数理解析研究所講究録
1533 巻 2007 年 86-102

2階算術における関数空間の扱いと超準解析的手法

東北大学大学院理学研究科 横山 啓太 (Keita YOKOYAMA)
Mathematical Institute, Tohoku University

1 序

この論文では2階算術において関数空間を扱う．2階算術における関数解析については Brown/Simpson [1] 等によりいくつかの逆数学[1]的な結果が知られているが，ここではこれとは異なる角度からのアプローチを考える．1つめのテーマとして，関数解析の基礎としてフーリエ級数についての簡単な逆数学的結果を紹介する．フーリエ級数への展開の可能性には連続関数の可積分性[2]が強く関わっていることが見て取れる．2つめのテーマとして，ACA_0 において関数空間を超準的手法を用いて扱う方法を示し，さらにそれを用いてリーマンの写像定理を ACA_0 において証明する．可算な WKL_0 のモデルを自己埋め込み定理 [4] を用いて拡大することで，WKL_0 において超準解析の一部が展開できることが田中によって示されている [3]．ただし，この方法では弱い移行原理しか成り立たないため，展開できる超準解析の手法もある程度限られる．こでは ACA_0 の可算モデルのうまい拡大を用いることにより，ACA_0 においてより強い移行原理を用いた超準解析の手法を展開する．これにより，通常では arithmetical に扱うことが困難な関数空間の arithmetical な扱いが可能になる．ここで紹介するのは [7] の概略である．

2 準備

2階算術は自然数と自然数の集合を対象とした理論で2元の一階論理を用いて記述される．2階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ は次からなる．

- 数変数:$x, y, z, \ldots$
- 集合変数:$X, Y, Z, \ldots$

[1]逆数学一般については [2, 8] 等参照
[2]2階算術の弱い部分体系 RCA_0 等では連続関数の可積分性は証明できない．

- 定数記号:$0, 1$
- 関数記号:$+, \cdot$
- 関係記号:$<, =, \in$

$\mathcal{L}_2$ から集合変数と関係記号 $\in$ を除いた物が 1 階算術の言語である．これを $\mathcal{L}$ とする．

定義 2.1 $\mathcal{L}_2$ 構造は次の 7 つ組からなる．

$$(M, S, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M).$$

ここで M は数変数の領域であり $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ は集合変数の領域である．また $=$ は M 上で解釈され，$\in$ は $M \times S$ 上で解釈される．この時 $(M, +_M, \cdot_M, 0_M, 1_M, <_M)$ は $\mathcal{L}$ 構造になっている．$\mathcal{L}_2$ 構造は通常単に (M, S) などと書く．

論理式のうち，現れる量化記号が全て有界量化記号（$\forall n \leq t$ や $\exists n \leq t$ という形）である論理式を Σ_0^0 論理式という．さらに θ を Σ_0^0 論理式とするとき，$\exists x_1 \forall x_2 \ldots x_n \theta$ の形の論理式を Σ_n^0 論理式，$\forall x_1 \exists x_2 \ldots x_n \theta$ の形の論理式を Π_n^0 論理式という．また，集合量化記号を含まない論理式を算術的（Σ_0^1）論理式という．さらに θ を Σ_0^1 論理式とするとき，$\exists X_1 \forall X_2 \ldots X_n \theta$ の形の論理式を Σ_n^1 論理式，$\forall X_1 \exists X_2 \ldots X_n \theta$ の形の論理式を Π_n^1 論理式という．

以下で扱う 2 階算術の部分体系は次の 3 つである．

定義 2.2 (1) 体系 RCA_0 は次の公理からなる．

(a) 順序半環の公理

(b) Σ_1^0-帰納法

(c) 次の再帰的内包公理 $\Delta_1^0 - \mathrm{CA}$

$$\Delta_1^0 - \mathrm{CA} : \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x)).$$

ここで $\varphi(x)$ は Σ_1^0 論理式，$\psi(x)$ は Π_1^0 論理式で X を自由変数に持たないものとする．

(2) 体系 WKL_0 は RCA_0 に次の弱ケーニッヒ補題 WKL を付け加えた体系である．

$$\mathrm{WKL} : \forall X\ (X \text{ が無限二分木}) \to (X \text{ は path を持つ}).$$

(3) 体系 ACA_0 は RCA_0 に次の算術的内包公理 $\Sigma^1_0-\mathrm{CA}$ を付け加えた体系である.

$$\Sigma^1_0-\mathrm{CA}:\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow\varphi(x)).$$

ここで $\varphi(x)$ は算術的論理式で X を自由変数に持たないものとする.

