数理解析研究所講究録
1534 巻 2007 年 77-92

カントール極小 $\mathbb{Z}^2$ 系の軌道同型による分類について

千葉大学大学院自然科学研究科
松井宏樹

1 序

X をカントール集合とし、φ を $\mathbb{Z}^d$ の X への同相写像による作用とします。任意の $n\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}$ と $x\in X$ に対して $\varphi^n(x)\neq x$ となるとき、φ は自由であると言われます。任意の $x\in X$ に対してその φ による軌道 $\{\varphi^n(x)\mid x\in\mathbb{Z}^d\}$ が X において稠密となるとき(これは φ が自明でない不変閉集合を持たない事と同値です)、φ は極小であると言われます。φ が自由かつ極小であるとき、(X,φ) をカントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系と呼びます。

カントール集合上の自由かつ極小な作用は、可測力学系におけるエルゴード的な作用の、位相力学系における類似と見なすことが出来ます。このような観点から、カントール集合上の自由かつ極小な作用を、軌道同型によって分類しようという試みが、10 年ほど前から始められました。このノートではこの問題に関する最近の進展を報告したいと思います。

まずは問題を正確に述べたいと思います。前述のように、(X,φ) をカントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系とします。さらに、別のカントール集合 Y があって、(Y,ψ) がカントール極小 $\mathbb{Z}^{d'}$ 系であるとします。

定義 1. X から Y への同相写像 F で、任意の $x\in X$ に対して

$$\{F(\varphi^n(x))\mid n\in\mathbb{Z}^d\}=\{\psi^m(F(x))\mid m\in\mathbb{Z}^{d'}\}$$

となるものが存在するとき、(X,φ) と (Y,ψ) は軌道同型であるという。

(X,φ) と (Y,ψ) がいつ軌道同型となるかを判定したいというのが問題です。言い換えれば、カントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系を軌道同型によって分類したいということです。

分類すると言っても、素朴に考えると、不変量となってくれるようなものは 1 つしか見当たりません。すなわち X 上の φ 不変確率測度の空間です。X 上の φ 不変な確率測度の

全体を M_φ と書きましょう。上に述べた定義のように、F が X から Y への同相写像であって、(X,φ) と (Y,ψ) の間の軌道同型を導いているとしましょう。すると、簡単な議論から、$F_*(M_\varphi)=M_\psi$ が成り立っていることが分かります。つまり M_φ は軌道同型に関する「不変量」になっているわけです。果たしてこれが完全不変量になっているのかという事が問題になってきます。次の予想は Skau 予想と呼ばれています。

予想 2. (X,φ) がカントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系であって、(Y,ψ) がカントール極小 $\mathbb{Z}^{d'}$ 系であるとする。このとき次の 2 つは同値である。

(1) (X,φ) と (Y,ψ) は軌道同型である。

(2) X から Y への同相写像 F であって、$F_*(M_\varphi)=M_\psi$ となるものがある。

もちろん (2)⇒(1) を示すことが難しいわけです。(1) を示すには、軌道同型を導いてくれるような同相写像 $F: X\to Y$ を構成しなくてはいけませんが、(2) から (1) を示す際に、(2) に現れている同相写像 $F: X\to Y$ そのものが軌道同型を導いてくれるというような事は、全く期待できません。そこに本質的な難点があります。

今から約 10 年前に Giordano-Putnam-Skau という 3 人組によって（[GPS1]）次が示されました。

定理 3 ([GPS1]). 上の予想は $d=d'=1$ の時には正しい。

この成果を足がかりとして、Giordano-Putnam-Skau は $d=2$ の場合を攻略することを目指しました。いくつかの過渡的な成果を経て、最終的に次の命題が得られました。

定理 4 ([GMPS1]). 上の予想は $1\le d,d'\le 2$ の時にも正しい。

このノートではこの定理の証明の概略について述べたいと思います。

2 AF 同値関係

定理 4 を証明をするには、AF（Approximately Finite）と呼ばれる同値関係を経由することが鍵となります。この節では、AF 同値関係を導入したあと、定理 4 の証明の方針を説明したいと思います。étale 同値関係や AF 同値関係の定義や性質についてもっと詳しくお知りになりたい方は、[GPS2] をご覧ください。

X をカントール集合とし、$R\subset X\times X$ を X 上の同値関係とします。

$$[x]_R=\{y\in X\mid (x,y)\in R\}$$

とおき、これを x の R-軌道（もしくは単に軌道）と呼びましょう。どんな $x\in X$ に対し

ても $[x]_R$ が高々可算であるとき、R は可算な同値関係であると言われます。以下では特に断らなくても、同値関係と言えば可算なものだけを常に考えると約束します。また、任意の $x \in X$ に対して、$[x]_R$ が X で稠密であるとき、R は極小であると言うことにしましょう。(X, φ) がカントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系のとき、

$$R_\varphi = \{(x, \varphi^n(x)) \in X \times X \mid x \in X, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

