数理解析研究所講究録
1539 巻 2007 年 79-88

砂山形成過程と斜面の流動状態の変化

京都大学 基礎物理学研究所 占部 千由 (Chiyori Urabe)
Yukawa Institute for Theoretical Physics,
Kyoto University

1 はじめに

粉体においては粒子の運動状態によって固体的状態や流動的状態をとる [1-7]。固体状態では応力が一部の粒子に集中する現象が見られ、粒子の離散性から連続体として記述することが難しく、活発にさまざまなモデルが提案されている [8-17]。流動状態の粉体については、斜面上やパイプ内の粉体流についての研究がそれぞれ盛んに行われている [18-29]。

固体状態と流動状態が共存する系の代表的な例として砂山が挙げられる。砂山については、砂山の形状が実験的に測定されており、なだれの規模の分布が状況によってはべき的になることが報告されている [30-34]。特に砂山形成過程では流動状態と固体状態が共存し続け、砂山斜面の状態は粒子供給量によって変化する。砂山に供給された粒子は斜面に沿って運動し、粒子は斜面の途中で停止したり他の粒子を巻き込んでなだれを引き起こすことによって砂山形状を変化させ、次に供給される粒子はその変化した斜面に沿って運動をするということが繰り返される。このような過程では砂山形状の変化となだれの間に複雑な相互関係が成立つ。本研究では砂山形状を表す量として頂点の位置に着目し、シミュレーションを用いて頂点移動となだれを観測することによって、砂山形成過程を特徴づけたい。

2 シミュレーションの設定

2 次元と 3 次元の離散要素法を用いて粒子運動のシミュレーションをする。2 次元と 3 次元の離散要素法はほぼ同じ方程式を用いたので、ここでは主に 3 元のシミュレーション方法について述べる。粒子は球形で粒径は最大粒径を d を定数とし、$(0.8d, d)$ の間で一様分布させる。粒子には重力が働き、粒子間力として弾性力・粘性力・クーロン摩擦が働く。粒子間力は粒子が接触中のみ力が働くとする。

i 番目の粒子の重心を $\mathbf{x}_i$, 質量 m_i, 半径を r_i とする。粒径 d の粒子の質量を m とし、重力加速度を $\mathbf{g}$ とする。i 番目の粒子の慣性モーメント $I_i = 2m_i r_i^2/5$ とし、角速度を ω_i とすると、運動方程式は次式のように表される。

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \sum_j \Theta(X_{ij})(F_n^{ij}\mathbf{n}_{ij} + \mathbf{F}_t^{ij}) + m_i \mathbf{g} \quad (1)$$

$$I_i \dot{\omega}_i = r_i \sum_j \Theta(X_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{F}_t^{ij} \quad (2)$$

$\mathbf{n}_{ij}$ と X_{ij} は

$$\mathbf{n}_{ij} = (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_j)/|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|, \quad X_{ij} = r_i + r_j - |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$$

とする。Θ は Heaviside 関数。F_n^{ij} は法線方向の接触力の大きさを表し、以下のように定義する。

$$F_n^{ij} = \tilde{F}_n^{ij} \Theta(-\tilde{F}_n^{ij}) \quad (3)$$

$$\tilde{F}_n^{ij} = -k_n X_{ij} - \eta_n \mathbf{n}_{ij} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \quad (4)$$

$\Theta(-\tilde{F}_n^{ij})$ は粒子間に引力は働かないことを表す。k_n, η_n はそれぞれ法線方向のばね係数と粘性係数。

(1)〜(4) は 2 次元と 3 次元で共通である。接線方向の力の計算は次元によって異なる方法を用いた。ここではまず 3 次元の離散要素法で用いた計算方法を述べ、2 次元で用いた方法との違いついては後述する。接線方向の接触力 $\mathbf{F}_t^{ij}$ は、摩擦係数 μ、接線方向のバネ係数と粘性係数 k_t, η_t とし、以下のように表される。

$$\mathbf{F}_t^{ij} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{F}}_t^{ij} & if\ |\tilde{\mathbf{F}}_t^{ij}| < \mu |F_n^{ij}| \\ \mu F_n^{ij} \mathbf{e}_t^{ij} & \text{それ以外} \end{cases} \quad (5)$$