2階算術のその他の部分体系については [2, 8] を参照.

RCA_0 において $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ は定義できる. まず $\mathbb{N}:=\{x\mid x=x\}$ により $\mathbb{N}$ を定める. すなわち, 数変数が動く領域全体が自然数全体の集合である. 次に, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への適当な単射を一つ固定することにより, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の元を $\mathbb{N}$ の元と見る. これにより $\mathbb{Z}$ を次のように定義する.

$$\mathbb{Z}:=\{\ \mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \text{の元で}\ \sim_{\mathbb{Z}}\ \text{による同値類の中で}\ \mathbb{N}\ \text{の順序で最小のもの}\ \}.$$

ここで同値関係 $\sim_{\mathbb{Z}}$ は次で定める.

$$(n_1,m_1)\sim_{\mathbb{Z}}(n_2,m_2)\leftrightarrow n_1+m_2=m_1+n_2$$

さらに, $+_{\mathbb{Z}},\cdot_{\mathbb{Z}}$ 等も自然に定義できる. 同様にして $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{N}$ と見てやることにより, $\mathbb{Q}$ も $\mathbb{N}$ の中で定めることができる. また $\mathbb{N}$ 上の関数 $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ や有理数列 $\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$[3] も同様に $\mathbb{N}$ の部分集合と見ることができる. 以下, これらを用いて実数や連続関数を $\mathbb{N}$ の中で定め, その中で解析学の基礎を展開していく.

定義 2.3 (RCA_0) 有理数列 $\alpha=\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が, $\forall l\geq k\ |q_k-q_l|\leq 2^{-k}$ を満たす時, α は実数である ($\alpha\in\mathbb{R}$) という. 2つの実数は次の同値関係 $=_{\mathbb{R}}$ を満たす時, 等しいという.

$$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}=_{\mathbb{R}}\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}\leftrightarrow\forall k\ |p_k-q_k|\leq 2^{-k+1}.$$

実数の演算や大小関係 $+_{\mathbb{R}},\cdot_{\mathbb{R}},\leq_{\mathbb{R}}\ldots$ も自然に定義できる.

すなわち実数は「近似の良い」コーシー列で定義する. 全く同様にして $\mathbb{R}^n$ も定義され, $\mathbb{R}^2$ に演算を定義することで $\mathbb{C}$ も容易に定義される. 次に $\mathbb{R}$ (または $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}$) 上の可算開基 $\{B(q;r)\mid q\in\mathbb{Q},r\in\mathbb{Q}^+\}$ を用いて開集合および連続関数を次のコードで定義する[4].

[3] 以下では $q_n:=\alpha(n)$ 等と置き, 数列らしく $\alpha=\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 等と書く.
[4] $B(a;r):=\{\alpha\in\mathbb{R}\mid|\alpha-a|<r\}$

定義 2.4 (RCA_0) (1) 開集合 U は有理数の組の列 $U = \{(q_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ によりコードされる．$\alpha \in \mathbb{R}$ が U に含まれる $(\alpha \in U)$ ことを次で定める：

$$\alpha \in U \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ \alpha \in B(q_n, r_n).$$

(2) 連続関数 f は次の 3 条件を満たす有理数の 4 つ組の列 $f := \{(a_n, r_n, b_n, s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ によりコードされる：

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\ (a_n = a_m \wedge r_n - r_m \to |b_n - b_m| < s_n + s_m);$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a', r' \in \mathbb{Q}\ (|a' - a_n| + r' < r_n \to \exists m \in \mathbb{N}\ (a_m, r_m, b_m, s_m) = (a', r', b_n, s_n));$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall b', s' \in \mathbb{Q}\ (|b_n - b'| + s_n < s' \to \exists m \in \mathbb{N}\ (a_m, r_m, b_m, s_m) = (a_n, r_n, b', s')).$$

$x, y \in \mathbb{R}$ について $f(x) = y$ を次で定める：

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ x \in B(a_n; r_n) \wedge y \in B(b_n; s_n) \wedge s_n < \varepsilon.$$

すなわち，開集合 U のコードは $\overline{B(q;r)} \subseteq U$ を満たす (q, r) の全体を並べ上げる列であり，連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のコードは $\overline{f(B(q;r))} \subseteq B(q';r')$ を満たす (q, r, q', r') の全体を並べ上げる列 $\{q_n, r_n, q'_n, r'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ である．このコードのみを用いて RCA_0 において連続関数の値 $f(x)$ が計算できる．

C^1-関数は次の定理により，連続関数の 3 つ組 (f, f', e_f) を用いて定義する．

定理 2.5 ([6] Theorem 3.14) f を開集合 D 上の連続関数とする．このとき次の 2 つの命題は RCA_0 において同値．

- f が連続微分可能で，f' がその導関数である．すなわち

$$\forall x\ \lim_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(x).$$

- 連続関数 f, f', e_f が次を満たす．

$$f(x') - f(x) = (x' - x)(f'(x) + e_f(x, x'));$$

$$\forall x\ e_f(x, x) = 0.$$

同様にして $\mathbb{C}$ 上の正則関数も定義される.

