

## 集合論的位相空間論と反復強制法

嘉田 勝 (Masaru Kada)

大阪府立大学 (Osaka Prefecture University)

### Abstract

We discuss two problems in set-theoretic topology: One is on the approximations to  $\beta\omega$  by certain classes of metric-dependent compactifications of  $\omega$ , and the other is on the critical cardinality of a certain selection principle of open covers. We will observe the effects of side-by-side product forcing and iterated forcing on those problems.

本稿では、集合論的位相空間論における次のふたつの問題を論じる。

**問題 0.1.** [4, 5, 6] 可算離散空間  $\omega$  のストーン・チェックコンパクト化  $\beta\omega$  は、 $\omega$  のヒグソンコンパクト化の真の上昇列で近似できるか?<sup>\*1</sup> また、できるとしたら、その上昇列の最短の長さは?

**問題 0.2.** [9] 開被覆の選出原理  $S_1(T, \mathcal{O})$  とは、「いかなる  $\tau$ -開被覆<sup>\*2</sup>の可算列についても、各々の被覆から 1 個ずつ開集合を選び出して開被覆を作ることができる」という性質を意味する。  $S_1(T, \mathcal{O})$  をみたさない実数集合の最小濃度を  $\text{od}$  で表す。このとき  $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{od} \leq \text{d}$  が成り立つことが知られている。  $\text{d}$  以外の  $\text{od}$  の上限を見つけよ!

これらの問題は、見かけは異なるが、どちらも共通に、「定義可能な長い実数上昇列の存在」という問題に関連づけて論じることができる。

---

<sup>\*1</sup> 一般に、完全正則空間  $X$  のコンパクト化の全体は、自然な順序に関して、 $\beta X$  を最大元とする上半束の構造をなす。この束順序に関して、 $\beta\omega$  を上限とする、 $\omega$  のヒグソンコンパクト化からなる真の上昇列は存在するか? という問題である。上昇列という制約を除けば、 $\beta\omega$  を上限とする、自明でない  $\omega$  のヒグソンコンパクト化の集合は存在する [5]。ヒグソンコンパクト化をスミルノフコンパクト化で置き換えても、同様の問題設定が可能で、同様の結果が成り立つ。

<sup>\*2</sup> 位相空間  $X$  の可算被覆  $\mathcal{U}$  が  $\tau$ -被覆であるとは、(i)  $X$  の各点は  $\mathcal{U}$  の無限個の元に属し、かつ、(ii)  $X$  の任意の 2 点  $x, y$  について、 $x$  が属し  $y$  が属さない  $\mathcal{U}$  の元が有限個であるか、または、 $y$  が属し  $x$  が属さない  $\mathcal{U}$  の元が有限個であることをいう。

$\mathbb{R}$  上の 2 項関係  $R$  が定義可能であるとは、 $R$  を  $\mathbb{R}^2$  の部分集合とみたときに射影集合であることを意味するものとする。定義可能な  $\mathbb{R}$  上の 2 項関係  $R$  について、 $R$  に関する長い上昇列が存在するかどうかを考える。すなわち、 $\mathbb{R}$  の部分集合  $X$  上で  $R$  が整列順序関係になっているとき、整列順序集合  $(X, R)$  の本質的な長さ、すなわち、 $\text{cf}(\text{otp}(X, R))$  はどのくらい大きくなりうるか、という問題を設定する。その長さの上限を  $\mathfrak{d}_0$  で表す。

コーエンモデル、すなわち、連続体仮説 (CH: the continuum hypothesis,  $c = \aleph_1$ ) をみたく集合論のモデルに  $\aleph_2$  個以上のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいては、 $\mathfrak{d}_0 = \aleph_1$  が成り立つことが知られている。特に、 $\omega^\omega$  における 2 項関係  $\leq^*$  (eventually dominating order) は明らかに定義可能なので、コーエンモデルにおいては  $\leq^*$  に関する長さ  $\omega_2$  の真の上昇列は存在しえない。帰結として、コーエンモデルでは  $\mathfrak{b} = \aleph_1 < c$  が成り立つ。このことは、CH のモデルから始めて、実数を付加する自然な強制概念の直積 (side-by-side product forcing) によって  $\aleph_2$  個以上の実数を付加して得られる強制モデルでも、同様に成り立つ [2]。

