数理解析研究所講究録
1529巻 2007年 110-122

On the infinite dimensional approximation of solution for the KdV equation on the torus

神戸大学・理学部　高岡秀夫 (Hideo Takaoka)
Department of Mathematics
Kobe University

1. 導入

次の周期境界値条件, KdV 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 6uu_x, & x \in S^1 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

ただし, u は変数 t, x に関する実数値関数, $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ は1次元トーラス. まず, KdV 方程式 (1) のハミルトニアンは

$$H(u) = \int_{S^1} \frac{1}{2}u_x^2 + u^3$$

で与えられる. これから, 方程式 (1) のハミルトン形式は

$$u_t = J\nabla_u H(u) \tag{2}$$

である. ただし, J は微分作用素 $J = \partial_x$.

ここでは, KdV 方程式について有限次元モデルを導出し, その近似の度合い, つまり導出された有限次元モデルの解と (1) の解との収束定理について考察することを目的とする.

方程式の解 $u(t)$ を捉える枠組みとして, エネルギー空間 H^1 又は保存則の成り立つ関数空間[1] (L^2, $H^2, \cdots$) は自然な関数空間となりえる. 多くの場合, そのような関数空間においては, 方程式の保存

[1] KdV 方程式の可積分性から, 無限個の保存則の存在が示されている [17].

則から解の先験評価式を得る．さらに，保存則は解の大域挙動を知る上で重要な役割を果たす [4, 7, 12].

一方, 関数空間の設定として, ここでは L^2-ルベーグ空間よりも広い超関数のクラスを含めて考える. 少し詳しく述べると, ソボレフ空間 H^s の関数の滑らかさを与える指数 s について, 負の場合も扱う. 応用の観点において, ここで述べる問題はハミルトン形式 (2) のシンプレクティック構造の問題に現れる non-squeezing theorem に関連する内容を念頭に置いている.

なお，本研究は James Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani, Terence Tao との共同研究によるものである．論文としては [8] を参照されたい.

2. 研究状況及び主結果

2.1 初期値問題の適切性

有限次元モデルの解が元の方程式の解に収束するかを問題にするので，初期値問題の解が存在する必要がある．そこで，まず周期境界値条件，KdV 方程式の初期値問題の適切性について，知られている事項を説明しておく.

Bourgain [1], Kenig-Ponce-Vega [13], さらには Colliander-Keel-Staffilani-Takaoka-Tao [7] による研究から，KdV 方程式の初期値問題 (1) は H_0^s $(s \geq -1/2)$ で時間局所的に適切．ただし，H_0^s は通常のソボレフ空間 H^s の閉部分空間

$$H_0^s = \{ \, f \in H^s(S^1) \mid \widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f = 0 \, \}$$

で定義される[2]．このとき，初期値 u_0 から解 $u(t)$ に対応させる解写像 $S_{KdV}(t)$ が定義される．その言葉で述べると，$S_{KdV}(t)\ :\ u_0 \mapsto u(t)\ ;\ H_0^s \to H_0^s$ が $s \geq -1/2$ において適切である．論文 [6, 8] において，$s \geq -1/2$ の範囲で解は時間大域的であることも得られてい

[2]方程式 (1) に Galilei 変換 $(t,x) \mapsto (t - \widehat{u}_0(0)x, x)$ を施すこと，及び平均量の保存則により，フーリエ成分 $k=0$ の値として 0 の場合を扱えば十分である.

るので，解写像 $S_{KdV}(t)$ は全ての $t \in \mathbb{R}$ について定義することができる.

$s < -1/2$ では解写像は滑らかでないことが証明されている [3, 4, 14]. 滑らかさを仮定しない場合の結果については，論文 [3, 11, 12] などがあり，例えば [11] では逆散乱法を用いて H_0^{-1} の解の存在を示している.

2.2. KdV 方程式のシンプレクティック構造及び空間

ハミルトン形式 (2) に現れた作用素 J に対する反共役作用素

$$\overline{J} = -\partial_x^{-1} \quad (\text{形式的に } J\overline{J} = \overline{J}J = -I\text{dentity})$$

及び歪対称２次形式

$$\omega(u, v) = \langle \overline{J}u, v \rangle_{L^2} \tag{3}$$

を用いると，ハミルトン方程式 (2) のポアソン括弧式 $\{u_t, v\}$ は形式的に

$$\mathrm{d}H[u](v) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} H(u + \varepsilon v) = \omega(-u_{xxx} + 6uu_x, v) \tag{4}$$

と書ける. ただし，$u = u(t) \in H_0^s$ は方程式 (1) を満たし，v としては差し当たり上の計算が正当化されるような，適切な関数空間において考える. (4) の明確な意味付けは次小節の方程式 (5) を対象として改めてハミルトン形式を考えるので，ここではこれ以上深入りしないこととする.