集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} (\subseteq \mathbb{N})$ に対し $A_n := \{k \in \mathbb{N} \mid (n,k) \in \mathcal{A}\}$ を考えることにより，$\mathcal{A}$ を集合列 $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と見ることができる．これにより，実数や開集合，連続関数等の列もコードすることができる.

注 1：連続関数の性質の多くは arithmetical に（算術的論理式により）表現できる．例えば連続関数 f, g が等しいことは，$\forall x \in \mathbb{Q}\ f(x) = g(x)$ のように集合量化記号を用いずに表現できる．(実数についての量化記号は集合量化記号である．)

注 2：微分についての諸性質（chain rule 等）は前述の定理を用いることにより RCA_0 において示される.

3 フーリエ解析の基礎

この節では，周期性を持つ連続関数のフーリエ級数展開の可能性を調べる．この節においては，特に断らない限り連続関数と言えば周期 2π を持つものとする．まずは連続関数の可積分性を定義する.

定義 3.1 (RCA_0) [5]連続関数 f が effectively integrable とは，関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ が存在して次を満たすことである:

任意の $[-\pi, \pi]$ の分割 Δ_1, Δ_2 について,

$$|\Delta_1| \leq \frac{2^{-h(n)}}{2\pi} \wedge |\Delta_2| \leq \frac{2^{-h(n)}}{2\pi} \to |S_{\Delta_1} - S_{\Delta_2}| < 2^{-n}.$$

ここで分割 $\Delta : -\pi = t_0 \leq \xi_1 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = \pi$ について，$|\Delta| := \max\{t_i - t_{i-1}\}$,

$$S_\Delta := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

と定める.

f が effectively integrable (以下 e-int. と書く) の時，RCA_0 において h を用いて $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ が計算できる．多項式関数が e-int. になることは RCA_0 において容易に示される．可積分性について以下のことが知られている.

[5]以下「**定理 1.1** (T)」等と書くことにより，この定理（あるいは定義等）が体系 T で成り立つことを表すとする.

定理 3.2 **([2] 他)** RCA_0 において次の４つが成り立つ.

(1) 命題「任意の連続関数は effectively integrable である」は WKL_0 と同値.

(2) 命題「任意の C^1-関数は effectively integrable である」は WKL_0 と同値.

(3) 命題「有界な連続関数は effectively integrable である」は WWKL_0 と同値[6].

(4) e-int. な連続関数の和, 積, 級数等で定義される連続関数は再び e-int. になる. 特に $\sin x$, $\cos x$ はべき級数により定義でき, さらに e-int. になる.

以上の下でフーリエ級数の基本的な扱いを２階算術の上で展開し, フーリエ級数の一様収束性 (定理 3.5) およびフーリエ級数の L^2-収束性 (定理 3.7, 3.8) について調べる. まずは基本的な補題を示す.

補題 3.3 **(RCA_0:Bessel の不等式)** f を e-int. な連続関数とし, フーリエ係数を,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx; \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx. \end{aligned}$$

により定める. この時任意の n について,

$$2\pi\sum_{i=0}^{n}(|a_i|^2+|b_i|^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

証明 通常の証明が RCA_0 でそのまま行える.

補題 3.4 **(RCA_0)** f は C^1-関数で f, f' が e-int. とする. f のフーリエ係数を a_k, b_k とすると,

$$S_n[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k \sin kx$$

は f に一様収束する.

証明

$$K = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2 dx$$

[6] WWKL_0 は WKL_0 より少し弱い体系で, RCA_0 に次の弱弱ケーニッヒ補題を加えた体系である. 弱弱ケーニッヒ補題：二分木 X が path を持たないなら $\lim_{n\to\infty}(X$ の長さ n の枝の数$)/2^n = 0$.