とおくと、これは極小な同値関係の例になっています。一般の同値関係に対しても、次のようにして軌道同型の定義を拡張しておきましょう。

定義 5. X_1, X_2 がカントール集合であって、$R_1 \subset X_1 \times X_1$ と $R_2 \subset X_2 \times X_2$ が同値関係であるとする。X_1 から X_2 への同相写像 F であって、任意の $x \in X_1$ に対して $F([x]_{R_1}) = [F(x)]_{R_2}$ となるものが存在するとき、R_1 と R_2 は軌道同型であると言う。

私たちの目的は、カントール集合上の何らかの極小な同値関係を、上で定義された軌道同型という概念によって、分類することです。まずはétale な同値関係を定義する必要があります。

定義 6. X 上の同値関係 R に位相が入っていて、$(x, y) \times (y, z) \mapsto (x, z)$ という演算で R を groupoid とみなした時に、R がその位相で r-discrete groupoid（[R] 参照）となるとき、R をétale 同値関係と呼ぶ。

一般に、1 つの同値関係 R に対して、それをétale 同値関係にするような位相は、1 つには定まりません。従って、どのような位相を入れてétale 同値関係とみなすのか、はっきりさせなければいけません。また、R は $X \times X$ の部分集合なので、$X \times X$ の積位相を R に制限することを考えてしまいますが、その位相によって R がétale になることは、ほとんどありません。

カントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系 (X, φ) に付随する同値関係 R_φ を考えましょう。φ は自由ですから、R_φ と $X \times \mathbb{Z}^d$ との間には、$(x, \varphi^n(x)) \mapsto (x, n)$ という全単射が存在します。$X \times \mathbb{Z}^d$ には通常の積位相が入っていると思って、この全単射によって $X \times \mathbb{Z}^d$ の位相を R_φ にコピーしましょう。すると、この位相によって R_φ はétale 同値関係になることが分かります。このようにして R_φ は自然にétale 同値関係となります。

ここで AF 同値関係を定義します。

定義 7. R がétale 同値関係であるとする。R の部分同値関係の列 $R_1, R_2, \ldots$ であって、次を満たすものが存在するとき、R を AF 同値関係と呼ぶ。

(1) $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots$ であって、$\bigcup_n R_n = R$

(2) R_n はコンパクトな開集合

étale 同値関係の open な部分同値関係はまたétale になる事がすぐに分かるので、上の定義に現れる R_n はコンパクトなétale 同値関係である事になります。つまり、コンパクトなétale 同値関係の増大和として表されるようなétale 同値関係を、AF 同値関係と呼ぶという事です。コンパクトなétale 同値関係に関して次が成り立ちます。

補題 8. R が X 上のétale な同値関係であるとする。

(1) R がコンパクト $\Leftrightarrow$ R の位相が $X \times X$ からの相対位相に一致

(2) R がコンパクトならば、$\sup\{\#[x]_R \mid x \in X\} < \infty$

この補題の (2) によって、コンパクトでétale な同値関係は「finite な同値関係」とみなせることが分かります。そして、コンパクトなétale 同値関係の増大和で書けるようなものを、AF（近似的に finite）と呼ぶわけです。

[GPS1] の主要な結果の 1 つが、次に述べる AF 同値関係の軌道同型による分類定理でした。

定理 9 ([GPS1]). $i = 1, 2$ に対して、X_i をカントール集合とし、R_i を X_i 上の極小な AF 同値関係とする。M_i を X_i 上の R_i-不変な確率測度の全体とするとき、次の 2 つの条件は同値になる。

(1) R_1 と R_2 は軌道同型

(2) 同相写像 $F : X_1 \to X_2$ が存在して、$F_*(M_1) = M_2$ となる。

別の言い方をすれば、不変確率測度の空間という「不変量」によって分類可能であるようなクラスに、AF 同値関係は入っているという事です。従って、ある同値関係がこのような意味で分類可能であることを示すには、その同値関係が AF 同値関係に軌道同型であることさえ示せば十分であるという事になります。そこで次のような定義をしましょう。

定義 10. カントール集合上の同値関係 R が、AF 同値関係と軌道同型になるとき、R は affable であると言う。

R が AF 同値関係になってくれるような位相を R に入れることが出来る時に、R を affable と呼ぶ、と言い換えることもできます。つまり affable とは、「AF にできる」＝「AF-able」という事です。ちなみに affable という単語は、辞書によれば、「気やすく話せる・気のおけない・丁重な・物柔らかな」という意味だそうです。カントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系 (X, φ) から生じるétale 同値関係は、決して AF 同値関係にはなりません。しかし、位相

を入れ替えてやることによって、新しい位相によって AF 同値関係になる可能性はあります。そのようなことができるときに affable であると言うわけです。$d=1$ の場合に R_φ が affable になることの証明は [GPS2] に出ています。次節以降で、$d=2$ の場合にも R_φ が affable になることを説明して行きたいと思います。

3 吸収定理

前節では、与えられた同値関係を軌道同型によって分類するには、その同値関係が affable であることを示せば十分であるという事を、説明しました。この節では、affability を示すための強力な道具である吸収定理について、説明したいと思います。

その前に、Forrest の結果 [F] について簡単に復習しておきます。(X,φ) をカントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系とし、R_φ を (X,φ) から生じるétale 同値関係とします。Forrest は、R_φ の open な部分同値関係 R と X の閉部分集合 Y で、次を満たすものを構成しました。