一般に，ハミルトン構造の方程式に対して，その解写像はシンプレクティック同相写像となりえる [10]. 実際，次小節で具体的に構成する KdV 方程式の有限次元モデル (5) について，その解写像はシンプレクティックであり，上の計算 (3) と (4) からシンプレクティック空間は, 関数の滑らかさについて言えばソボレフ空間 $H^{-1/2}$ に相当すると期待されたい.

2.3. KdV 方程式の有限次元モデル

(4) の計算及び解写像のシンプレクティック同相写像が成り立つ十分条件として，ソボレフ空間 H^s の有限次元部分空間を考える．例えば，L^2-ルベーグ空間における基底として，フーリエ基底 $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$

$$\phi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, & k \geq 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, & k \leq -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & k = 0 \end{cases}$$

を用いて有限次元モデルの構成を試みる．

関数 H_0^s のフーリエ射影空間 $P_{\leq N} H_0^s$ を次で定義する．

$$P_{\leq N} H_0^s = \{\, u \in H_0^s \mid \mathrm{supp}\widehat{u} \subset \{|k| \leq N\} \,\}$$

このとき，$\{\phi_{-k}, \phi_k\}_{k=1,2,\ldots,N}$ は $(P_{\leq N} H_0^{-1/2}, \omega)$ のシンプレクティック基底となることに注意する．

KdV 方程式の有限次元モデルとして次の方程式を採用する[3]．

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} u_t + u_{xxx} = 6B(BuBu_x), & x \in S^1 \\ u|_{t=0} = Bu_0 \end{cases}$$

ここで，B は

$$C_0^\infty \ni b(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq N/2 \\ 0, & |\xi| \geq N \end{cases}$$

を表象とするフーリエ掛算作用素，N は後述の定理 1 において現れる収束パラメータである．なお，方程式 (5) はハミルトン形式を備えており，そのハミルトニアンは

$$H_B(u) = \int_{S^1} \frac{1}{2} u_x^2 + (Bu)^3$$

である．上のハミルトニアン H_B に対して (3) を用いて (4) の計算は可能である．

上で準備したことから，$(P_{\leq N} H_0^{-1/2}, \omega)$ はシンプレクティック空間，さらに方程式 (5) の解写像 $S_{BKdV}(t)$ はその上のシンプレクティック

[3]初期値問題 (5) の適切性は [1, 7, 13] に従う．

同相写像と言える.

2.3. 主結果

主結果を述べる前に記法を定義する. フーリエ射影を $P_{\leq N}u = \check{\chi}_{\leq N} * u$ で定義する. ただし, $\chi_{\leq N}$ は $|\xi| \leq N$ における定義関数

$$\chi_{\leq N}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq N \\ 0, & |\xi| > N \end{cases}$$

以後, $P_{=0}$, $P_{\leq\sqrt{N}}$ なども上と同様な意味合いの下で使用する.

主結果は次の定理である.

定理 1. $s \geq -1/2, T > 0$ とし, $N > 0$ は十分大きいとする. 初期値は $|k| \leq N$ に台を持つ, つまり $\mathrm{supp}\widehat{u}_0 \subset \{|k| \leq N\}$ とする. このとき, $|t| \leq T$ において次の不等式が成り立つ.

$$\|P_{\leq\sqrt{N}}(S_{KdV}(t)u_0 - S_{BKdV}(t)u_0)\|_{H_0^s} \lesssim N^{-\sigma}$$

ただし, $\sigma > 0$ は N に寄らない, s のみに依存する定数.

さて, Gromov の理論 [9] に依れば, シンプレクティック空間においていわゆる non-squeezing theorem が成り立つ.