とおく．また f' のフーリエ係数を a'_k, b'_k とする．部分積分が RCA_0 で行えることに注意すると，

$$\begin{aligned}\pi a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ &= \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx dx = \frac{\pi b'_k}{k}. \\ \pi b_k &= \frac{\pi a'_k}{k}.\end{aligned}$$

シュワルツの不等式と前補題より，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=n}^{m} |a_k| + |b_k| \\ \leq\ & \sqrt{2\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum_{k=n}^{m} |b'_k|^2 + |a'_k|^2} \\ \leq\ & K\sqrt{2\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2}}.\end{aligned}$$

よって $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |b_k|$ は $\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$ と同程度の速さで収束する．$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$ の収束は RCA_0 で示されるため $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |b_k|$ も有限の値に収束することがわかる[7]．従って，優収束定理（RCA_0 で証明される）を用いると，次の連続関数 g が存在する;

$$\begin{aligned}g(x) &= \lim_{n\to\infty} S_n[f](x) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.\end{aligned}$$

$\bar{f} = g - f$ とおくと，次の事実から $\bar{f} \equiv 0$ がわかる．

事実 (RCA_0) 連続関数 f が e-int. であり，任意の k に対して

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0$$

を満たせば，$f \equiv 0$ である．

以上により，S_n が f に一様収束することが示された．

定理 3.5 RCA_0 において，命題 1「任意の C^1-関数は一様収束するフーリエ級数展開を持つ」は WKL_0 と同値である．

[7] RCA_0 においては，有界単調性のみでは収束は示されない．

証明 WKL_0 から命題 1 が出ることは前補題と定理 3.2 より明らか．命題 1 から WKL_0 が出ることを示す．そのためには，定理 3.2 より，一様収束するフーリエ級数展開を持つ C^1-関数が integrable であることを示せば良い．ところが，$\sin x, \cos x$ は RCA_0 において e-int. になり，また一様収束する e-int. な関数級数について項別積分ができることは RCA_0 で示される．従って一様収束するフーリエ級数展開を持つ C^1-関数は e-int. である．以上により定理は示された．

定義 3.6 (RCA_0:L^2-**収束**) 連続関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が連続関数 f に L^2-収束するとは，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $k \in \mathbb{N}$ と e-int. な連続関数 g が存在して，

$$\forall m \geq k\ |f_m(x) - f(x)| \leq g(x);$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2 dx < 2^{-n}$$

を満たすことである．

定理 3.7 RCA_0 において，命題 2 「任意の連続関数は L^2-収束するフーリエ級数展開を持つ」は WKL_0 と同値である．

定理 3.8 WWKL_0 において，命題 3 「有界な連続関数は強 L^2-収束するフーリエ級数展開を持つ」が成り立つ[8]．

定理 3.7, 3.8 の証明 WKL_0 から命題 2 および WWKL_0 から命題 3 の概略を示す．定理 3.2 により，連続関数（あるいは有界な関数）が e-int. になることがわかる．よって，e-int. な連続関数 f に対して，そのフーリエ係数を a_k, b_k とすると，

$$S_n[f](x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

が f に L^2-収束することを示せばよい．

通常の数学の証明においてはこの収束性を示すために mollifier と呼ばれる積分作用素を用いて f を滑らかに近似する．RCA_0 においては mollifier を用いるような良い近似は作れないため，e-int. を保証する関数 $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を用いて次の条件を満たす近似列 $\{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を構成する．

[8] 「強い L^2-収束」で同様の命題を考えると RCA_0 において WWKL_0 と同値になる

- $\{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は f に L^2-収束する.

- 各 $\tilde{f}_i$ は C^1-関数であり，$\tilde{f}_i, \tilde{f}_i{}'$ は e-int. である.

具体的には，$[-\pi,\pi]$ を $2^{h(i)}$ 等分割してその端点を $\langle t_j : j \le 2^{h(i)}\rangle$ として，$\tilde{f}_i$ を次のように定めればよい.

- $\tilde{f}_i(t_j) = f(t_j)$ により $\tilde{f}_i(t_j)$ を定める.

- 区間 $[t_j, t_{j+1}]$ において単調かつ C^1 になるように２次曲線でつなぐ.

これを用いると，三角不等式により，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n[f](x))^2dx \\
\le\;& \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-\tilde{f}_i(x))^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}(\tilde{f}_i(x)-S_n[\tilde{f}_i](x))^2dx + \int_{-\pi}^{\pi}(S_n[\tilde{f}_i](x)-S_n[f](x))^2dx.
\end{aligned}
$$

ここで Bessel の不等式により (第３項) $\le$ (第１項) であり，$\{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が f に L^2-収束することより，第１項は任意に小さくできる.