- R は（R_φ からの相対位相によって）AF 同値関係
- 任意の R-不変確率測度 μ に対して $\mu(Y)=0$
- $x\in X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^d}\varphi^n(Y)$ ならば $[x]_{R_\varphi}=[x]_R$

雑に言えば、測度がゼロになるような集合を除いて R と R_φ は一致しているという事です。R_φ は「ほとんど AF」であると言う事もできるでしょう。問題はいかにして R と R_φ の差を処理するかという点にあります。それに答えてくれるのが、今から説明する吸収定理です。

まず記号を導入する必要があります。R と S が X 上の同値関係であるとき、

$$R\times_X S=\{((x,y),(y,z))\mid(x,y)\in R,(y,z)\in S\}$$

とおき、写像 $r,s:R\times_X S\to X$ を

$$r((x,y),(y,z))=x,\quad s((x,y),(y,z))=z$$

で定めます。R と S が位相を持っているときには、$R\times_X S$ には積空間からの相対位相を入れます。

X をカントール集合とし、R を X 上の AF 同値関係、K を X 上のコンパクトなétale 同値関係とします。次の 2 つの条件が成り立っているとき、K は R に対して横断的であると言う事にします。

- $K\cap R=\{(x,x)\mid x\in X\}$

- $R \times_X K$ から $K \times_X R$ への同相写像 h であって、$r \circ h = r$ かつ $s \circ h = s$ となるものが存在する。

R と K で代数的に生成される X 上の同値関係を $R \vee K$ と書くことにします。

補題 11. R が AF 同値関係であって、K がコンパクトなétale 同値関係であるとする。K が R に対して横断的であるならば、$r \times s$ は $R \times_X K$ から $R \vee K$ への全単射写像を与える。さらに、この対応によって $R \times_X K$ の位相を $R \vee K$ にコピーすると、$R \vee K$ は AF 同値関係になる。

つまり、K が R に対して横断的であれば、$R \vee K$ には自然に位相が入り、その位相によって AF になるわけです。

もう 1 つだけ定義が必要です。R が X 上のétale な同値関係であって、Y が X の閉部分集合であるとします。$R \cap (Y \times Y)$ が（R からの相対位相によって）étale となるとき、Y を R-étale であると言うことにします。もし R が AF 同値関係であれば、étale な閉部分集合 Y に制限した同値関係 $R \cap (Y \times Y)$ も AF 同値関係になることが知られています。

これでようやく、この節の目標である吸収定理を述べることができます。

定理 12 ([GMPS2]). R を X 上の極小な AF 同値関係とし、Y を X の閉部分集合とし、K を Y 上のコンパクトなétale 同値関係とする。次の条件が成り立っていると仮定する。

(1) 任意の R-不変確率測度 μ に対して $\mu(Y) = 0$
(2) Y は R-étale
(3) K は $R \cap (Y \times Y)$ に対して横断的

すると、X から X への同相写像 h であって、次を満たすものが存在する。

(1) $h \times h(R \vee K) = R$
(2) $h(Y)$ は R-étale であって、任意の R-不変確率測度 μ に対して $\mu(h(Y)) = 0$
(3) $h|Y \times h|Y$ は $(R \cap (Y \times Y)) \vee K$ から $R \cap (h(Y) \times h(Y))$ への同相写像

特に $R \vee K$ は affable である。

上の定理の $h \times h(R \vee K) = R$ という式は、h を介して R が K を吸収している事を表しています。K は Y 上のコンパクトな同値関係であって、Y はどんな R-不変確率測度で測ってもゼロになるような集合でした。つまり K は R に比べてかなり「小さい」と考えられます。極小な AF 同値関係 R に「小さい」同値関係 K を付け加えても、何らかの同相写像 $h : X \times X$ によって、付け加えた部分は吸収してしまえると言っているわけです。

この定理を使って、カントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系 (X,φ) から生じる同値関係 R_φ が affable であることを言うためには、R_φ の内側に AF 同値関係 R を見つけ、さらに R_φ を $R \vee K$ のような形に書き表し、上に述べた定理の仮定が全て成り立っていることを示す必要があります。次節以降で、どうやってそのような R や K を見つければよいか、説明したいと思います。

4 ボロノイ分割

(X,φ) をカントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系とし、R_φ を (X,φ) に付随する同値関係とします。私たちの目標は、前節で説明した吸収定理を適用できるような、十分に「大きな」AF 同値関係 $R \subset R_\varphi$ を見つけることです。R は AF 同値関係ですから、コンパクトでétale な同値関係 $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots$ の増大和として書けるはずです。1 つの点 x の R_φ-軌道 $[x]_{R_\varphi}$ に着目しましょう。φ は $\mathbb{Z}^d$ の自由な作用なので、$[x]_{R_\varphi}$ と $\mathbb{Z}^d$ の間には自然な対応があります。もし R_n が R_φ の部分同値関係であってコンパクトであれば、$[x]_{R_\varphi}$ は複数の R_n-軌道に分割されていて、さらに 1 つ 1 つの R_n-軌道は有限集合であることになります（補題 8 参照)。$[x]_{R_\varphi}$ と $\mathbb{Z}^d$ を同一視すれば、$\mathbb{Z}^d$ が有限部分集合の直和に分割されているわけです。

