数理解析研究所講究録
1534巻 2007年 93-95

Order embedding of dimension groups and its dynamical representation

熊本大学・自然科学研究科 杉崎 文亮 (SUGISAKI, Fumiaki)
Graduate School, Science and Technology,
Kumamoto University

本原稿では次元群の埋め込みと力学系表現に関して得られた結果を報告する．詳細は [S] を見られたい．

Y を Cantor 集合, ψ を Y 上で作用する自己同相写像で極小 (minimal) と呼ばれる次の性質「任意の $y \in Y$ に対して集合 $\{\psi^n(y) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が Y で稠密」を満たすものとする．これら二組 (Y, ψ) を Cantor 極小力学系 (Cantor minimal dynamical system) と呼ぶことにする．また (Y, ψ) に対して $C(Y, \mathbb{Z})$ を Y 上の整数値連続関数全体, $B_\psi := \{f - f \circ \psi \mid f \in C(Y, \mathbb{Z})\}$ とする．$C(Y, \mathbb{Z})$ 上の和を通常の連続関数同士の和と定義すれば $C(Y, \mathbb{Z})$ は可換群になり，また B_ψ は $C(Y, \mathbb{Z})$ の部分群になる．そこで順序群（とその正錐）を次のように定義する．

$$K^0(Y, \psi) := C(Y, \mathbb{Z})/B_\psi, \quad K^0(Y, \psi)^+ := \{[f] \in K^0(Y, \psi) \mid f \geq 0, f \in C(Y, \mathbb{Z})\}$$

定数関数 $1 \in C(X, \mathbb{Z})$ に対する剰余類 [1] を $K^0(Y, \psi)$ の順序単位元と呼ぶことにする．Herman, Putnam, Skau 等は $K^0(Y, \psi)$ が acyclic ($G \not\cong \mathbb{Z}$) である単純次元群となることと，すべての acyclic な単純次元群が Cantor 極小力学系から作られることを示した ([HPS])．また Giordano, Putnam, Skau 等は次元群の順序単位元を保つ順序同型類が Cantor 極小力学系の強軌道同型類の完全不変量であることを示した ([GPS1])．今後次元群と言ったら（次元群，正錐，順序単位元）の3組を指すものとする．

次元群 (G, G^+, u) に対して G 上の state ω とは順序準同型写像 $\omega : G \to \mathbb{R}$ で $\omega(u) = 1$ を満たすものをいう．$\mathcal{S}(G)$ を G 上の state 全体を表すことにしよう．$\mathcal{S}(G)$ はコンパクト凸距離空間になることが知られている．また $G = K^0(Y, \psi)$ としたとき, $\mathcal{S}(K^0(Y, \psi))$ と Y 上の ψ-不変確率測度全体 $\mathcal{M}_\psi(Y)$ （これもコンパクト凸距離空間になる）の間にアファイン同相写像が存在することが知られている．実際その写像 $\Phi : \mathcal{M}_\psi(Y) \to \mathcal{S}(K^0(Y, \psi))$ は

$$\Phi(\mu)[f] := \int f \, d\mu, \qquad f \in C(Y, \mathbb{Z})$$

で与えられる ([HPS]:Theorem 5.4).

2つの位相力学系 (X, ϕ), (Y, ψ) の間に factor map $\pi : X \to Y$ (すなわち π は連続な全射であり $\pi \circ \phi = \psi \circ \pi$ を満たす) があり，2つの写像 ϕ, ψ が同相写像であったとする．このとき写像 $\tilde{\pi} : \mathcal{M}_\phi(X) \to \mathcal{M}_\psi(Y)$ を

$$\tilde{\pi}(\mu) := \mu \circ \pi^{-1}, \quad \mu \in \mathcal{M}_\phi(X).$$

と定義する．すると $\tilde{\pi}$ は連続なアファイン全射準同型写像になり ([DGS]:Propositions 3.2, 3.11), $\tilde{\pi}$ は ϕ-不変エルゴード的測度全体 (別な言い方をすると $\mathcal{M}_\phi(X)$ の端点全体) である $\mathrm{ex}\,\mathcal{M}_\phi(X)$ を ψ-不変エルゴード的測度全体 $\mathrm{ex}\,\mathcal{M}_\psi(Y)$ に移す．実際後半に関しては次のようにして確かめられる．まず不変測度全体の凸性と $\tilde{\pi}$ が連続なアファ