一方、CH をみたくモデルから始めて、反復強制法 (iterated forcing) によってジェネリック実数の列を付加することによって、実数上の定義可能な関係についての長い上昇列を意図的に作り出すことができる。 $\mathfrak{b} > \aleph_1$  をみたくモデルはそのようにして構成される。

マーティンの公理 (MA: Martin's axiom) は、「可算反鎖条件 (countable chain condition) をみたく強制法による拡大モデルの構成と同じ操作を、ひとつのモデルの内部で実行できる」ことを意味する仮定である。MA を仮定すると、反復強制法による実数列の構成を内部的に行うことができるので、 $\mathfrak{d}_0 = c$  が成り立つ。

したがって、実数上の定義可能な 2 項関係についての長い上昇列は、存在することも存在しないことも起こりうる。すなわち、 $\mathfrak{d}_0 = \aleph_1 < c$  と  $\mathfrak{d}_0 = c > \aleph_1$  はいずれも集合論の公理と無矛盾である。それぞれの典型的なモデルは、コーエンモデルと、反復強制法による強制モデルである。

最初に述べた集合論的位相空間論の問題については、直積強制法および反復強制法で得られるモデルにおいて、(i)  $\mathfrak{d}_0$  の値、および (ii) 「スラローム」と呼ばれる特殊な実数からなる上昇列の長さを調べることによって、以下の結果を得た。

**定義 0.3.**  $\beta\omega$  を近似する  $\omega$  のヒグソンコンパクト化の真の上昇列が存在するとき、その最小の長さを  $\text{ht}$  で表す。存在しないときは  $\text{ht} = \infty$  と書く。<sup>\*3</sup>

<sup>\*3</sup> 「未定義」とするかわりに、記法上の約束として、 $\text{ht} = \infty$  と書くことにして、すべての基数  $\lambda$  について  $\lambda < \infty$  と考えると、統一的な書き方ができて便利である。次に現れる  $\theta_*$  についても同様。

**定義 0.4.**  $\varphi, \psi \in ([\omega]^{<\aleph_0})^\omega$  について\*4,  $\varphi \sqsubseteq \psi \iff \exists m \forall n > m (\varphi(n) \subseteq \psi(n))$  と定義する.  $h \in \omega^\omega$  について,  $\prod_{n < \omega} [\omega]^{\leq h(n)-1}$  の部分集合  $\Phi$  で, (i)  $\sqsubseteq$  によって整列され, かつ (ii)  $\forall f \in \prod_{n < \omega} h(n) \exists \varphi \in \Phi (f \sqsubseteq \varphi)$  をみたすものが存在するとき, そのような  $\Phi$  の最小の濃度を  $\theta_h$  で表す. 存在しないときは  $\theta_h = \infty$  とする.  $\theta_* = \sup\{\theta_h : h \in \omega^\omega\}$  と定義する.

**定理 0.5.** [9]  $\aleph_0 \leq \theta_*$  が成り立つ.

**定理 0.6.** (i) コーエンモデルにおいて (ii)  $\text{MA} + \neg \text{CH}$  のもとで (iii) マサイアスモデル\*5において,  $\aleph_0, \text{ht}, \aleph_0, \theta_*$  の値は次の表のとおりである.

	$\aleph_0$	ht	$\aleph_0$	$\theta_*$
(i) コーエンモデル	$\aleph_1$ [2, 7]	$\infty$ [4, 5]	$c$ [9]	$\infty$ [3]
(ii) $\text{MA} + \neg \text{CH}$	$c$	$c$ [3, 6]	$c$ [9]	$c$ [3]
(iii) マサイアスモデル	$c (= \aleph_2)$	$\aleph_1$ [4, 5]	$\aleph_1$ [9]	$\aleph_1$ [3, 9]

本稿では, 上の定理を導くための組合せ論的結果を紹介する.

## 1 スラロームの上昇列と $\text{ht}, \theta_*$

$g \in \omega^\omega$  に対し,  $S^g = \prod_{n < \omega} [\omega]^{\leq g(n)}$  とおく.  $S^g$  の各々の元をスラロームと呼ぶ.  $g(n) = 2^n$  のときの  $S^g$  を単に  $S$  で表す.

まず, コーエンモデルにおいて  $\text{ht}, \theta_*$  がともに  $\infty$  である (すなわち「定義できない」) ことの理由を確かめよう.