逆に言えば、R_φ のコンパクトな部分同値関係を見つけるには、$[x]_{R_\varphi} \cong \mathbb{Z}^d$ を有限部分集合の直和に分割すればよいという事です。さらに、「大きな」部分同値関係を得たいのなら、各々の有限部分集合がとても大きくなるようにすればいいという事になります。実際にこの作業を行うには、全ての R_φ-軌道を同時に扱う必要がありますが、記号が煩雑になるので、ここでは 1 つの軌道だけに的を絞って説明したいと思います（φ の極小性から、1 つの軌道が既に全ての軌道の情報を握っていると思う事が出来るので、このように考えることは議論の本質を歪めてはいません)。

さて $\mathbb{Z}^d$ を有限部分集合の直和に分割するにはどうしたらいいでしょうか。最も安易に考えられるのは、格子状に分割することです。$n_1, n_2, \dots, n_d$ を d 個の自然数とすれば、

$$\{(m_1 n_1 + k_1, m_2 n_2 + k_2, \dots, m_d n_d + k_d) \mid k_i = 0, 1, \dots, n_i - 1\}$$

は直方体のような形をした $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合で、$(m_1, m_2, \dots, m_d)$ が $\mathbb{Z}^d$ 全体をわたる時、$\mathbb{Z}^d$ の直和分割を与えています。1 つ 1 つの有限部分集合を出来るだけ大きく取りたいのなら、$n_1, n_2, \dots, n_d$ をとても大きな自然数とすればいいでしょう。しかしこの安易な方法ではうまく行きません。何故ならこの方法ではカントール集合 X の位相を壊してしまうからです。

カントール集合 X の位相とうまく整合するような分割は、次のようにして得ることが

出来ます。開かつ閉な部分集合 $U \subset X$ と $x \in X$ を固定し、

$$P = \{n \in \mathbb{Z}^d \mid \varphi^n(x) \in U\}$$

とおきます。P は x の U に対する hitting time と呼ばれます。φ の作用で x を動かしたときに U に入るのはいつかを見ているわけです。U という部分集合が小さくなればなるほど（小ささを具体的に測りたければ X に距離を定めておいて U の直径を見ればよいでしょう)、なかなか $\varphi^n(x)$ は U に入りません。つまり P はまばらな集合になっていきます。

φ が自由かつ極小であることから、$\mathbb{R}^d$ の部分集合として P は次の 2 つの性質を持つことが分かります。

- ある $M_1 > 0$ が存在して、$p \neq q \in P$ ならば $d(p,q) \geq M_1$ となる。
- ある $M_2 > 0$ が存在して、$\bigcup_{p \in P} B(p, M_2) = \mathbb{R}^d$ となる。

ただし、中心が p で半径が $r > 0$ の開球体を $B(p,r)$ と書いています。1 つ目の性質は M_1-separated と呼ばれ、2 つ目の性質は M_2-syndetic と呼ばれます。この 2 つの性質を満たすような P は Delone 集合と呼ばれることもあります。もし $U \subset X$ がとても小さい部分集合であれば、M_1 や M_2 はとても大きな数になることが分かります。さらに P は、

- 任意の $R > 0$ に対して、
$$\{(P-p) \cap B(0,R) \mid p \in P\}$$
は有限集合となる。
- 任意の $p_0 \in P$ と $R_0 > 0$ に対して、ある $R > 0$ が存在して、半径 R の任意の開球体は、
$$(P - p_0) \cap B(0, R_0) = (P - q) \cap B(0, R_0)$$
となるような点 $q \in P$ を含む。

という性質を満たすことも分かります。ただし $P - p_0$ とは $\{p - p_0 \mid p \in P\}$ という集合を指すものとします。1 つ目の性質は finite local complexity と呼ばれています。局所的な P のパターンは有限個しかないという事です。これは X がコンパクトであることから導かれます。2 番目の性質は repetitive と呼ばれています。どのようなパターン $P \cap B(p_0, R_0)$ も、P において、ある一定の間隔以上の頻繁さで必ず現れる、という意味です。カントール極小 $\mathbb{Z}^d$ 系の hitting time として生じる P は、上に述べた合計 4 つの性質を持つわけですが、実は逆が成り立つことも知られています。つまりこの 4 つの性質を満たすような P が与えられれば、それを hitting time として実現するようなカントール極小系が存在します。

さて、このような P に対して、ボロノイ分割というものを取ります。各 $p \in P$ に対して

$$T(p) = \{q \in \mathbb{R}^d \mid d(q,p) \leq d(q,P)\}$$

とし、ボロノイ分割 $\mathcal{T}$ を

$$\mathcal{T} = \{T(p) \mid p \in P\}$$

で定めます。$T(p)$ は $\mathbb{R}^d$ の閉凸多面体であり、$\mathcal{T}$ は $\mathbb{R}^d$ のタイル張りになっています（つまり、$T(p)$ たちの和は $\mathbb{R}^d$ 全体になり、相異なる $T(p)$ と $T(q)$ は内点を共有しません)。P は M_1-separated だったので $T(p)$ は $B(p, M_1/2)$ を含み、P は M_2-syndetic だったので $T(p)$ は $B(p, M_2)$ に含まれます。このような $\mathbb{R}^d$ のタイル張りがあると、そこから自然に $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合による直和分割が得られます。すなわち