イン全射準同型写像であることから，$\tilde{\pi}(\mathrm{ex}\,\mathcal{M}_\phi(X)) \subset \mathrm{ex}\,\mathcal{M}_\psi(Y)$ を示せば十分である．$E \in \mathcal{B}(Y)$ を ψ-不変 Borel 集合，$\mu \in \mathrm{ex}\,\mathcal{M}_\phi(X)$ とする．すると

$$\pi \circ \phi \circ \pi^{-1}(E) = \psi \circ \pi \circ \pi^{-1}(E) = \psi(E) = E,$$
$$\pi \circ \phi^{-1} \circ \pi^{-1}(E) = \psi^{-1} \circ \pi \circ \pi^{-1}(E) = \psi^{-1}(E) = E,$$

が成り立つことより $\phi \circ \pi^{-1}(E) \subset \pi^{-1}(E)$, $\phi^{-1} \circ \pi^{-1}(E) \subset \pi^{-1}(E)$ が得られ，結局 $\phi \circ \pi^{-1}(E) = \pi^{-1}(E)$ が成り立つ．従って $\pi^{-1}(E)$ は ϕ-不変集合となり，μ がエルゴード的であるから $\mu(\pi^{-1}(E)) = 0$ または 1 となる．これは $\tilde{\pi}(\mu)$ もエルゴード的であることを示している．

さて 2 つの Cantor 極小力学系 (X,ϕ), (Y,ψ) の間に factor map $\pi : X \to Y$ があったとしよう．このとき写像 $\pi^* : K^0(Y,\psi) \to K^0(X,\phi)$ を

$$\pi^*[f] := [f \circ \pi] \quad f \in C(Y,\mathbb{Z})$$

と定義する．このとき π^* は順序埋め込み (すなわち順序単位元を保つ単射順序準同型写像で $[f] \in K^0(Y,\psi)^+$ と $\pi^*[f] \in K^0(X,\phi)^+$ が同値になる) になることが分かる ([GW]:Proposition 3.1).

ここで almost one-to-one factor の定義を与えよう．2 つの位相力学系 (X,ϕ), (Y,ψ) に対して factor map π が *almost one-to-one* であるとは，集合 $\{x \in X \mid |\pi^{-1}\pi(x)| = 1\}$ が残留集合 (第一類集合の補集合) であることをいう．このとき (Y,ψ) は (X,ϕ) *almost one-to-one factor*, あるいは (X,ϕ) は (Y,ψ) の *almost one-to-one extension* という．(X,ϕ) が極小の場合には $|\pi^{-1}\pi(x)| = 1$ となる点 $x \in X$ が存在しさえすれば，π が alomost one-to-one factor map になることが分かる．

(Y,ψ) を Cantor 極小力学系としよう．上で述べたこと，及び比較的簡単な考察から次の定理を得る．

定理 1. もし (X,ϕ) が *Cantor* 極小力学系であり，*almost one-to-one factor map* $\pi : (X,\phi) \to (Y,\psi)$ があれば，

(1) $\pi^* : K^0(Y,\psi) \to K^0(X,\phi)$ は順序埋め込みになる．
(2) π^* の余核 $K^0(X,\phi)/\pi^*(K^0(Y,\psi))$ はねじれのない群である．
(3) $\tilde{\pi} : \mathcal{M}_\phi(X) \to \mathcal{M}_\psi(Y)$ は連続なアファイン全射準同型写像であり，$\tilde{\pi}(ex\mathcal{M}_\phi(X)) = ex\mathcal{M}_\psi(Y)$ となる．

(3) は次の (3') と同値ある．

(3') $\hat{\pi} : \mathcal{S}(K^0(X,\phi)) \to \mathcal{S}(K^0(Y,\psi))$, $\hat{\pi}(\mu) := \mu \circ \pi^*$ は連続なアファイン全射準同型写像となり，$\hat{\pi}(ex\mathcal{S}(K^0(X,\phi))) = ex\mathcal{S}(K^0(Y,\psi))$ を満たす．

もし π が almost one-to-one factor でない factor map であるときでも主張 (1),(3) がなりたつ．almost one-to-one factor が関係してくるのは主張 (2) である．こうして定理 1 は Cantor 極小力学系の almost one-to-one factor が次元群にどのような作用をもたらすかを示しているわけだが，次にこの定理の逆の立場から見直せるかどうか考えたい．つまり次のような問題が考えられる．(この問題を**次元群埋め込みの力学系表現問題**と呼ぶことにしよう.)

