Starlikeness of integral transforms of a radial slit mapping

寺田貴雄　　広島大学理学研究科
Takao Terada　　Hiroshima University

1. 序

$\mathscr{A}$ を

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

によって正規化された単位円板 $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ 上で正則な函数 f の族とする。$\mathscr{LU}$ を $\mathbb{D}$ 上で局所単葉な $\mathscr{A}$ の元の集合とする。$f, g \in \mathscr{LU}$ とし、α を複素数とする。そのとき Hornich 演算は

$$(f \oplus g)(z) = \int_0^z f'(w)g'(w)dw \quad (\alpha \star f)(z) = \int_0^z f'(w)^{\alpha} dw$$

によって定義される。ただし $(f')^{\alpha} = \exp(\alpha \log f')$ の分枝は $(f')^{\alpha}(0) = 1$ とする。この計算は $\mathscr{A}$ で局所単葉函数の集合 $\mathscr{LU}$ に線形構造を与える。

定義 1. f と g を結ぶ線分を

$$[f, g] = \{(1-t) \star f \oplus t \star g : 0 \leq t \leq 1\}$$

とする。

$[f, g]$ に対し以下のことが知られている。$\mathscr{S}^*, \mathscr{K}, \mathscr{C}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}^* &= \left\{ f \in \mathscr{A}; \mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \right\} \\
\mathscr{K} &= \left\{ f \in \mathscr{A}; \mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \right\} \\
\mathscr{C} &= \left\{ f \in \mathscr{A}; g \in \mathscr{S}^*, \mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \right\}
\end{aligned}$$

定理 1 (Cima-Pfaltzgraff,[3]). 凸函数族 $\mathscr{K}$ は凸である。すなわち $\forall f, g \in \mathscr{K}$ に対して $[f, g] \subset \mathscr{K}$ 。

定理 2 (Y.J.Kim-Merkes,[4]). 近接凸函数族$\mathscr{C}$は凸である。すなわち$\forall f, g \in \mathscr{C}$に対して$[f, g] \subset \mathscr{C}$。

さらに$\mathscr{S}^*$についてはY.C.Kim,Ponnusamy,Sugawa,[1]で以下のことがわかっている。

定理 3 ([1]). 星状函数族$\mathscr{S}^*$は*Hornich*演算に関して凸ではない。

予想 1 ([1]). $\mathscr{S}^*$は*Hornich*演算による線形構造を入れたとき原点に関して星状である。

この予想は次の予想と同値である。

予想 2. N:自然数,$\mu_j > 0, \sum_{j=1}^N \mu_j = 2, \zeta_j \in \partial\mathbb{D}(j = 1, \cdots, N)$に対し$f(z)$が

$$f(z) = \frac{z}{\Pi_{j=1}^N (1 - \zeta_j z)^{\mu_j}}$$

で与えられたとき$\alpha \in [0, 1]$に対して$\alpha * f \in \mathscr{S}^*$である。

これについては次の定理が知られている。

定義 2. $\mathscr{S}\mathscr{S}(\alpha)$を

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{\alpha\pi}{2}, \qquad z \in \mathbb{D}$$

を満たすfからなる$\mathscr{A}$の部分族とする。ただしαは正数である。

定理 4 (Y.C.Kim,Ponnusamy,Sugawa,[1]). Kをケーベ函数とする。すなわち

$$K(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}.$$

そのとき$\alpha \in [0, 1]$に対して$\alpha * K \in \mathscr{S}\mathscr{S}(\min\{1, 3\alpha\})$。

主定理. *(予想 2 の $N = 2, \mu_1 = \mu_2$ の場合)* $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\mathbb{D}$に対し

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \zeta_1 z)(1 - \zeta_2 z)} \qquad (\text{予想 2 の } N = 2, \mu_1 = \mu_2 \text{の場合})$$

とする。そのとき$\alpha \in [0, 1]$に対して$\alpha * f \in \mathscr{S}^*$。

2. 主定理の証明

$$f_\alpha(z) = (\alpha * f)(z) = \int_0^z (f'(\zeta))^\alpha d\zeta$$

とおく。

fを回転することにより次のように仮定して一般性を失わない。

$$f(z)=\frac{z}{(1-\zeta z)(1-\overline{\zeta}z)},\qquad \zeta\in\partial\mathbb{D}.$$

$0\le\alpha<\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ と $\alpha=\frac{1}{2}$ の場合に分けて証明する。

