundamentals of digital image processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1989.

[10] R. Kakarala and P. O. Ogunbona, *Signal analysis using a multiresolution form of the singular value decomposition*, IEEE Trans. on Image Processing, **10**, No. 5, (may 2001) 724–735.

[11] C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.

[12] Leon, Steven J., *Linear Algebra with Applications*, 4th Edition, Macmillan College Publishing Compant Inc., 1994.

[13] A. Morimoto, Y. Shimano, R. Ashino and R. Vaillancourt, *Wavelet and block singular value image denoising*, submitted to Scientific Proceedings of Riga Technical University.

[14] W. Qi, *Image denoising with spline interpolation based on singular value decomposition and other evaluation methods*, Master's thesis, University of Ottawa, 2004.

[15] W. Qi, A. Morimoto, R. Ashino and R. Vaillancourt, *Image denoising using spline and block singular value decomposition*, Scientific Proceedings of Riga Technical University, **21**, 36–46, 2004.

[16] A. Said and W. A. Pearlman, *A new fast and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees*, IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology, **6** (June 1996), 243–250.

[17] Stewart, G. W., *On the early history of the singular value decomposition*, Siam Review, **35**:4(1993), 551–566.

[18] M. Unser, *An extension of the Karhunen–Loève transform for wavelets and perfect reconstruction filterbanks* SPIE, **2034** Mathematical Imaging, (1993) 45–56.

[19] P. Waldemar and T. A. Ramstad, *Hybrid KLT-SVD image compression*, 1997 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, **4** pp. 2713–2716, IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA.

[20] 金谷健一，これなら分かる応用数学教室— 最小二乗法からウェーブレットまで —，共立出版，2003.

[21] 森正武 - 杉原正顕 - 室田一雄, 線形計算, 岩波書店, 1994.

[22] 斎藤正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 1966.

[23] 山本哲朗, 数値解析入門［増訂版］, サイエンス社, 2003.

[24] 柳井晴夫 - 竹内啓, 射影行列・一般逆行列・特異値分解，UP 応用数学選書 10，東京大学出版会，1983.