また $\tilde{f}_i$ は C^1-関数であり，$\tilde{f}_i, \tilde{f}_i{}'$ は e-int. であることから，補題 3.4 により，$S_n[\tilde{f}_i]$ は $\tilde{f}_i$ に一様収束する．よって明らかに $S_n[\tilde{f}_i]$ は $\tilde{f}_i$ に L^2-収束するので，第２項も任意に小さくできる．以上より $S_n[f]$ は f に L^2-収束することが示された.

定理 3.7 の逆向きについては，$\neg\mathsf{WKL}_0$ により構成される病的な連続関数を用いて，フーリエ級数展開を持たない連続関数を構成する（略）.

フーリエ級数の基本的な性質について，他に次のようなことがわかっている.

定理 3.9 (RCA_0:**Perseval の等式**) f を e-int. な連続関数とし，a_k, b_k をそのフーリエ係数とすると

$$2\pi\sum_{i=0}^{\infty}(|a_i|^2+|b_i|^2) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2dx.$$

定理 3.10 (RCA_0:**Riemann-Lebesgue の定理**) f を e-int. な連続関数とすると，任意の $a, b\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\,dx = 0.$$

さらに Riemann-Lebesgue の定理を用いると次が得られる.

定理 3.11 (RCA$_0$:各点収束) f を有界変動（2つの単調な連続関数の差で表せる）な連続関数とする．この時 f は e-int. であり，さらにフーリエ級数 $S_n[f]$ は f に各点収束する．

定理 3.12 (WWKL$_0$:フーリエ級数の局所性) 2つの連続関数 f_1, f_2 が点 $x_0 \in \mathbb{R}$ のある近傍で $f_1 \equiv f_2$ を満たしているとする．この時 f_1, f_2 のフーリエ級数の x_0 における収束・発散，収束したときの極限値は一致する．

4 超準的手法を用いた関数空間の扱い

この節では ACA$_0$ のモデルの拡大を用いて ACA$_0$ において超準解析的手法で関数空間を扱う．

4.1 超準モデル

ACA$_0$ の可算モデル $V = (M, S)$ に対して，V を標準モデルに見立てて V に対する超準モデルにあたる拡大 $^*V = (^*M, ^*S)$ を考える．

定理 4.1 (超準モデル) $V = (M, S)$ を ACA$_0$ の可算モデルとする．このとき次を満たすような ACA$_0$ の可算モデル $^*V = (^*M, ^*S)$ が存在する．

(1) $^*M$ は M の真の終拡大．

(2) $S = \{X \cap M \mid X \in {}^*S\}$.

(3) Σ^1_1 保存的な写像 $* : (M, S) \longrightarrow (^*M, ^*S)$ が存在する．

この定理において，条件 (1) は M を標準自然数に見立てた時それに対する「超準元」が存在することを保証する．条件 (2) は $^*V$ における実数や連続関数を考えたときに，それらの「標準部分」が V において取れることを保証する．そして条件 (3) は Σ^1_1 論理式に関する「移行原理」が成り立つことを表している．

ACA$_0$ の任意の可算モデルに対して超準モデルに当たる拡大が存在することで，ACA$_0$ で超準解析的な手法が展開できる．

4.2 Ascoli-Arzelá の定理

超準解析的な手法を用いた関数空間の扱いの例として，Ascoli-Arzelá の定理を超準モデルを用いて証明する．

定理 4.2 (ACA_0**:Ascoli-Arzelá の定理)** $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $[0,1]$ 上の同程度連続かつ一様有界な連続関数（のコード）の列とする．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列で，一様収束する物が存在する．

証明 $V=(M,S)$ を ACA_0 の可算モデルとし，${}^*V=({}^*M,{}^*S)$ を定理 4.1 の (1), (2), (3) を満たす拡大とする．$\mathcal{F}=\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $[0,1]$ 上の同程度連続かつ一様有界な連続関数の列とする．すると，(3) の移行原理により $*(\mathcal{F})\in{}^*S$ は ${}^*V$ における $[0,1]$ 上の同程度連続かつ一様有界な連続関数の列である．以降 $*(A)={}^*A$ と書く[9]．

$\omega\in{}^*M\setminus M$ を取る．同程度連続性と一様有界性から ${}^*f_\omega$ が「S-連続」，すなわちコード ${}^*f_\omega$ のうち S に属する部分だけを取ると V での連続関数（のコード）になっていることを示せば良い．

同程度連続性より，

$$\forall\alpha\in[0,1]\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\alpha,\varepsilon,\delta\in V)$$
$$V\models\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in[0,1]\ |\alpha-x|<\varepsilon\rightarrow|f_n(\alpha)-x|<\delta.$$