.$0\le\alpha<\frac{1}{2}$
調和関数の最小値原理を用いて証明する。

最小値の原理. $u(z)$ を $\mathbb{D}$ 上の調和関数とする。このとき

$$\forall\xi\in\partial\mathbb{D},\liminf_{\mathbb{D}\ni z\to\xi}u(z)\ge 0\Longrightarrow \mathbb{D}\text{ 上 }u(z)\ge 0$$

が成り立つ。

$$u(z)=\operatorname{Re}Q_\alpha(z)\qquad Q_\alpha(z)=\left(\frac{zf'_\alpha(z)}{f_\alpha(z)}\right)^{-1}$$

とおく。

(i)$\xi\ne\pm1,\zeta,\overline{\zeta}$ のとき
この場合では $u(z)$ は ξ まで連続であるので $u(\xi)\ \ge\ 0$ を示せばよい。ここで $0<\theta<\pi,\theta\ne\beta$ に対して $Q_\alpha(e^{i\theta})=Q_\alpha(e^{-i\theta})$ であることを用いる。

$$f'_\alpha(z)=(f'(z))^\alpha=\frac{(1-z^2)^\alpha}{(1-\zeta z)^{2\alpha}(1-\overline{\zeta}z)^{2\alpha}},\qquad \zeta=e^{i\beta}.$$

z に $e^{i\theta}$ を代入することによって

$$\begin{aligned}f'_\alpha(e^{i\theta})&=\frac{(1-e^{2i\theta})}{(1-e^{i(\beta+\theta)})^{2\alpha}(1-e^{i(-\beta+\theta)})^{2\alpha}}\\&=\frac{(\frac{2}{i})^\alpha e^{i\alpha\theta}(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i})^\alpha}{(\frac{2}{i})^{2\alpha}(e^{i\frac{\beta+\theta}{2}})^{2\alpha}(\frac{e^{i\frac{\beta+\theta}{2}}-e^{-i\frac{\beta+\theta}{2}}}{2i})^{2\alpha}(2i)^{2\alpha}(e^{i\frac{\beta-\theta}{2}})^{2\alpha}(\frac{e^{i\frac{\beta-\theta}{2}}-e^{i\frac{\beta+\theta}{2}}}{2i})^{2\alpha}}\\&=2^{-3\alpha}i^{-\alpha}e^{-i\alpha\theta}\sin^\alpha\theta\sin^{-2\alpha}\frac{\beta+\theta}{2}\sin^{-2\alpha}\frac{\beta-\theta}{2}\end{aligned}$$

となる。上式を積分すると

$$\begin{aligned}f_\alpha(e^{i\theta})&=\int_0^{e^{i\theta}}\frac{(1-w^2)^\alpha}{(1-\zeta w)^{2\alpha}(1-\overline{\zeta}w)^{2\alpha}}dw\\&=\int_0^1\frac{(1-x^2)^\alpha}{(1-\zeta x)^{2\alpha}(1-\overline{\zeta}x)^{2\alpha}}dx+\int_1^{e^{i\theta}}\frac{(1-\zeta^2)^\alpha}{(1-\zeta w)^{2\alpha}(1-\overline{\zeta}w)^{2\alpha}}dw\\&=C+i^{1-\alpha}2^{-3\alpha}\int_0^\theta e^{i(1-\alpha)t}\sin^\alpha t\sin^{-2\alpha}\frac{\beta+t}{2}\sin^{-2\alpha}\frac{\beta-t}{2}dt\end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned} Q_\alpha(e^{i\theta}) = \frac{f_\alpha(e^{i\theta})}{e^{i\theta}f'_\alpha(e^{i\theta})} &= C2^{3\alpha}e^{-i(1-\alpha)\theta-\frac{\pi}{2}\alpha}\sin^{-\alpha}\theta\sin^{2\alpha}\frac{\beta+\theta}{2}\sin^{2\alpha}\frac{\beta-\theta}{2} \\ &+i\sin^{-\alpha}\theta\sin^{2\alpha}\frac{\beta+\theta}{2}\sin^{2\alpha}\frac{\beta-\theta}{2} \\ &\cdot\int_0^\theta e^{-i(1-\alpha)(\theta-t)}\sin^\alpha t\sin^{-2\alpha}\frac{\beta+t}{2}\sin^{-2\alpha}\frac{\beta-t}{2}dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(e^{i\theta}) = \quad & C2^{3\alpha}\cos\{(1-\alpha)\theta-\frac{\pi}{2}\alpha\}\sin^{-\alpha}\theta\sin^{2\alpha}\frac{\beta+\theta}{2}\sin^{2\alpha}\frac{\beta-\theta}{2} \qquad (1) \\ &+\sin^{-\alpha}\theta\sin^{2\alpha}\frac{\beta+\theta}{2}\sin^{2\alpha}\frac{\beta-\theta}{2} \\ &\cdot\int_0^\theta \cos(1-\alpha)(\theta-t)\sin^\alpha t\sin^{-2\alpha}\frac{\beta+t}{2}\sin^{-2\alpha}\frac{\beta-t}{2}dt \end{aligned}$$