次の定理はクーネンの学位論文 [7] に記されている著名な結果である. 読者の便宜のため, 次の節にこの定理の完全な証明を記す.

**定理 1.1.**  $\kappa$  を  $\aleph_2$  以上の基数とする.  $\text{CH}$  をみたすモデルに  $\kappa$  個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいて, 次のことが成り立つ.  $\mathcal{N}$  をポーランド空間,  $A \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$  をボレル集合とする\*6 (つまり  $A$  はボレル集合で定義可能な  $\mathcal{N}$  上の 2 項関

\*4  $([\omega]^{<\aleph_0})^\omega$  の各々の要素をスラロームと呼ぶ.  $\omega^\omega$  の要素  $f$  は,  $\langle \{f(n)\} : n < \omega \rangle$  というスラロームと同一視できる. 詳しくは次節で述べる.

\*5  $\text{CH}$  をみたすモデルから始めて, マサイアス強制法の長さ  $\omega_2$  の可算サポート反復によって得られる強制モデル. そこでは  $c = \aleph_2$  が成り立つ.

\*6 実際は, 「 $H(\aleph_1)$  で定義可能」という, より弱い条件で足りる. 実数集合に限れば, この条件は射影集合であることと同値である. したがって, この定理から, コーエンモデルでは  $\aleph_0 = \aleph_1$  が成り立つことが導かれる. 詳しくは文献 [2] を参照せよ.

係). このとき,  $\mathcal{X}$  の元からなる長さ  $\omega_2$  の列  $\langle r_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$  で,

$$\alpha \leq \beta < \omega_2 \text{ と } \langle r_\alpha, r_\beta \rangle \in A \text{ は同値}$$

をみたすものは**存在しない**。」

この定理を使うと, コーエンモデルで  $\theta_* = \infty$  が成り立つことを, 次のように示せる.

**定理 1.2.** [3, Theorem 2.2] CH をみたすモデルに  $\aleph_2$  個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルにおいて,  $\theta_* = \infty$  が成り立つ.

証明.  $h \in \omega^\omega$  を固定する. 定理 1.1 により, CH をみたすモデルに  $\aleph_2$  個のコーエン実数を付加して得られる強制モデルでは,  $\mathfrak{d}_0 = \aleph_1$  が成り立つ.  $S^{h-1} (= \prod_{n < \omega} [\omega]^{\leq h(n)-1})$  を (各座標に離散位相を入れて直積をとることによって)  $\omega^\omega$  と同じ位相構造をもつポランド空間とみなせば,  $S^{h-1}$  上の 2 項関係  $\sqsubseteq$  はボレル集合で定義される. したがって, この強制モデルでは,  $S^{h-1}$  の中に,  $\sqsubseteq$  に関する長さ  $\omega_2$  の上昇列は存在しない. これは,  $\theta_h$  が定義される ( $\theta_h < \infty$ ) ならば, その値は  $\aleph_1$  でしかありえないことを意味する.

ところが, このモデルでは  $\text{cov}(\mathcal{M}) = \aleph_2$  が成り立ち, かつ, 論文 [9] の結果によって  $\text{cov}(\mathcal{M}) \leq \mathfrak{d}_0 \leq \theta_h$  であることがわかっているから, このモデルでは  $\theta_h = \aleph_1$  ではありえない. したがって,  $\theta_h = \infty$  でなければならない.  $\square$

同様の理由で, コーエンモデルで  $\text{ht} = \infty$  が成り立つことが示せる. 証明は [4] または [5] を参照されたい.

次に,  $\theta_* < \infty$  と  $\text{ht} < \infty$  の無矛盾性を示すために, スラロームの上昇列を意図的に構成することを考えよう. そのためのアイデアは [6] にすでに記したが, ここに再び完全な証明を示そう.

まず, スラロームを用いた  $\text{add}(\mathcal{N})$  の組合せ論的特徴づけを紹介する.

**定理 1.3.** [1, Theorem 2.3.9]  $\text{add}(\mathcal{N})$  は, 「 $F \subseteq \omega^\omega$  で, すべての  $\varphi \in S$  について,  $f \in F$  で  $f \sqsubseteq \varphi$  なるものが存在する」ような  $F$  の最小の濃度と一致する.

次に, 基数  $l_h, \iota$  を定義する.