$$\mathbb{Z}^d = \bigcup_{p \in P} T(p) \cap \mathbb{Z}^d$$

とすればいいわけです。ただし $T(p)$ は他の $T(q)$ と境界を共有しているかも知れないため、$\mathbb{Z}^d$ が $T(p)$ たちの境界と交わりを持つ場合には、この定義では正確には直和分割になりません。しかしながら、$\mathbb{Z}^d$ のある点が複数の $T(p)$ に含まれてしまっている状況がもし発生したら、何らかの統一的なルールによって、その点がどの $T(p)$ に属しているとみなすのか決定する、という事が出来るので、これはあまり大きな問題ではありません。というわけで、そういう細かいことは無視して、$T(p) \cap \mathbb{Z}^d$ は $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合による直和分解を与える、としましょう。

このようにして得られた直和分解は、どうしてカントール集合の位相にちゃんと整合していると言えるのでしょうか。それを説明するためには locally derived という概念が必要です。f は P で定義された何らかの関数としましょう。f が locally derived であるとは、ある $R > 0$ が存在して、$p, q \in P$ が

$$(P - p) \cap B(0, R) = (P - q) \cap B(0, R)$$

を満たすならば $f(p) = f(q)$、となることを言います。$f(p)$ が p の周囲の局所的なパターンにしかよらないという事です。P は finite local complexity を持つので、特に $f(P)$ は有限集合にしかならない事が分かります。$p, q \in P$ であって $\varphi^p(x)$ と $\varphi^q(x)$ は X の中でとても近いと仮定しましょう。すると $P - p$ と $P - q$ は原点の周囲のかなり大きな範囲で一致します。したがって、f が locally derived である事から、$f(p) = f(q)$ となります。これは、$\varphi^p(x) \mapsto f(p)$ という対応が、U からの連続写像に well-defined に拡張できる事を示しています。つまり、locally derived という性質は、U あるいは X からの連続写像に拡張可能である事を保証してくれるのです。ボロノイ図を用いた構成に戻りましょう。p を $T(p) - p$ に移すという対応を、P から $\mathbb{R}^d$ のべき集合への写像とみなすと、こ

の写像は locally derived である事がわかります。何故なら、p が張るボロノイ領域 $T(p)$ は、p の周囲の局所的な P のパターンにしかよらないからです。このような理由から、ボロノイ分割 T は X の位相を適切に反映していると結論する事が出来ます。

ここまでで、どのようにして R_φ の中にコンパクトな部分同値関係を見つければよいかを、説明しました。AF 同値関係 $R \subset R_\varphi$ を構成するには、そのようなコンパクト部分同値関係の増大列を作ればいいわけです。そのために、まず、X の開かつ閉な部分集合の列で、どんどん小さくなっていくものを取って、それを $U_1, U_2, U_3, \ldots$ としましょう。点 $x \in X$ を固定し、x の U_n に対する hitting time を P_n としましょう。$P_1, P_2, P_3, \ldots$ は、どんどんまばらになっていく $\mathbb{R}^d$ の部分集合です。各 P_n に対応するボロノイ分割を $\mathcal{T}_n$ とします。$\mathcal{T}_n$ は $\mathbb{Z}^d$ の有限部分集合による直和分割を定めますから、これによって x の R_φ-軌道は無限個の有限集合の直和に分割されました。この作業を全ての軌道に関して一斉に行う事により、R_φ のコンパクトな部分同値関係 R_n が構成されたことになります。P_n はどんどんまばらになっていくので、n が増えるにつれて、$\mathcal{T}_n$ は大きな大きなタイルによるタイル張りになっていきます。したがって有限集合 $[x]_{R_n}$ の濃度はどんどん大きくなって行きます。

しかしこのままだと、必ずしも R_n は増大列を成していません。各 n 毎にばらばらに $\mathbb{R}^d$ のタイル張りを定めたのですから、そのような事は期待できるはずがありません。この部分を乗り越えるには、$\mathcal{T}_{n+1}$ を少し修正して、任意の $t \in \mathcal{T}_{n+1}$ が $\mathcal{T}_n$ のいくつかの元の和で書けている、というようにしておかないといけません。この議論はあまり本質的ではないのでここでは省略しますが、ちゃんと R_n たちが増大列になるように上手に調整することが可能です。というわけで、

$$R = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} R_n$$

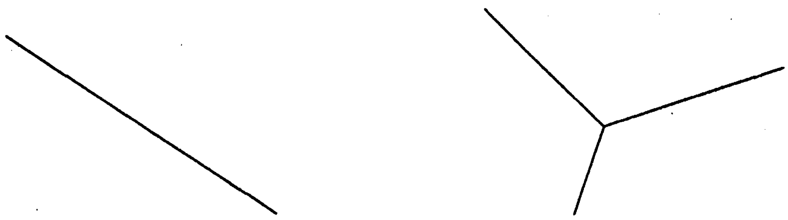
とおくことにより、AF 部分同値関係 $R \subset R_\varphi$ が得られました。