となる。$C>0$、$|(1-\alpha)\theta-\frac{\pi}{2}\alpha|<\frac{\pi}{2}$ なので、(1) の第一項は正である。一方、$\theta\in(0,\pi)$ 、$\beta+\theta<2\pi$ 、$\beta-\theta<\pi$ なので、 (1) の第二項は正である。それ故、$u(\xi)>0$。

(ii)$\xi=\zeta,\bar{\zeta}$ のとき

対称性から $\xi=\zeta$ の場合を考えれば十分である。

f_α の導関数は

$$f'_\alpha(z)=(f'(z))^\alpha=\frac{(1-z^2)^\alpha}{(1-\zeta z)^{2\alpha}(1-\bar{\zeta}z)^{2\alpha}}=\frac{(1-z^2)^\alpha}{(z-\zeta)^{2\alpha}(z-\bar{\zeta})^{2\alpha}}$$

であるので、$z=\zeta$ のまわりの漸近展開は $\mathbb{D}$ 上で

$$\begin{aligned} f'_\alpha(z) &= (A_0+A_1(z-\zeta)+A_2(z-\zeta)^2+\cdots)(z-\zeta)^{-2\alpha}, \\ &= A_0(z-\zeta)^{-2\alpha}+A_1(z-\zeta)^{1-2\alpha}+O(1), \qquad (z\to\zeta) \end{aligned}$$

となる。ここで $A_0, A_1, \cdots$ は定数である。

従って、z に関しての積分は $\mathbb{D}$ 上で

$$f_\alpha(z)=f_\alpha(\zeta)+\frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta)^{1-2\alpha}+\frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^{2-2\alpha}+O(1), \qquad (z\to\zeta), f_\alpha(\zeta)\neq 0$$

である。この事から $Q_\alpha(z)$ は

$$Q_\alpha(z)=\frac{f_\alpha(z)}{zf'_\alpha(z)}=\frac{(z-\zeta)^{2\alpha}}{zA_0}(f_\alpha(\zeta)+o(1))$$

で表される。従って

$$\liminf_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta} u_\alpha = 0$$

である。

(iii)$\xi = \pm 1$ のとき

(ii) と同様に $z=1$ のまわりの漸近展開は

$$\begin{aligned} f'_\alpha(z) &= (B_0 + B_1(1-z) + B_2(z-1)^2 + \cdots)(1-z)^\alpha, \\ &= B_0(1-z)^\alpha + B_1(1-z)^{1+\alpha} + O(1), \qquad (z \to 1) \end{aligned}$$

となる。ここで $B_0, B_1, \cdots$ は定数である。従って $f_\alpha(z)$ が

$$f_\alpha(z) = f_\alpha(1) - \frac{B_0}{1+\alpha}(1-z)^{1+\alpha} - \frac{B_1}{2+\alpha}(1-z)^{2+\alpha} + O(1), \qquad (z \to 1), f_\alpha(1) \neq 0$$

であることから $Q_\alpha(z)$ は

$$Q_\alpha(z) = \frac{f_\alpha(1) - \frac{B_0}{1+\alpha}(1-z)^{1+\alpha} - \frac{B_1}{2+\alpha}(1-z)^{2+\alpha} + O(1)}{\{1-(1-z)\}\{B_0(1-z)^\alpha + B_1(1-z)^{1+\alpha} + O(1)\}} = \frac{f_\alpha(1)}{B_0(1-z)^\alpha} + O(1)$$

で表される。$B_0 = 2^\alpha(1-\zeta)^{-2\alpha}(1-\overline{\zeta})^{-2\alpha}$ であるので $B_0 > 0$ である。また $f_\alpha(1)$ は $f_\alpha(x)$ $(0 < x < 1)$ が実数値であることを用いる。そのとき

$$\frac{f_\alpha(1) - f_\alpha(0)}{1-0} = f'_\alpha(c) \qquad 0 < \exists c < 1$$