Gromov non-squeezing theorem. $(\mathbb{R}^{2N}, \omega_0)$ をシンプレクティック基底 $\{p_i, q_i\}_{i=1,2,\ldots,N}$ 及び 2 次形式 $\omega_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i \wedge q_i$ によって定義されるシンプレクティック空間とする. $S : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ をシンプレクティック同相写像とする. このとき

$$S(B_R) \subset \Pi_r$$

ならば $R \leq r$ である. ただし, B_R は 半径 R の球, Π_r は底面の半径が r の円柱である.

$$B_R = \{(p,q) \in \mathbb{R}^{2N} | p = (p_1, \cdots, p_N),\ q = (q_1, \ldots, q_N),\ \sum_{i=1}^{N}(p_i^2 + q_i^2) \leq R\}$$

$$\Pi_r = \{(p,q) \in \mathbb{R}^{2N} \mid p = (p_1, \cdots, p_N),\ q = (q_1, \ldots, q_N),\ p_1^2 + q_1^2 \leq r\}$$

定理1（特に定理1の中で述べられている不等式による評価式），ならびにシンプレクティック変換 $(P_{\leq N}H_0^{-1/2},\omega) \mapsto (\mathbb{R}^{2N},\omega_0)$ を Gromov の non-squeezing theorem に適用すると，KdV 方程式の解写像に関する non-squeezing theorem が得られる．

系 (non-squeezing theorem). $k_0 \neq 0$ 及び $T > 0$ を固定する．このとき，$S_{KdV}(T)(B_R) \subset \Pi_r^{k_0}$ ならば，$R \leq r$ が成り立つ．対偶の言葉でいえば，仮に $R > r$ ならば，次の条件を満たす (1) の解 $u(t)$ が存在する．

$$\|u(0)\|_{H_0^{-1/2}} \leq R, \quad |k_0|^{-1/2}|\widehat{u(T)}(k_0)| > r$$

ここで，B_R は $H_0^{-1/2}$ における半径 R の閉球

$$B_R = \{u \in H_0^{-1/2} \mid \|u\|_{H^{-1/2}} \leq R\}$$

であり，$\Pi_r^{k_0}$ は $H_0^{-1/2}$ における円柱

$$\Pi_r^{k_0} = \{\, u \in H_0^{-1/2} \mid |k_0|^{-1/2}|\widehat{u}(k_0)| \leq r \,\}$$

より一般的な系の言明については論文 [8] を参照されたい．

3. 証明の方針

この節では，定理1の証明の概略を近似モデル (5) の導出背景（最終的には (14) の計算による）を中心に述べる．

これまでに同様な問題を扱った研究として，非線形波動方程式を扱った Kuksin [15, 16]，非線形シュレディンガー方程式を扱った Bourgain [2, 4] がある．しかし，方程式の違い（本質的には，非線形項に含まれる空間微分から起こる微分損失と非線形項の次数の違いを因由とする共鳴・非共鳴相互作用の不規律性）により，近似モデル

の型式が異なる．例えば，論文 [2] では，非線形シュレディンガー方程式の有限次元モデルの構成として，波数空間における滑らかな作用素 B の代わりにフーリエ射影作用素 $P_{\leq N}$ を用いて証明を完結することに成功している．しかしながら，KdV 方程式に対しては，射影作用素 $P_{\leq N}$ を使った同様な議論はうまくいかない．実際 $P_{\leq N}$ を使った有限次元方程式では，定理 1 で述べられている評価式は不成立であることが，反例を用いて検証できる．詳しくは論文 [8] を参照されたい．

3.1. 共鳴・非共鳴状態の考察

引き続き，ここでは KdV 方程式と非線形シュレディンガー方程式との扱いの違いを少し詳しく述べる．まず，非線形相互作用の様子を周波数空間において考察しよう．KdV 方程式の非線形項 $2uu_x = (u^2)_x$ のフーリエ係数を計算すると

$$(u^2)_x\widehat{\ }(k) = ik \sum_{k=k_1+k_2} \widehat{u}(k_1)\widehat{u}(k_2) \tag{6}$$

となる．KdV 方程式の線形分散関係式を基に，例えば摂動論を用いて考察すると，成分波間の共鳴相互作用（波のエネルギー交換）は次の波数間の周りで起こることが予想される．

$$\begin{cases} k = k_1 + k_2 \\ k^3 = k_1^3 + k_2^3 \end{cases} \Longrightarrow kk_1k_2 = 0$$

ここで注意すべきは，$u(t) \in H_0^s$ に対しては常に $\widehat{u(t)}(0) = 0$ であるので，上のケースは事実上排除されていることである．