**定義 1.4.**  $h \in \omega^\omega$  に対し,  $l_h$  を, 「 $\Phi \subseteq S$  で, すべての  $f \in \prod_{n < \omega} h(n)$  について,  $\varphi \in \Phi$  で  $f \sqsubseteq \varphi$  なるものが存在する」ような  $\Phi$  の最小の濃度と定義する.  $\iota = \sup\{l_h : h \in \omega^\omega\}$  と定義する.

定義より明らかに,  $h_1 \leq^* h_2$  ならば  $l_{h_1} \leq l_{h_2}$  が成り立つ.

基礎モデル  $V$  で CH が成り立っているとする。  $h$  が  $\omega^\omega \cap V$  に属する関数で、  $\mathbb{P}$  がレーヴァーの性質\*7(Laver property) をみたす強制概念であれば、  $V^{\mathbb{P}}$  で  $l_h = \aleph_1$  が成り立つことが、レーヴァーの性質の定義より直ちにわかる。

このことから、さらに次のこともわかる。  $V$  で CH が成り立つとし、  $\langle \mathbb{P}_\alpha, \dot{Q}_\alpha : \alpha < \omega_2 \rangle$  を適正強制概念 (proper forcing notion) の可算サポート反復、  $\mathbb{P} = \lim_{\alpha < \omega_2} \mathbb{P}_\alpha$  とし、さらに、すべての  $\alpha < \omega_2$  について

$$\Vdash_{\mathbb{P}_\alpha} "|\dot{Q}_\alpha| \leq \aleph_1 \text{ かつ } \dot{Q}_\alpha \text{ はレーヴァーの性質をみたす}"$$

が成り立っているならば\*8,  $V^{\mathbb{P}}$  において  $l = \aleph_1$  が成り立つ。なぜなら、  $\mathbb{P}$  が可算サポート反復であることから、  $h$  が  $\omega^\omega \cap V^{\mathbb{P}}$  に属するならば、実は  $h$  はある  $\alpha < \omega_2$  についての  $V^{\mathbb{P}_\alpha}$  にすでに属していて、しかも  $V^{\mathbb{P}_\alpha}$  では CH が成り立っているから、レーヴァーの性質が反復に関して保存されることにより、スラロームの集合  $S \cap V^{\mathbb{P}_\alpha}$  が  $V^{\mathbb{P}}$  において  $l_h = \aleph_1$  の証拠となるからである。\*9

一方、MA のもとでは、 ( $l_h$  の定義が意味を持つ  $h \in \omega^\omega$  に関して)  $l_h = c$  が成り立つことが容易に確かめられる。

次に、スラロームの定義を少し変形して、  $S$  の部分集合  $S^+$  を次のように定義する。

$$S^+ = \left\{ \varphi \in S : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\varphi(n)|}{2^n} = 0 \right\}$$

要するに、  $S$  に属するスラロームのうち、  $n$  が大きくなるにつれて「幅」が (許される最大の幅に比して) 小さくなっていくようなものを集めた集合が  $S^+$  である。

$l_h$  の定義で  $S$  を  $S^+$  で置き換えて得られる基数を  $l'_h$  で表す。明らかに  $l_h \leq l'_h$  である。また、任意の  $h \in \omega^\omega$  に対し、  $h^* \in \omega^\omega$  を、  $l'_h \leq l_{h^*}$  をみたすように選べることは容易にわかる。したがって、  $l = \sup\{l'_h : h \in \omega^\omega\}$  が成り立つ。

スラロームの定義を  $S^+$  の形にしておくと、対角線論法を使って、少ない個数のスラロームの集合は 1 個のスラロームで「束ねる」ことができる。このことを使えば、実数の基数不変量に関する適切な仮定のもとで、  $\prod_{n < \omega} h(n)$  をカバーするスラロームの上昇列を帰納的に構成できる。

\*7  $\mathbb{P}$  がレーヴァーの性質をみたすとは、いかなる  $h \in \omega^\omega \cap V$  と  $f \in \prod_{n < \omega} h(n)$  についても、  $\varphi \in S \cap V$  で  $f \sqsubseteq \varphi$  をみたすものが存在するときをいう。

\*8 レーヴァー強制法、マサイアス強制法、ミラー強制法など、よく用いられる。レーヴァーの性質をみたす実数を付加する適正強制概念であれば、この条件は成り立つ。

\*9 この議論で、単に「 $\mathbb{P}$  がレーヴァーの性質をみたすなら  $V^{\mathbb{P}} \models l \leq c^V$ 」といえるわけではないことに注意を要する。 $\mathbb{P}$  がレーヴァーの性質をみたすだけでは、  $V$  に属する関数でおさえられていない  $h$  についての  $l_h$  の値を知ることができないからである。

補題 1.5.  $S^+$  の濃度  $\text{add}(\mathcal{N})$  未満の部分集合  $\Phi$  に対し,  $\psi \in S^+$  で, すべての  $\varphi \in \Phi$  について  $\varphi \sqsubseteq \psi$  をみたすものが存在する.