であるので

$$f_\alpha(1) = f'_\alpha(c) = \frac{(1-c^2)^\alpha}{(c-\zeta)^{2\alpha}(c-\overline{\zeta})^{2\alpha}} > 0$$

となる。故に $\mathbb{D}$ 上

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(1-z)^\alpha} > 0$$

から

$$\liminf_{\mathbb{D}\ni z \to 1} u(z) = \infty$$

となる。$\xi = -1$ においても同様に示すことができる。(i),(ii),(iii) より $\forall \xi \in \partial\mathbb{D}$、$\liminf_{\mathbb{D}\ni z\to\zeta\xi} u(z) \geq 0$。故に $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ に対して $f_\alpha \in \mathscr{S}^*$ となる。

$\cdot\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

$P_\alpha = \frac{zf'_\alpha}{f_\alpha}$ の実部が $\mathbb{D}$ 上で正であることを証明する。P_α は $\overline{\mathbb{D}}\backslash\{1,-1,\zeta,\overline{\zeta}\}$ の開近傍において正則函数に拡張できることに注意する。まず、特異点 $z=\zeta$ のまわりの P_α のふるまいを調べる。f_α の導関数は

$$f'_\alpha(z) = (f'(z))^\alpha = \frac{(1-z^2)^\alpha}{(1-\zeta z)^{2\alpha}(1-\overline{\zeta}z)^{2\alpha}} = \frac{(1-z^2)^\alpha}{(z-\zeta)^{2\alpha}(z-\overline{\zeta})^{2\alpha}}$$

であるので、$z=\zeta$ のまわりの漸近展開は $\mathbb{D}$ 上で

$$\begin{aligned} f'_\alpha(z) &= (A_0 + A_1(z-\zeta) + A_2(z-\zeta)^2 + \cdots)(z-\zeta)^{-2\alpha}, \\ &= A_0(z-\zeta)^{-2\alpha} + A_1(z-\zeta)^{1-2\alpha} + O(1), \qquad (z \to \zeta) \end{aligned}$$

となる。ここで $A_0, A_1, \cdots$ は定数である。

従って、z に関しての積分は $\mathbb{D}$ 上で

$$f_\alpha(z) = f_\alpha(\zeta) + \frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta)^{1-2\alpha} + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^{2-2\alpha} + O(1), \qquad (z \to \zeta), f_\alpha(\zeta) \neq 0$$

となる。P_α は

$$\begin{aligned} P_\alpha(z) &= \frac{zf'_\alpha}{f_\alpha} = \frac{\frac{1}{2}(z+\zeta+z-\zeta)(A_0 + A_1(z-\zeta)+\cdots)(z-\zeta)^{-2\alpha}}{\frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta)^{1-2\alpha} + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^{2-2\alpha} + \cdots} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(z+\zeta)A_0 + O(|z-\zeta|)}{\frac{A_0}{1-2\alpha}(z-\zeta) + \frac{A_1}{2-2\alpha}(z-\zeta)^2 + \cdots} \end{aligned}$$

であり、$2\alpha - 1 > 0$ なので

$$P_\alpha(z) = \frac{2\alpha-1}{2}\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + O(1).$$

$$\operatorname{Re} P_\alpha(z) = c\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|} + Q(z), \qquad c = \alpha - \frac{1}{2} > 0$$

一方、P_α は $z=-1,1$ のまわりで有界である。$Q(z)$ は有界調和函数である。ここで $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ に対して $\operatorname{Re} P_\alpha > 0$ を示すには、$\mathbb{D}$ 上で $Q(z) > 0$ を示さなければならない。そのためには $0 < \theta < \pi, \theta \neq \beta$ に対して $\operatorname{Re} P_\alpha(e^{i\theta}) > 0$ が示せれば十分である。以下　-(i) と同様な方法によって $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ に対して $f_\alpha \in \mathscr{S}^*$ を得る。

.$\alpha = \frac{1}{2}$

星状函数列の極限も星状函数であることから

$$f_\alpha \to f_{\frac{1}{2}} \in \mathscr{S}^* \qquad (\alpha \to \frac{1}{2})$$

となる。　、　、　より $\alpha \in [0,1]$ に対して $f_\alpha \in \mathscr{S}^*$ がわかる。 □

3.f の像領域の形状

ここでは $f(\mathbb{D})$ が slit mapping であることを確認する。

$$f(z) = \frac{z}{(1-\zeta z)(1-\overline{\zeta} z)} \qquad \zeta = e^{i\beta}, 0 < \beta < \pi$$