一方の 3 次の項 $|u|^2u$ のフーリエ係数は

$$(|u|^2u)\widehat{\ }(k) = \sum_{k=k_1+k_2+k_3} \widehat{u}(k_1)\widehat{\overline{u}}(k_2)\widehat{u}(k_3) \tag{7}$$

同様にして，3 次の非線形項を持つ非線形シュレディンガーの共鳴相互作用の満足する条件は

$$\begin{cases} k = k_1 + k_2 + k_3 \\ k^2 = k_1^2 - k_2^2 + k_3^2 \end{cases} \Longrightarrow (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) = 0$$

である．このとき，(7) で $k_1+k_2=0$ が成立しているところはシュレディンガー方程式の L^2-保存則；$\|u(t)\|_{L^2}=\|u(0)\|_{L^2}$ から

$$\sum \widehat{u}(k_1)\widehat{\overline{u}}(k_2)\widehat{u}(k_3) \rightsquigarrow \|u(0)\|_{L^2}^2\widehat{u(t)}(k)$$

であり，あたかも線形解のような振る舞いを見せる．

ところで，上では非共鳴相互作用の考察は残るが，それについては解の平滑化作用が有効に働く（どのように処理されるかについては，論文 [1] で繰り広げられている非線形項評価の様子を参照されたい）．初期値問題の適切性に限って言えば，シュレディンガー方程式は L^2 で臨界的に適切であり、その臨界的様子は上の共鳴相互作用によって制限されている[4]．一方，KdV 方程式の臨界的空間 $H_0^{-1/2}$ は非共鳴相互作用を処理する際に制約指数として課せられており，その点が KdV 方程式に対するこの問題の取り扱いを困難にしている．

3.2. 定理 1 の証明の概略

前述の考察を鑑みて，Miura 変換を方程式 (1) に適用する．通常の Miura 変換 [17]

$$u = Mv = v_x + v^2, \quad v_t + v_{xxx} = 6v^2 v_x$$

に対して，方程式 (5) には次の修正 Miura 変換

$$u = M_B v = v_x + B(1-P_{=0})(v^2)$$

を施すと，(5) は次になる．

$$\begin{aligned}(8)\quad M_B'(v)(v_t+v_{xxx}) &= 6M_B'(v)B(v_xB(1-P_{=0})(v^2)) \\ &\quad -B(1-P_{=0})(B(v^2)B(vv_x) - vB(B(v^2)v_x) \\ &\quad +6P_{=0}(v^2)[M_B'v, B]v_x\end{aligned}$$

ここで，$M_B'(v)$ は $v\in H^{1/2}$ における M_B の線形化作用素である．

$$M_B'(v)f = f_x + 2B(1-P_{=0})(vf) \;:\; H^{1/2}\to H_0^{-1/2}$$

[4]非共鳴状態のところは L^2 空間よりも広い，滑らかさについては負指数のソボレフ空間 H^s で解析することができる．

次の補題を整備する.

補題 1. $v \in H^{1/2}$ に対して

$$\|[M_B, P_{\leq\sqrt{N}}]v\|_{H_0^{-1/2}} \leq CN^{-\sigma}$$

ここで, σ は N に依らない定数, C は ノルム $\|v\|_{H^{1/2}}$ に依る定数.

補題 2.

$$\|M_B v\|_{H_0^{-1/2}} \leq C(1+\|v\|_{H^{1/2}})\|v\|_{H^{1/2}}$$

ここで, C は定数.

さらに次の補題が成り立つ.

補題 3. $v \in H^{1/2}$ と十分大きな N を固定する. このとき, $M'_B(v)$ は可逆である. 即ち, 次の不等式が成り立つ.

$$\|M'_B(v)^{-1}f\|_{H^{1/2}} \leq C\|f\|_{H_0^{-1/2}}$$

ここで, C は $\|v\|_{H^{1/2}}$ にのみ依る定数.

補題1から, $N^{-\sigma}$ は定理1に現れる収束率に繰り込めるので, 作用素 M_B と $P_{\leq\sqrt{N}}$ は順序交換可能と見なして良い. 補題3から方程式 (8) に逆作用素 $M'_B(v)$ を施すことが可能である. また, 補題2では作用素 M_B の有界性が示されている. 以上のことから, 大雑把に言えば定理1を示すことは修正 Miura 変換によって変形された方程式 (8) と ($B = \mathrm{I}dentity$ として同様な計算をした) 修正 KdV 方程式

$$w_t + w_{xxx} = 6w_x(1-P_{=0})(w^2) \tag{9}$$

とのそれぞれの初期値問題に関する収束定理を示せば良い.