よって移行原理から

$$\forall\alpha\in[0,1]\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\alpha,\varepsilon,\delta\in V)$$
$${}^*V\models\forall n\in{}^*\mathbb{N}\ \forall x\in[0,1]\ |{}^*\alpha-x|<{}^*\varepsilon\rightarrow|{}^*f_n({}^*\alpha)-x|<{}^*\delta.$$

従って

$$\forall\alpha\in[0,1]\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\alpha,\varepsilon,\delta\in V)$$
$${}^*V\models\overline{B({}^*f_\omega({}^*\alpha);\delta)}\subseteq B({}^*\alpha;\varepsilon).$$

すなわち ${}^*f_\omega$ は S-連続であり，その標準部分 $g:={}^*f_\omega\cap M$ は V において $[0,1]$ 上の連続関数である．

[9] 集合列（実数列, etc.）$\mathcal{A}=\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を考えた場合，移行原理より $*(\mathcal{A})$ も集合列（実数列, etc.）である．この時，$*(\mathcal{A})=\{\hat{A}_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ とおくと，移行原理により $\hat{A}_n$ と $*(A_n)$ は一致する．よってこれらを区別せずに ${}^*\mathcal{A}=\{{}^*A_n\}_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ と書く．

$^*g$ と $^*f_\omega$ の標準部分は一致するので，

$$\forall \varepsilon > 0\ (\varepsilon \in V)\ {}^*V \models \|{}^*f_\omega - {}^*g\| < \varepsilon.$$

よって

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ (\varepsilon \in V)\ {}^*V \models \exists n \in {}^*\mathbb{N}\ n > m \wedge \|{}^*f_n - {}^*g\| < \varepsilon.$$

従って移行原理より，

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ (\varepsilon \in V)\ V \models \exists n \in \mathbb{N}\ n > m \wedge \|f_n - g\| < \varepsilon.$$

これより g に収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列は容易に構成できる．

以上より，任意の $\mathsf{ACA_0}$ の可算モデルにおいて「Ascoli-Arzelá の定理が成り立つ」ことがわかったので，完全性定理から

$$\mathsf{ACA_0} \vdash \text{Ascoli-Arzelá の定理}$$

が示された．

4.3 Riemann の写像定理

この節では，複素平面上の正則関数の空間を扱い， $\mathsf{ACA_0}$ において Riemann の写像定理が証明できることを示す．ここで扱うべき関数空間はそのままでは arithmetical に扱うことが難しく，超準解析的手法が威力を発揮する．

定義 4.3 ($\mathsf{RCA_0}$:**解析関数**) 開集合 D 上の解析関数 f は，次の組 $f = (\{(a_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\alpha_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}k\in\mathbb{N}})$ でコードされる．ここで $\alpha_{nk} \in \mathbb{C}$ かつ $a_n \in \mathbb{C}, r_n \in \mathbb{Q}$ であり，さらに次を満たす：

(1) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a_n; r_n) = D$;

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_{nk}| {r_n}^k$ は収束する;

(3) $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \forall z \in B(a_n; r_n) \cap B(a_m; r_m)$,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{nk}(z - a_n)^k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{mk}(z - a_m)^k.$$

ここで $\{\alpha_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $B(a_n;r_n)$ 上のべき級数 $f_n(z) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_{nk}(z-a_n)^k$ を表している．$z \in B(a_n;r_n) \subseteq D$ に対して $f(z) := f_n(z)$ により関数 f の値を定める．よってその l 階導関数は次のように定めることで得られる．

$$f^{(l)} = (\{(a_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\frac{(k+l)!\alpha_{n(k+l)}}{k!}\}_{n\in\mathbb{N}k\in\mathbb{N}}).$$

すなわち，

$$f^{(l)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+l)!}{k!} \cdot \alpha_{n(k+l)}(z-a_n)^k \quad (z \in B(a_n;r_n)).$$

解析関数と正則関数の関係について次がわかっている．

定理 4.4 (RCA$_0$:[6] **Theorem 4.13**) 正則関数は解析関数であり，解析関数は正則関数である．すなわち，正則関数のコード (f, f', e_f) の組が与えられたとき，同じ関数を表す解析関数のコード $f = (\{(a_n, r_n)\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\alpha_{nk}\}_{n\in\mathbb{N}k\in\mathbb{N}})$ が取れる．同様に解析関数のコードを与えられれば，正則関数のコードを得られる．