証明.  $\varphi \in S^+$  に対し,  $\eta_\varphi \in \omega^\omega$  を,

$$\eta_\varphi(m) = \min \left\{ l < \omega : \forall n \geq l \left( |\varphi(n)| < \frac{2^n}{m \cdot 2^m} \right) \right\}$$

によって定義する.  $\varphi$  は  $S^+$  に属するスラロームなので,  $S^+$  の定義によって  $\eta_\varphi$  は定義可能である. 要するに,  $\eta_\varphi$  は, スラローム  $\varphi$  の幅の「(相対的な) 狭まりかたの速さ」を表す関数である.

$\kappa < \text{add}(\mathcal{N})$  とし,  $S'$  の濃度  $\kappa$  の部分集合  $\Phi$  を任意にとる.  $\kappa = |\Phi| < \text{add}(\mathcal{N}) \leq \mathfrak{b}$  によって,  $\eta \in \omega^\omega$  を, すべての  $\varphi \in \Phi$  について  $\eta_\varphi \leq^* \eta$  をみたすように選ぶ.  $\eta$  は狭義単調増加であるとしてよい.  $m < \omega$  に対し,  $I_m = \{\eta(m), \eta(m) + 1, \dots, \eta(m+1) - 1\}$  とおき,

$$\prod_{n \in I_m} [\omega]^{\leq \lfloor 2^n / (m \cdot 2^m) \rfloor} = \{s_{m,i} : i < \omega\}$$

と数え上げる ( $\lfloor r \rfloor$  は  $r$  を超えない最大の整数を表す).

$\varphi \in \Phi$  に対し,  $\tilde{\varphi} \in \omega^\omega$  を次のように定義する: 各  $m < \omega$  に対し, すべての  $n \in I_m$  について  $|\varphi(n)| \leq 2^n / (m \cdot 2^m)$  ならば,  $\tilde{\varphi}(m) = i \iff \varphi \upharpoonright I_m = s_{m,i}$  と定め, そうでなければ,  $\tilde{\varphi}(m) = 0$  とする. ここで,  $\eta$  の選び方と  $I_m$  の定義により, 各  $\varphi \in \Phi$  に対し, 有限個を除くすべての  $m < \omega$  について  $\tilde{\varphi}(m)$  は前者によって定義されることに注意せよ.\*10

$|\Phi| = \kappa < \text{add}(\mathcal{N})$  だから, 定理 1.3 によって,  $\hat{\psi} \in S$  を, すべての  $\varphi \in \Phi$  について  $\tilde{\varphi} \sqsubseteq \hat{\psi}$  をみたすように選べる. この  $\hat{\psi}$  について,  $\psi$  を,  $m < \omega, n \in I_m$  に対して  $\psi(n) = \bigcup \{s_{m,i}(n) : i \in \hat{\psi}(m)\}$  とおくことにより定義する (ただし,  $n < \eta(0)$  ならば  $\psi(n) = \emptyset$  とする).  $\hat{\psi}$  から  $\psi$  への変形が, ちょうど先ほどの  $\varphi$  から  $\tilde{\varphi}$  への変形操作の逆になっていることは, 容易に理解できよう.

このとき,  $m < \omega, n \in I_m$  に対し,

$$\frac{|\psi(n)|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{m \cdot 2^m} \cdot 2^m = \frac{1}{m}$$

である. これは  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束する. ゆえに,  $\psi \in S^+$  である. さらに,  $\tilde{\varphi}$  の定義と  $\hat{\psi}$  の選び方により, すべての  $\varphi \in \Phi$  について  $\varphi \sqsubseteq \psi$  が成り立つ.  $\square$

\*10 簡単にいえば, スラローム  $\varphi$  を区間  $I_m$  に制限したものを「1個の値」とみなして, それを  $\tilde{\varphi}(m)$  の値として,  $\tilde{\varphi}$  を定義するのである.