このようにしてようやく R が作れたわけですが、実は、今まで述べたことはまだ [F] で証明された範囲を出ていません。本当にやらなければいけない事は、R_φ と R との食い違いをコントロールして、上手に吸収定理を適用することです。ある点 $x \in X$ に対して、その R_φ-軌道と R-軌道はどのように違っているでしょうか。x の R_φ-軌道 $[x]_{R_\varphi}$ は $\mathbb{Z}^d$ と自然に対応がつきます。R は R_φ の部分同値関係ですから、1 つの R_φ-軌道 $[x]_{R_\varphi}$ はいくつかの R-軌道に分かれている可能性があります。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して、x の R_n-軌道 $[x]_{R_n}$ は、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の中のある閉凸多面体の内部に対応していました。ただし、前述したように、R_n が増大列を成すように若干の修正をしなければいけないので、1 つの軌道が正確に閉凸多面体の内部に対応するわけではありません。ここではとても大

雑把な説明を試みています。$R_n \subset R_{n+1}$ ですから $[x]_{R_n}$ は増大列を成します。最も典型的なケースとしては、各段階での閉凸多面体がどの方向にも順調に育っていき、$n \to \infty$ で $\mathbb{R}^d$ を覆ってしまうという場合が考えられるでしょう。これをI型の軌道と呼びましょう。このときには $[x]_{R_\varphi}$ と $[x]_R$ が一致することになります。

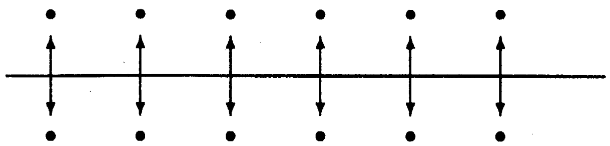
それ以外のケースはどうでしょうか。まず注意しなければいけないのは、「それ以外のケース」が起こる点の全体は測度ゼロであるということです。何故なら、十分に太った閉凸多面体は（今の場合ボロノイ領域 $T(p)$ は $B(p, M_1/2)$ を含みましたから、太っていると言えます)、自動的に「Følner 集合」となるからです（閉凸多面体の境界付近にある $\mathbb{Z}^d$ の点の個数は内部にある点の個数と比べてとても少ない)。この観察が [F] の主定理の核心部分であり、どんな不変測度で測っても測度がゼロになるようなある例外集合を除いては R_φ と R は一致するという結論を得ることが出来ます。

ここから先は、$d=2$ の場合に限って、例外的な場合にどのような事が起こっているかを考えたいと思います。まず考えられるのは、$\mathbb{R}^2$ の原点の近くに常に 2 つの閉凸多角形が存在していて、それらは 1 つの辺を共有して接しながら、その辺と反対側の方向にはどんどん育って行くという場合です。これをII型の軌道と呼びましょう。この場合は R_φ-軌道 $[x]_{R_\varphi}$ が 2 つの R-軌道に分かれることになります。次に考えられるのは、$\mathbb{R}^2$ の原点の近くにいつも 3 つの閉凸多角形が存在し、原点から外に広がるようにそれら 3 つの多角形が育って行くという場合です。これをIII型の軌道と呼びましょう。この場合は R_φ-軌道 $[x]_{R_\varphi}$ が 3 つの R-軌道に分かれることになります。



II 型の軌道　　　　　　　　III 型の軌道

II 型や III 型の軌道に現れる「境界線」の近くにある点を集めて、それを Y としましょう。Y は X の閉部分集合であることが簡単に分かります。境界線をはさんで反対側にあるような点同士をペアにして（正確に言えば、ペアにできるように最初から点を取っておきます)、Y 上に位数 2 の自己同相写像 β を定義します。



Y 上の同値関係 K を

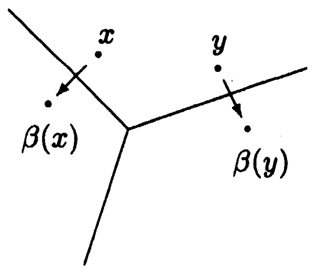
$$K = \{(y, \beta(y)) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$$

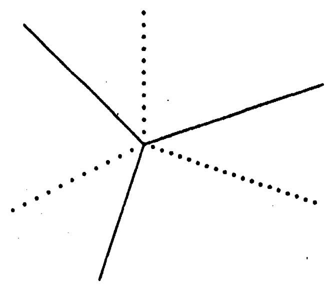
で定義します。すると $R \vee K$ は R_φ に一致することが分かります。何故なら、1 つの R_φ-軌道を 2 個または 3 個の R-軌道に分断していた境界線が、K という同値関係を取り込むことによって消滅するからです。したがって、Y とその上の同値関係 K に吸収定理（定理 12）を適用することが出来れば、$R_\varphi = R \vee K$ は目出度く affable となり、証明は完了します。