問題 2. Cantor 極小力学系 (Y,ψ) と単純次元群 G が次の条件を満たすものとする．

(i) 順序埋め込み $\iota : K^0(Y,\psi) \to G$ がある．
(ii) ι の余核 $G/\iota(K^0(Y,\psi))$ はねじれのない群．

(iii) $\iota^* : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}(K^0(Y,\psi))$, $\iota^*(\mu) := \mu \circ \iota$ は連続なアファイン全射準同型写像であり，$\iota^*(\mathrm{ex}\,\mathcal{S}(G)) = \mathrm{ex}\,\mathcal{S}(K^0(Y,\psi))$ を満たす．

このとき次の各条件を満たす Cantor 極小力学系 (X,ϕ) が存在するだろうか．

(a) almost one-to-one factor map $\pi : (X,\phi) \to (Y,\psi)$ が存在する．

(b) 順序単位元を保つ順序同型写像 $\alpha : K^0(X,\phi) \to G$ が存在して $\alpha \circ \pi^* = \iota$ を満たす．

ここで条件 (iii) に関してコメントしておく．一般に単純次元群間の順序埋め込み $\iota : H \to G$ が与えられとき，それに付随して定義される写像 $\iota^* : \mathcal{S}(G) \to \mathcal{S}(H)$, $\iota^*(\mu) := \mu \circ \iota$ は連続なアファイン全射準同型写像になることが知られている．そのため条件 (iii) の本質的な条件は後半部分にある．実際 $\iota^*(\mathrm{ex}\,\mathcal{S}(G)) \neq \mathrm{ex}\,\mathcal{S}(H)$ を満たす次元群 G, H の例を作ることができる ([S]).

Giordano, Putnam, Skau 等は問題 2 の条件 (i), (ii) の他に順序稠密条件を加えた元で (a), (b) を満たす Cantor 極小力学系 (X,ϕ) を構成した ([GPS2]). ここで順序稠密条件とは次のように定義する．次元群間の順序埋め込み $\iota : H \to G$ に対して $\iota(H)$ が G 内で順序稠密とは $g < g'$ を満たす任意の $g, g' \in G$ に対して，ある $h \in H$ があって $g < \iota(h) < g'$ を満たす．実は $\iota(H)$ が G 内で順序稠密であることと ι^* が単射であることは同値であることが知られいる ([GPS2]:Proposition 1.1). このことから順序稠密条件は条件 (iii) を満たすため，Giordano 達は強い仮定の下で次元群埋め込みの力学系表現問題に回答を与えたいうことになる．

さてこの予報では問題 2が解決されたことを報告する．つまり次の定理を得た ([S]).

定理 3. 問題 2の条件 (i), (ii),(iii) の元で，(a), (b) を満たす *Cantor* 極小力学系 (X,ϕ) が存在する．

一意エルゴード的 Cantor 極小力学系において，その次元群の state は 1 つしかなく，それ自体が端点でもあるので，定理 3 の系として次の結果も得られる．

系 4. (Y,ψ) を一意エルゴード的 *Cantor* 極小力学系，G は単純次元群でこれらは問題 2 の条件 (i),(ii) のみ満たすとする．このとき (a), (b) を満たす *Cantor* 極小力学系 (X,ϕ) が存在する．

なお Cantor 極小力学系間において almost one-to-one factor でない factor map であるとき，それに付随して作られる次元群順序埋め込みの余核はねじれ元を持つ．この場合における次元群埋め込みの力学系表現問題はまだ解決されていない．

References

[DGS] M. Denker, C. Grillenberg and K. Sigmund, *Ergodic Theory on Compact Spaces*, Lecture Notes in Math. 527 (1976).

[GPS1] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Topological orbit equivalence and C^* crossed products,* J. Reine Angew. Math. **469** (1995), 51–111

[GPS2] T.Giordano, I.F.Putnam and C.F.Skau, *K-theory and asymptotic index for certain almost one-to-one factors,* Math. Scand. **89** (2001), no. 2, 297–319

[GW] E. Glasner, B. Weiss, *Weak orbit equivalence of Cantor minimal systems*, Internat. J. Math. **6** (1995), 569–579.

[HPS] R.H.Herman, I.F.Putnam and C.F.Skau, *Ordered Bratteli diagrams,dimension groups, and topological dynamics,* Internat.J.Math. **3** (1992), 827–864

[S] F.Sugisaki, *Almost one-to-one extensions of Cantor minimal systems and order embeddings of simple dimension groups,* preprint