**補題 1.6.**  $h \in \omega^\omega$  を, すべての  $n < \omega$  について  $h(n) > n^2$  である関数とする.  $\text{add}(\mathcal{N}) = \iota'_h = \kappa$  ならば,  $S^+$  の元の  $\sqsubseteq$  に関する長さ  $\kappa$  の上昇列  $\langle \sigma_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  を, すべての  $f \in \prod_{n < \omega} h(n)$  に対してある  $\alpha < \kappa$  が  $f \sqsubseteq \sigma_\alpha$  をみたすように構成できる.

**証明.**  $\iota'_h = \kappa$  の証拠となるスラロームの集合をもとに, 補題 1.5 を使って, 目的の列  $\langle \sigma_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  を帰納的に構成せよ.  $\square$

これで, スラロームに関する組合せ論的補題が準備できた. これらの補題を使って,  $\theta_*$ ,  $\text{ht}$  の値を調べよう.

$H_1, H_2 \in \omega^\omega$  を, それぞれ,  $H_1(n) = 2^n + 1$ ,  $H_2(n) = 2^{2^{(n^4)}}$  で定義する.

まず,  $\theta_*$  はスラロームの上昇列によって定義されているので, 上の補題との関連づけは簡単である.

**定理 1.7.**  $\text{add}(\mathcal{N}) = \iota'_{H_1}$  ならば  $\theta_* = \text{od} = \text{add}(\mathcal{N})$  である.

**証明.**  $\kappa = \text{add}(\mathcal{N}) = \iota'_{H_1}$  とする.  $S^+ \subseteq S \subseteq S^{H_1-1}$  だから, 補題 1.6 によって,  $\theta_* \leq \theta_{H_1} \leq \kappa$  であることがわかる. 一方, [9] によって,  $\kappa = \text{add}(\mathcal{N}) \leq \text{cov}(\mathcal{M}) \leq \text{od} \leq \theta_*$  であることがわかっている.  $\square$

$\text{ht}$  とスラロームの上昇列を結びつけるのは次の補題である. これは [5, Theorem 6.11] の系として得られる ([6] も見よ).

**補題 1.8.**  $\kappa$  を基数とする.  $S$  の元からなる  $\sqsubseteq$  に関する長さ  $\kappa$  の上昇列  $\langle \varphi_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$  で, しかも「すべての  $f \in \prod_{n < \omega} H_2(n)$  について, ある  $\alpha < \kappa$  で  $f \sqsubseteq \varphi_\alpha$  が成り立つ」ものが存在するならば,  $\text{ht} \leq \kappa$  である.

この補題から, 直ちに次のことがわかる.

**定理 1.9.**  $\text{add}(\mathcal{N}) = \iota'_{H_2}$  ならば  $\text{ht} = \text{add}(\mathcal{N})$  である.

以上によって,  $\text{add}(\mathcal{N}) = \iota = \kappa$  ならば,  $\theta$  も  $\text{ht}$  も値  $\kappa$  をもつことがわかる.

CH をみたすモデルから始めて, レーヴァー強制法, マサイアス強制法, ミラー強制法など, レーヴァーの性質をみたす実数を付加する適正強制法の長さ  $\omega_2$  の可算サポート反復を行うと, 強制モデルでは  $c = \aleph_2$  が成り立つが,  $\text{add}(\mathcal{N}) = \iota = \aleph_1$  が成り立つので,  $\theta_*$  および  $\text{ht}$  は値  $\aleph_1$  をもつ.

また, MA のもとでは,  $\text{add}(\mathcal{N}) = \iota = c$  が成り立つので,  $\theta_*$  および  $\text{ht}$  の値は  $c$  に等しいことがわかる.