定理 12 の仮定が成り立っているかどうか調べましょう。まず、前述したように、閉集合 Y が任意の R-不変測度 μ に対して $\mu(Y) = 0$ を満たすのは OK です。K は位数 2 の自己同相写像 β によって定義されていますから、明らかに Y 上のコンパクトな同値関係です。ところが、定理 12 の仮定 (2) と仮定 (3) は、この状況では成り立っていません。この部分を正確に説明するのは難しいのですが、仮定 (2) と仮定 (3) が成り立つためには、$x, y \in Y$ に対して

$$(x, y) \in R \iff (\beta(x), \beta(y)) \in R$$

が成立していなければならないのです。II 型の軌道を考える限りはこの条件は何の問題も無く成り立っているのですが、III 型の軌道では次の左図が示すように明らかに破綻してしまっています。





この点を克服するためには、III 型の軌道をさらに細かく分割して、上の右図のようにしなければいけません。つまり平面全体を 6 つの半直線によって 6 つの領域に分けます。ただしこの作業を行う際に、I 型や II 型の軌道は分割してしまわないように気をつけなけ

ればいけません。軌道を分割するという事は、別の言葉で言えば、R の部分同値関係 R' を構成するということです。I 型および II 型の軌道では R' と R は一致していて、III 型の軌道では 1 つの R-軌道が上の図の点線によって 2 つの R'-軌道に分かれているという事になります。結果として、1 つの R_φ-軌道は、1 個または 2 個または 6 個の R'-軌道に分かれたことになります。すると、定理 12 の仮定 (2) と仮定 (3) が成立し、R', Y, K に対して定理 12 を適用できるようになります。したがって $R' \vee K$ が affable であることが示されました。しかし $R' \vee K$ は R_φ に一致してはいません。というのも、吸収定理を適用するために R を R' に取り替えてしまったからです。上に述べたことにより、$R' \vee K$ と R_φ は I 型・II 型の軌道では完全に一致していますが、III 型の部分では、1 つの R_φ-軌道が（さっきの図に現れた点線によって）3 つの $(R' \vee K)$-軌道に分かれてしまっています。いま $R' \vee K$ は新しい位相によって AF 同値関係と見なせますから、もう一度吸収定理を $R' \vee K$ に適用することにより、R_φ と $R' \vee K$ の差を「吸収」してしまう事を考えます。これを実行するためには、R_φ と $R' \vee K$ の差を現すようなコンパクトな同値関係を定義し、吸収定理の仮定が成り立っているかどうかをチェックしなければいけません。その際に定理 12 の結論 (2) と結論 (3) が重要な意味を持ってきます。結論 (2)(3) は、$R' \vee K$ に入れられた新しい位相は少なくとも Y 上では良い振る舞いをしている、ということを述べています。つまりこれらの条件は吸収定理を繰り返し使うために必要であったのです。この部分の議論の詳細をこれ以上深く追求することはやめますが、結果的にはちゃんと全てうまく行くことが分かります。

以上で、吸収定理を 2 回適用することにより、$d = 2$ の場合に R_φ が affable であることが示せました。しかし今の説明では 1 つ肝心な部分を誤魔化してしまっています。それは、R_φ と R の食い違いの様子が、I 型・II 型・III 型のように綺麗に分類されるという点です。ナイーブに考える限りそのように期待することは自然に思えます。無限に大きな多角形が平面上にあったとすると、1 枚の多角形で平面全体が覆われてしまっている場合と、1 つの辺を共有する 2 つの多角形で平面全体が覆われる場合と、1 つの頂点に集まる 3 つの多角形で平面全体が覆われる場合の、合計 3 つの可能性だけが生じて欲しいと考えられます。しかしこの部分をちゃんと定式化しようと思うと何らかの議論が必要になります。次の節ではボロノイ分割を上手に変形してこの部分をクリアする事を考えたいと思います。

5 ドロネー分割

(X, φ) をカントール極小 $\mathbb{Z}^2$ 系とします。前節で説明したように、$x \in X$ と開かつ閉な部分集合 $U \subset X$ に対して、x の U に対する hitting time P は、$\mathbb{R}^2$ の中で separated か

つ syndetic な点集合になります。この P の形状をある程度コントロールするために、まず次の補題が必要になります。

補題 13. (X,φ) をカントール極小 $\mathbb{Z}^2$ 系とする。任意の $M \geq 1$ に対して、開かつ閉な部分集合 $U \subset X$ が存在し、任意の $x \in X$ に対して、

$$\{n \in \mathbb{Z}^2 \mid \varphi^n(x) \in U\}$$

は M-separated かつ $2M$-syndetic になる。

証明はごく簡単です。一応 [GMPS1] にも証明を書きましたが、恐らくよく知られた事実だろうと思われます。また、$2M$-syndetic の $2M$ にそれほど深い意味は無く、実際この状況では $(M+1)$-separated を達成できる事が分かります。重要なのは、separated のほうの定数と syndetic のほうの定数の比が、M によらない定数で抑えられている点にあります。