定理 2. $s \geq 1/2$ $T > 0$ とし, N は十分大きいとする. 初期値として, $v(0) = w(0)$ かつ $\mathrm{supp}\widehat{v(0)} \subset \{|k| \leq N\}$ とする. このとき, (8) の解 $v(t)$ と (9) の解 $w(t)$ に対して, 次の評価を得る[5].

$$\|P_{\leq\sqrt{N}}(v(t)-w(t))\|_{H^{1/2}} \lesssim N^{-\sigma}, \quad 0 \leq t \leq T$$

[5] (8) と (9) の初期値問題の適切性については [1, 7, 13] に従う.

3.3. 定理2の証明の概略

関数空間の設定. フーリエ制限ノルム空間 $X^{s,b}$, Y^s, Z^s を次のノルムによって定義する [1].

$$\|u\|_{X^{s,b}} = \|\langle k\rangle^s\langle\tau - k^3\rangle^b\hat{u}(\tau,k)\|_{\ell^2_kL^2_\tau}$$

$$\|u\|_{Y^s} = \|u\|_{X^{s,1/2}} + \|\langle k\rangle^s\hat{u}(\tau,k)\|_{\ell^2_kL^1_\tau}$$

$$\|u\|_{Z^s} = \|u\|_{X^{s,-1/2}} + \|\langle k\rangle^s\langle\tau - k^3\rangle^{-1}\hat{u}(\tau,k)\|_{\ell^2_kL^1_\tau}$$

さらに上のノルムに関して, 時間を有限区間 $[0,T]$ に適正に制限したものを $X^{s,b}_T$ などと書く.

このとき次が成り立つ.

$$Y^s_T \hookrightarrow C_t([0,T])H^s$$

(10) $$\|e^{-t\partial_{xxx}}f\|_{Y^s_T} \lesssim \|f\|_{H^s}$$

(11) $$\|(\partial_t + \partial_{xxx})^{-1}g\|_{Y^s_T} \lesssim \|g\|_{Z^s_T}$$

簡単に説明すると, Y^s_T は方程式の解を捉える空間であり, Z^s_T は方程式を積分方程式に書き換えたときのデュアメル項の評価に使われる.

論文 [1, 7, 13] に因ると, $s \geq 1/2$ において次の不等式が成り立つ.

(12) $$\|w_x(1-P_{=0})(w^2)\|_{Z^s_T} \lesssim \|w\|^3_{Y^s_T}$$

ここでは, 作用素 B の役割を議論のポイントにして, 定理2の証明の要点を述べるに留める.

まず, 方程式 (8) の右辺第二項以降の項は定理2に述べられている収束率 $N^{-\sigma}$ に繰り込まれる（証明は作用素 B と恒等作用素との交換子による評価）.

従って, (8) の右辺第一項のみに着目する. 変形して

$$6B(v_xB(1-P_{=0})(v^2)) = 6(v_x(1-P_{=0})(v^2)) + 6B(v_x(B-1)(1-P_{=0})(v^2))$$

第一項は方程式 (9) の非線形項と摂動論により比較することが可能なので，第二項が収束率 $N^{-\sigma}$ に繰り込まれることを示せば良い．第二項のフーリエ係数は

$$\begin{aligned}&P_{\leq\sqrt{N}}(v_x(B-1)(1-P_{\neq 0})(v^2))\widehat{\ }(k)\\ =&\Big(\sum_{\text{resonance}}+\sum_{\text{non-resonance}}\Big)\chi_{\leq\sqrt{N}}(k)ik_3(b(k_1+k_2)-1)\hat{v}(k_1)\hat{v}(k_2)\hat{v}(k_3)\end{aligned}$$

ここで，和記号の添え字 $k=k_1+k_2+k_3$ について，resonance は $(k_1+k_2)(k_2+k_3)(k_3+k_1)=0$，non-resonance は $(k_1+k_2)(k_2+k_3)(k_3+k_1)\neq 0$ の場合に分解しておく．

non-resonance に対しては, これまでの研究（例えば論文 [1, 7, 13]）により処理できる．状況として，非線形相互作用が殆ど共鳴せず，波数間でのエネルギーの伝達が少ないと言える．今回のケースでは，実際 non-resonance については resonance より比較的容易に評価できるので，ここでは割愛する．従って，以下では resonance の場合に限って話を進める．