以上の議論によって、定理 0.6 の表に挙げた結果は確かめられた。

## 2 コーエンモデルには定義可能な長い実数上昇列はない

この節では、読者の便宜のため、定理 1.1 のクーネン [7] による証明を掲げる。なお、[2] では、この定理の一般化として、「ボレル集合」を「射影集合」に弱め、さらに、コーエン強制法に限らない一般の自然な直積強制法について述べた定理が証明されている。

$\mathcal{X}$  をポーランド空間とし、 $\mathcal{X}$  あるいは  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  のボレル集合は  $\omega$  の部分集合でコードされていると考える。

定理 1.1 の証明.  $\kappa \geq \aleph_2$  とする。  $\dot{A}$  を  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$  のボレル集合 (すなわち、ボレル集合で定義される  $\mathcal{X}$  上の 2 項関係) を表す  $\mathbb{C}(\kappa)$ -名前とし、  $\langle \dot{r}_\alpha : \alpha < \omega \rangle$  を、  $\mathcal{X}$  の元 (すなわち実数) を表す  $\mathbb{C}(\kappa)$ -名前の列とする。

コーエンモデルにおいて、  $\langle \dot{r}_\alpha : \alpha < \omega \rangle$  が表す実数列が、  $\dot{A}$  が表す 2 項関係に関する上昇列になりえないことを示したい。つまり、次の主張を示すことを目標とする。

$$\Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \exists \alpha < \omega_2 \exists \beta < \omega_2 (\alpha < \beta \wedge (\langle \dot{r}_\alpha, \dot{r}_\beta \rangle \notin \dot{A} \vee \langle \dot{r}_\beta, \dot{r}_\alpha \rangle \in \dot{A})).$$

もし、初めから

$$\Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \exists \alpha < \omega_2 \exists \beta < \omega_2 (\alpha < \beta \wedge \langle \dot{r}_\alpha, \dot{r}_\beta \rangle \notin \dot{A})$$

が成り立っていれば、なすべきことは何もない。だから、これが成り立っていないと仮定する。このとき、  $\mathbb{C}(\kappa)$  の元  $p$  で、

$$p \Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \forall \alpha < \omega_2 \forall \beta < \omega_2 (\alpha < \beta \rightarrow \langle \dot{r}_\alpha, \dot{r}_\beta \rangle \in \dot{A}) \quad (*)$$

をみたすものが存在するので、そのような  $p$  を固定する。

$\alpha, \beta < \omega_2$  で、  $\alpha < \beta$  かつ  $p \Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \langle \dot{r}_\beta, \dot{r}_\alpha \rangle \in \dot{A}$  をみたすものを見つければ、証明は終わる。このような  $\alpha, \beta$  を見つけるために、名前の同型性の論法 (isomorphism-of-names argument) を用いる。

$J_p = \text{dom}(p)$  とする。  $\mathbb{C}(\kappa)$  の性質によって、  $J_A \in [\kappa]^{\aleph_0}$  および、  $\omega$  の部分集合を表す都合のよい (nice)  $\mathbb{C}(J_A)$ -名前<sup>\*11</sup>  $\dot{C}_A$  を、

$$\Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \text{“}\dot{C}_A \text{ は } \dot{A} \text{ のボレルコード”}$$

\*11 「都合のよい名前」 (nice name) の定義は [8] を参照せよ。



をみたすように選べる。また、各  $\alpha < \omega_2$  について、 $J_\alpha \in [\kappa]^{\aleph_0}$  および  $\omega$  の部分集合を表す都合のよい  $\mathbb{C}(J_\alpha)$ -名前  $\dot{C}_\alpha$  を、

$$\Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \text{“}\dot{C}_\alpha \text{ は } \{\dot{r}_\alpha\} \text{ のボレルコード”}$$

をみたすように選ぶ。ここで  $\Delta$ -システム補題 [8, II Theorem 1.6] を使って、 $S \in [\kappa]^{\aleph_0}$  と  $K \in [\omega_2]^{\aleph_2}$  を、 $\alpha, \beta \in K$  かつ  $\alpha \neq \beta$  ならば  $J_\alpha \cup J_\beta \subseteq S$  であるように選ぶ。さらに、(必要であれば  $K$  をさらに削ることによって) すべての  $\alpha \in K$  について  $|J_\alpha \setminus S| = \aleph_0$  であると仮定してよい。各  $\alpha \in K$  について、集合  $J_\alpha \setminus S$  を  $\langle \delta_n^\alpha : n < \omega \rangle$  と並べておく。

$\alpha, \beta \in K$  に対し、 $\mathbb{C}(\kappa)$  の自己同型写像  $\sigma_{\alpha, \beta}$  を、「すべての  $n$  について、 $\delta_n^\alpha$  座標と  $\delta_n^\beta$  座標の成分を交換する」写像として定義する。この写像  $\sigma_{\alpha, \beta}$  は、 $\mathbb{C}(\kappa)$ -名前全体の集合上の自己同型写像を自然に引き起こす。その写像も、簡単に  $\sigma_{\alpha, \beta}$  で表すことにしよう。