従って，以降では正則関数と解析関数を区別せずに扱う．

定理 4.5 (ACA$_0$:**Riemann の写像定理**) 任意の単連結[10]な開集合 $D_0 \subset \mathbb{C}$ $(D_0 \neq \mathbb{C})$ に対して双正則写像 $f : D_0 \to B(0;1)$ が存在する．すなわち，互いに逆写像であるような正則関数の組 $f : D_0 \to B(0;1)$ と $f^{-1} : B(0;1) \to D_0$ が存在する．

この定理は次の 3 つの補題より得られる．

補題 4.6 (WKL$_0$) 任意の単連結開集合 $D_0 \subset \mathbb{C}$ $(D_0 \neq \mathbb{C})$ に対して，ある単連結開集合 $0 \in D \subseteq B(0;1)$ と D_0 から D への双正則写像が存在する．

証明　WKL$_0$ ではコーシーの積分定理が成り立つので，積分により容易に D_0 から $B(0;1)$ の内部への双正則写像を構成できる．

補題 4.7 (ACA$_0$) 単連結開集合 $0 \in D \subseteq B(0;1)$ 上の解析関数の空間

$$\mathcal{F} := \{f : D \to E_f \subseteq B(0;1) \mid f(0) = 0 \text{ かつ逆写像 } f^{-1} : E_f \to D \text{ を持つ}\}$$

を考えたとき，$h \in \mathcal{F}$ で $|h'(0)| = \sup\{|f'(0)| \mid f \in \mathcal{F}\}$ を満たすものが存在する．

[10] 開集合 D が単連結であるとは，D 内の任意の単純閉な折れ線（始点と終点が一致し，交わりの無い折れ線）について，その内部（RCA$_0$ で定義できる）が D に含まれることである．単連結な開集合上では WKL$_0$ においてコーシーの積分定理が成り立つ [5]．

この補題は超準解析的手法を用いて証明する（後述）.

補題 4.8 h が補題 4.7 の条件を満たす解析関数の時，$E_h = B(0;1)$，すなわち h は D から $B(0;1)$ への双正則写像である.

証明 コーシーの積分定理を用いて容易に示せる.

定理 4.5 の証明 補題 4.6 によって D_0 から D への双正則写像が得られ，補題 4.7, 4.8 によって D から $B(0;1)$ への双正則写像が得られる．よってこれらを合成すればよい.

補題 4.7 の証明のために解析関数の 2^{-m} 近似（単に m 近似とも言う）を考える．まず次のように記号を定める.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(m) := \{q_0 2^{-m} \in \mathbb{Q} \mid q_0 \in \mathbb{Z}\};\\
&\bar{\mathbb{Q}}(m) := \{q_1 + iq_2 \in \mathbb{C} \mid q_1, q_2 \in \mathbb{Q}(m)\};\\
&\mathbb{Q}(U;m) := \{q \in \bar{\mathbb{Q}}(m) \mid \overline{B(q;2^{-m+2})} \subseteq U\};\\
&\mathfrak{N}(D;m) := \bigcup_{k=0}^{m} \{(q, 2^{-k+2}) \mid q \in \mathbb{Q}(D;k)\};\\
&\mathrm{Seq}(l;m) := \bar{\mathbb{Q}}(m+l+3)^l.
\end{aligned}
$$

ここで $\mathfrak{N}(D;m)$ は開集合 D の m 近似であり，$\sigma \in \mathrm{Seq}(l;m)$ はべき級数の近似多項式 $\sum_{k=0}^{l-1} \sigma(k)(z-a)^k$ を表している．これを用いて解析関数の m 近似を次で与える.

定義 4.9 (RCA$_0$) $D \subseteq B((0;1)$ を開集合とし，f を D 上の解析関数とする.

(1) D 上の (m,l) 近似解析関数 $\mathcal{P}$ は次の組 $\mathcal{P} := \{\{(q_n, r_n)\}_{n<c}, \{\sigma_n\}_{n<c}\}$ でコードされる．ここで $\langle q_n, r_n \mid n < c\rangle$ は $\mathfrak{N}(D;m)$ の並べ上げであり，$\sigma_n \in \mathrm{Seq}(l;m)$ であって，さらに次を満たす：

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall z \in B(q_{n_1}; r_{n_1}) \cap B(q_{n_2}, r_{n_2}) \quad |\mathcal{P}_n(z) - \mathcal{P}_n(z)| < 2^{-m}.$$

ここで，

$$\mathcal{P}_n(z) := \sum_{k=0}^{l-1} \sigma_n(k)(z-q)^k.$$

(2) (m,l) 近似解析関数 $\mathcal{P} = \{\{(q_n, r_n)\}_{n<c}, \{\sigma_n\}_{n<c}\}$ が f の m 近似であるとは

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z \in B(q_n; r_n) \quad |\mathcal{P}_n(z) - f(z)| < 2^{-m-1}$$

となることである.