<u>resonance の処理.</u> まず，表象 $b(k_1+k_2)-1$ の存在から，$|k_1+k_2|\gtrsim N$ として良い．さらに，$|k|\leq\sqrt{N}$ かつ $|k_1+k_2|\gtrsim N$ より，k_2+k_3, k_3+k_1 が共に 0 のところ，つまり $k_2+k_3=k_3+k_1=0$ の場合は除いて良い．残りの場合について，上の和記号の中の関数は

$$k_2+k_3=0 \implies ik_3(b(k-k_3)-1)\widehat{v}(k)\widehat{v}(-k_3)\widehat{v}(k_3)$$

または

$$k_3+k_1=0 \implies ik_3(b(-k_3+k)-1)\widehat{v}(-k_3)\widehat{v}(k)\widehat{v}(k_3)$$

そこで，$\widehat{v}(-k)=\overline{\widehat{v}(k)}$ に注意して，k_3 の符号について対称性を取ると，上の 2 つの和は

$$2\sum_{\substack{k_3\gtrsim N\\ |k|\lesssim\sqrt{N}}} ik_3(b(k_3-k)-b(k_3+k))|\hat{v}(k_3)|^2\hat{v}(k) \tag{13}$$

ここで，平均値の定理より

$$|b(k_3-k)-b(k_3+k)|\lesssim\frac{|k|}{|k_3|}\lesssim N^{-1/2} \tag{14}$$

これを (13) のフーリエ掛算作用素の評価に用いて，(12) を使えば resonance に対する $Z_T^{1/2}$ ノルムは

$$\lesssim N^{-1/2}\|v\|_{X_T^{1/2}}^3$$

で評価される．後は (10) と (11) とを組み合わせることにより $H^{1/2}$ での収束が従う．こうして修正 KdV 方程式に対する定理 2 が証明される．

最後に参考文献を挙げる．

4. 参考文献

[1] J. Bourgain, Fourier restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Part II, Geometric and Funct. Anal., 3 (1993), 209-262.

[2] ———, Approximation of solutions of the cubic nonlinear Schrödinger equations by finite-dimensional equations and nonsqueezing properties, Int. Math. Res. Not., 1994, no. 2, (1994), 79–90.

[3] ———, Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data, Selecta Math., 3 (1997), 115–159.

[4] ———, Global solutions of nonlinear Schrödinger equations, AMS Publications, 1999.

[5] M. Christ, J. Colliander and T. Tao, Asymptotics, frequency modulation, and low regularity ill-posedness for canonical defocusing equations, Amer. J. Math., 125 (2003), 1235–1293.

[6] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Global well-posedness result for KdV in Sobolev spaces of negative index, Electron. J. Differential Equations, 2001, No 26, 1–7.

[7] ———, Sharp global well-posedness for periodic and non-periodic KdV and mKdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$, J. Amer. Math. Soc., 16 (2003), 705–749.

[8] ———, Symplectic non-squeezing of the KdV flow, Acta Math., 195 (2005), 197–252.

[9] M. Gromov, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. math., 82 (1985), 307–347.

[10] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*, Birkhäuser Verlag, 1994.

[11] T. Kappeler and P. Topalov, Global well-posedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, preprint.

[12] ———, Global fold structure of the Miura map on $L^2(\mathbb{T})$, Int. Math. Res. Not., 2004, 2039–2068.

[13] C. Kenig, G. Ponce and L. Vega, A bilinear estimate with applications to the KdV equation, J. Amer. Math. Soc., 9 (1996), 573–603.

[14] ______, On the ill-posedness of some canonical dispersive equations, Duke Math. J., 106 (2001), 617–633.

[15] S. Kuksin, Infinite-dimensional symplectic capacities and a squeezing theorem for Hamiltonian PDE's, Comm. Math. Phys., 167 (1995), 531–552.

[16] ______, *Analysis of Hamiltonian PDEs*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 19, Oxford Univ. Press, 2000.

[17] R. Miura, Korteweg-de Vries equation and generalizations. I, A remarkable explicit nonlinear transformation, J. Math. Phys., 9 (1968), 1202–1204.

[18] H. Takaoka and Y. Tsutsumi, Well-posedness of the Cauchy Problem for the modified KdV equation with periodic boundary condition, Int. Math. Res. Not., 2004, 3009–3040.