$J_\alpha \cup J_\beta \subseteq S$  だから、どんな  $\alpha, \beta \in K$  についても、 $\sigma_{\alpha, \beta}(p) = p$ ,  $\sigma_{\alpha, \beta}(\dot{C}_\alpha) = \dot{C}_\beta$  および  $\Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \sigma_{\alpha, \beta}(\dot{A}) = \dot{A}$  が成り立っている。

ここで、 $|K| = \aleph_2$  であるが、一方で、可算な index set の上で定義される都合のよい名前の総数は  $\aleph_1$  個しかない、つまり、index set の  $S$  の部分および  $J_\alpha \setminus S$  の部分で定義される実数の名前の可能性は本質的に  $\aleph_1$  通りしかないことに注目しよう。このことから、各  $\alpha \in K$  に対応する  $\aleph_2$  個の実数の名前  $\dot{r}_\alpha$  が存在するものの、実は、それらの本質的なバラエティは  $\aleph_1$  通りしかなく、大部分は、名前全体の集合の自己同型写像  $\sigma_{\alpha, \beta}$  によって、「重ね合わせる」ことができる。したがって、 $\alpha, \beta \in K$  ( $\alpha < \beta$  とする) を、 $\sigma_{\alpha, \beta}(\dot{C}_\alpha) = \dot{C}_\beta$  をみたすように選び出せる。このとき、 $\sigma_{\alpha, \beta}(\dot{C}_\beta) = \dot{C}_\alpha$  であり、さらに

$$\Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \text{“}\sigma_{\alpha, \beta}(\dot{r}_\alpha) = \dot{r}_\beta \text{ かつ } \sigma_{\alpha, \beta}(\dot{r}_\beta) = \dot{r}_\alpha \text{”}$$

が成り立つ。

(\*) によって、 $p \Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \langle \dot{r}_\alpha, \dot{r}_\beta \rangle \in \dot{A}$  が成り立っている。ここで、 $\sigma_{\alpha, \beta}$  は  $\mathbb{C}(\kappa)$  の自己同型写像なのだから、

$$\sigma_{\alpha, \beta}(p) \Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \langle \sigma_{\alpha, \beta}(\dot{r}_\alpha), \sigma_{\alpha, \beta}(\dot{r}_\beta) \rangle \in \sigma_{\alpha, \beta}(\dot{A})$$

が成り立つ。したがって、 $p \Vdash_{\mathbb{C}(\kappa)} \langle \dot{r}_\beta, \dot{r}_\alpha \rangle \in \dot{A}$  が成り立つ。  $\square$

## 参考文献

- [1] T. Bartoszyński and H. Judah. *Set Theory: On the Structure of the Real Line*. A. K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

- [2] J. Brendle and S. Fuchino. Coloring ordinals by reals. preprint.
- [3] M. Kada. Covering a bounded set of functions by an increasing chain of slaloms. *Topology Appl.*, 157:277–281, 2007.
- [4] 嘉田 勝, 友安 一夫. How many miles to  $\beta\omega$ ? —  $\beta\omega$  まで何マイル?. 一般及び幾何学的トポロジーと関連する諸問題, 数理解析研究所講究録 1370, pp. 86–101. 京都大学数理解析研究所. 2004.
- [5] M. Kada, K. Tomoyasu and Y. Yoshinobu. How many miles to  $\beta\omega$ ? — Approximating  $\beta\omega$  by metric-dependent compactifications. *Topology Appl.*, 145:277–292, 2004.
- [6] 嘉田 勝, 友安 一夫, 吉信 康夫. How many miles to  $\beta\omega$ ? II. 集合論的及び幾何学的位相空間論とその応用, 数理解析研究所講究録 1419, pp. 105–125. 京都大学数理解析研究所. 2005.
- [7] K. Kunen. *Inaccessibility properties of cardinals*. Ph.D. dissertation, Stanford, 1968.
- [8] K. Kunen. *Set Theory: an introduction to independence proofs*, volume 102 of *Studies in Logic*. North Holland, 1980.
- [9] H. Mildenberger, S. Shelah and B. Tsaban. The combinatorics of  $\tau$ -covers. *Topology Appl.*, 157:263–276, 2007.