テーラーの定理（ RCA_0 で証明される）により, D 上の任意の解析関数は（l をある程度大きくとれば） m 近似を持つことがわかる. 近似解析関数は有限のデータでコードできる. よってこれを用いて関数空間を考える.

補題 4.7 の証明 ACA_0 の可算モデル $V = (M, S)$ を一つ固定し, $^*V = (^*M, {}^*S)$ を定理 4.1 の (1), (2), (3) を満たす拡大とする. $\omega \in {}^*M \setminus M$ を取る.

このとき, 次の 3 条件が成り立つ.

(I) $f \in V$ が解析関数であり, $\mathcal{P}$ が $^*f$ の ω 近似解析関数であるとき, $\mathcal{P}$ の標準部分 $\mathcal{P}_M := \mathcal{P} \cap M \in V$ は解析関数となり, その値は V において f に一致する.

(II) 条件 (F)

- $f(0) = 0$;
- $|f'(0)| \geq 1$;
- $\forall z \in D\ f(z) \in B(0;1)$;
- 逆写像を持つ

は, 近似解析関数の条件として, 各々 arithmetical に表現できる（標準部分が解析関数になるとき, それらの性質をもつように条件を与える）. この近似解析関数に対する条件 (F) の arithmetical な表現を条件 (*F) とする.

(III) 近似解析関数の地域が有界で, その微分が 0 にならないとき（特に逆写像の条件を持つとき）, その標準部分は常に解析関数になる.

$\mathcal{F}$ を D 上の解析関数で条件 (F) 満たすもの全体とする. このような関数空間は V においては集合として存在しないどころか arithmetical に表現することも難しい. そこで, $^*V$ において

$$^*\mathcal{F} := \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ は } D \text{ 上の } \omega \text{ 近似解析関数で条件 (*F) を満たす}\}$$

を考える．近似解析関数は有限なコードで与えられるので (II) により $^*\mathcal{F}$ は集合になる．(III) により $^*\mathcal{F}$ の元の標準部分は常に存在し，しかも (I) により $^*\mathcal{F}$ の元の標準部分全体は $\mathcal{F}$ に一致する．よって $^*\mathcal{F}$ を用いて求める関数を探す．

$^*V$ において $\alpha = \sup\{|\mathcal{P}'(0)| \mid \mathcal{P} \in {}^*\mathcal{F}\}$ とおく．さらに $\mathcal{P} \in {}^*\mathcal{F}$ で $|\mathcal{P}'(0)| > \alpha - 2^{-\omega}$ となるものをとる．すると V において $\mathcal{P}_M \in \mathcal{F}$ であり $|\mathcal{P}'_M(0)| = \alpha_M$ （α_M は α の標準部分）であり，これが求める解析関数になる．以上により補題2を示すことができた．

リーマンの写像定理においては，基準点を考えて，双正則写像を回転をのぞいて唯一に定めることもできる．(ACA_0 においても示される.) また，WKL_0 においてリーマンの写像定理を仮定すると ACA_0 が得られる．すなわち，

定理 4.10 WKL_0 において Riemann の写像定理は ACA_0 と同値である．

謝辞

この研究を進めるにあたり指導教官の田中一之先生，山崎武先生には様々な助言を頂きました．この場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] Douglas K. Brown and Stephen G. Simpson. The Baire category theorem in weak subsysytems of second-order arithmetic. *The Jounal of Symbolic Logic*, 58(2):557–578, June 1993.

[2] Stephen G. Simpson. *Subsystems of Second Order Arithmetic.* Springer-Verlag, 1999.

[3] Kazuyuki Tanaka. Non-standard analysis in WKL_0. *Math. Logic Quart.*, 43(3):396–400, 1997.

[4] Kazuyuki Tanaka. The self-embedding theorem of WKL_0 and a non-standard method. *Annals of Pure and Applied Logic*, 84:41–49, 1997.

[5] Keita Yokoyama. Complex analysis in subsystems of second order arithmetic. to appear.

[6] Keita Yokoyama. Differential calculus and complex analysis in subsystems of second order arithmetic. Master Thesis, Tohoku University, February 2005.

[7] Keita Yokoyama. Non-standard analysis in ACA_0 and Riemann mapping theorem. preprint.

[8] 田中一之. **逆数学と２階算術**. 河合文化教育研究所, 1997.