$f(e^{i\theta})$ は

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= \frac{e^{i\theta}}{(1-e^{i(\beta+\theta)})(1-e^{-i(\beta-\theta)})} \\ &= \frac{1}{4\sin\frac{\beta-\theta}{2}\sin\frac{\beta+\theta}{2}} \\ &= \frac{1}{2(\cos\theta-\cos\beta)} \end{aligned}$$

で表される。従って $f(\mathbb{D})$ は slit mapping であることがわかる。尚、$\beta=\frac{\pi}{2}$、$\beta=\frac{\pi}{3}$ における f の像領域はそれぞれ図 1、図 2 で描かれる。

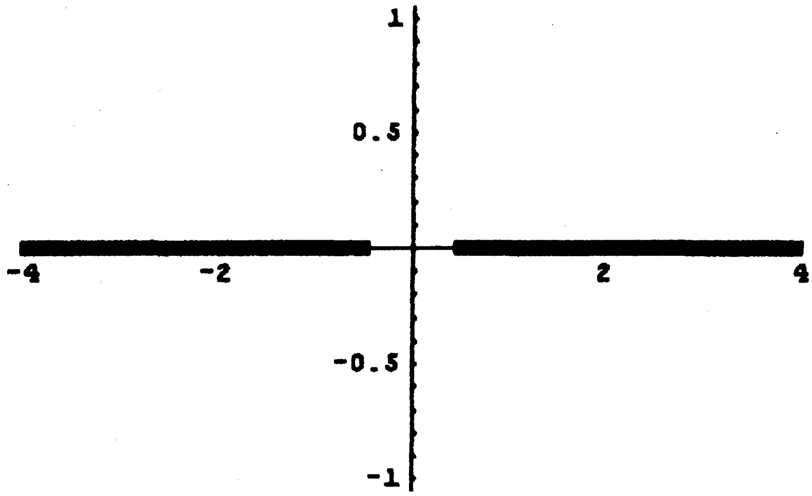

図 1. $f(\mathbb{D})$ の領域 (太線を除いた領域).$\beta=\frac{\pi}{2}$.

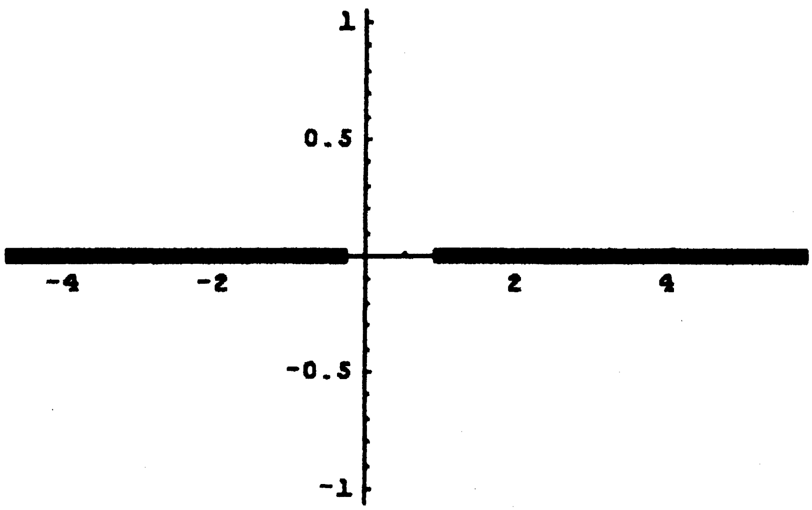

図 2. $f(\mathbb{D})$ の領域 (太線を除いた領域).$\beta=\frac{\pi}{3}$.

参考文献

[1] Y. C. Kim, S. Ponnusamy, T. Sugawa, *Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives*, J. Math. Anal. Appl. **299**(2004), no.2 433-447.

[2] Y. C. Kim, T. Sugawa, *Growth and coefficient estimates for uniformly locally univalent functions on the unit disk*, Rocky Mountain J. Math. **32**(2002), no.1, 179-200.

[3] J. A. Cima, J. A. Pfaltzgraff, *A Banach space of locally univalent functions*, Michigan Math. J. **17**(1970), 321-334.

[4] Y. J. Kim, E. P. Merkes, *On certain convex sets in the space of locally schlicht functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **196**(1974), 217-224.