さて、一般に P を $\mathbb{R}^2$ の部分集合であって、M-separated かつ $2M$-syndetic であるものとしましょう。P によって定まる $\mathbb{R}^2$ のボロノイ分割を

$$\mathcal{T} = \{T(p) \mid p \in P\}$$

としましょう。私達が期待すべきことは、M がとても大きな数のとき、ボロノイ分割 $\mathcal{T}$ が局所的には、1 つのボロノイ領域だけで覆われているか、辺を共有する 2 つのボロノイ領域だけで覆われているか、1 点に集まる 3 つのボロノイ領域だけで覆われているかの、計 3 通りの状況しか持たない、という事です。しかし一般には明らかにそんな事は期待できません。例えば 4 つ以上のボロノイ領域が 1 点に集まってしまう事も起こりえます。すなわち、x から最も近い P の点が 4 個以上存在してしまう、というような $\mathbb{R}^2$ の点 x が存在する可能性があります。このような場合にはボロノイ分割が局所的に「退化」していると言うことが出来るでしょう。また、完全に「退化」してはいないまでも、P の 4 点がほぼ同じ円周上に乗っている場合などは、ほぼ「退化」しているというような事が起こりえます。例として、$L>0$ をとても大きな数とし、平面上の 4 点 $(L,0),(-L,0),(0,L),(0,-L)$ を考えましょう。この 4 点に対応するボロノイ分割を取ると、4 つのボロノイ領域が原点に集まる図が得られます。次に、これらの 4 点の位置をランダムにほんの少しだけ動かし、それに対応するボロノイ分割を取りましょう。すると今度は、もはや原点付近で 4 つの領域が交わる事は無いでしょうが、原点付近にとても長さの短い辺が出来ることがわかります。つまり局所的に 4 つの領域が同時に見えてしまう事になります。これでは前節で述べた議論がうまく行きません。どのボロノイ領域のどの辺の長さも M に比べてそれほど短くはない、というようにするためには、どうしたらいいでしょうか。

次のような方法でボロノイ分割を修正します。まずはボロノイ分割の dual に相当するドロネー分割を取ります。ドロネー分割とは次のようなものです。ドロネー分割に現れる多角形の頂点は P の点です。そして、P の 2 点 p, q に対して、$T(p)$ と $T(q)$ が辺を共有しているときに p と q を線で結びます。するとこの作業によって自然に $\mathbb{R}^2$ が多角形によって分割されます。これがドロネー分割です。ドロネー分割に現れる多角形の 1 つ 1 つはボロノイ領域の頂点に対応している事に注意してください。ドロネー分割に現れる多角形のほとんどは三角形です。何故なら generic には 3 つのボロノイ領域が 1 点で交わっているはずだからです。そこで、部分的に四角形以上の多角形になってしまっている場合には、それを適当に三角形に分割しておく事により、平面全体の三角形分割を得ます。これらの三角形の頂点は P の点です。また、1 つの三角形の 3 頂点から等距離にある点（それは外心と呼ばれるのでした）は、あるボロノイ領域の頂点です。

ここで、P が M-separated かつ $2M$-syndetic であった事から、ドロネー分割の三角形に関していいことが言えます。それは、三角形のどの辺も長さが M 以上であり、しかも三角形の外接円の半径が $2M$ 以下である、という事です。これは（中学校で習う平面幾何の範囲の考察です）三角形がそれほど平べったくないということを意味しています。具体的には、三角形の内角を下から定数で抑える事が出来ます。また内接円の半径も M かける定数で下から抑えられます。

上にも述べたように、たとえ M がとても大きな数であったとしても、ボロノイ領域の 1 つの辺の長さはいくらでも小さい値を取り得ました。またボロノイ領域の頂点はドロネー三角形の外心と一致していました。そこで、外心を内心に取替え、1 つの点 $p \in P$ に集まるドロネー三角形の内心を順に線でつないでいった領域を考えます。1 つ 1 つのボロノイ領域を、ドロネー三角形の内心を頂点に持つような多角形で置き換えるのです。こうして出来た多角形はその内部に P の点を 1 つだけ含むので、P の点を index にして、

$$T' = \{T'(p) \mid p \in P\}$$

という $\mathbb{R}^2$ の分割が得られた事になります。$T'(p)$ はもはや凸とは限らない事に注意しておきます。

このようにして得られたボロノイ分割の修正版 T' は、期待通りの性質を持ってくれます。何故なら、上に述べたようにドロネー三角形の内接円の半径は M かける定数で下から抑えられ、従って $T'(p)$ の辺の長さも M かける定数で下から抑えられるからです。また P から T' を構成したやり方は全て「局所的」であったので、この構成法をカントール極小 $\mathbb{Z}^2$ 系の場合に適用する際、前節で述べた locally derived という性質をちゃんと満たしてくれる事が分かります。すなわち修正されたボロノイ分割 T' も、カントール集合の位相 X とうまく整合します。というわけで、前節の議論を T ではなくて T' に適用する

事により、これでようやく定理 4 の証明が完成しました。

参考文献

[F] A. Forrest, *A Bratteli diagram for commuting homeomorphisms of the Cantor set*, Internat. J. Math. 11 (2000), 177–200.

[GMPS1] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Orbit equivalence for Cantor minimal $\mathbb{Z}^2$-systems*, preprint. math.DS/0609668.

[GMPS2] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau, *The absorption theorem for affable equivalence relations*, in preparation.

[GPS1] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products*, J. Reine Angew. Math. 469 (1995), 51–111.

[GPS2] T. Giordano, I. F. Putnam and C. F. Skau, *Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 24 (2004), 441–475.

[R] J. Renault, *A Groupoid Approach to C^*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics 793, Springer, Berlin, 1980.