但し、

$$\tilde{\mathbf{F}}_t^{ij} = -k_t \boldsymbol{\Psi} - \eta_t (\mathbf{n}_{ij} \times (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_i) + r_i \omega_i + r_j \omega_j) \times \mathbf{n}_{ij}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \sum_{l=1}^{2} \mathbf{t}_l \int_{t_0}^{t} dt' \tilde{\boldsymbol{\Psi}}(t') \cdot \mathbf{t}_l(t')$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}(t') = (r_i \omega_i + r_j \omega_j) \times \mathbf{n}_{ij}(t') + \dot{\mathbf{x}}_j(t') - \dot{\mathbf{x}}_i(t')$$

$$\mathbf{e}_t^{ij} = \frac{\mathbf{F}_t^{ij}}{|\mathbf{F}_t^{ij}|}$$

t_0 は i 番目の粒子と j 番目の粒子が接触を始めた時刻。$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ は以下のように粒子間の接ベクトルとする。空間に固定された xyz 座標の基底ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を y 軸まわりで回転させた後に z 軸のまわりで回転させ、$\mathbf{e}_z$ を $\mathbf{n}_{ij}$ と一致するように変換した時の $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ を $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ とする。

本研究で用いる 2 次元と 3 次元の接線方向の力の計算方法の違いについて述べる。相異点は 2 つある。1 つ目の相異点は、2 次元の場合では接線方向の粘性力を考慮しない $(\eta_t = 0)$ が、3 次元ではより一般

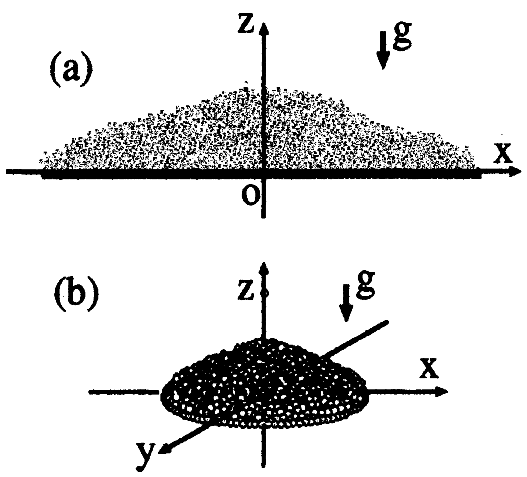

Figure 1: (a) 2次元の砂山 ($w = 80d$) と (b) 3次元の砂山 ($w = 30d$)。

的なシミュレーションをするために接線方向の粘性力も接触力の計算にいれることである。もう1点は、2次元の場合には前回の数値計算と同様に粒子間が滑っているときには粒子間の接線方向の歪は増さないと仮定するが、3次元の場合は滑りの最中でも歪が蓄積すると仮定する。これらの仮定の違いは、粒子が長時間接触したまま回転運動をする場合に大きな違いが表れるが、本研究のような砂山のシミュレーションではこれらの違いの影響はほとんど表れないと考えている。

図1のように砂山は有限のテーブル上に作る。テーブルは2次元の場合は長さ w に粒径 d の粒子をすき間なく敷き詰めたものとし、テーブルと水平な軸を x 軸とする。3次元では直径 w の縁に粒径 $0.8d$ の粒子を並べた円形の平らなテーブルを用い、水平面を $x-y$ 平面とする。座標はテーブルの中心を原点とする。初期山としてそれぞれテーブルを覆う大きさの山を作って計算を行う。テーブルの外に落ちた粒子はその後計算から除外されるため、砂山の大きさはほとんど変わらない。3次元の場合は計算コストを下げるために、砂山内部に長時間留まり続けた粒子の位置を固定して初期山を作り、シミュレーションを行う。

2次元と3次元の離散要素法において、長さと時間はそれぞれ d と $\sqrt{d/g}$ でリスケールされる。それぞれのシミュレーションで用いたパラメーターは図2の通りである。

なだれの有無に関わらず、粒子はテーブル中心の真上から1粒子づつ時間間隔 T で供給する。2次元の場合は供給する位置は砂山に与える衝撃を一定にするために、供給位置の真下の砂山表面から距離 H の位置とする。この場合、供給する位置は時間によって変動する。3次元の場合は簡単のために供給位置をテーブルからの高さ H に固定する。

2D		3D
1.0×10^4	$k_n[mg/d]$	1.0×10^4
1.0×10^2	$\eta_n[m(d/g)^{1/2}]$	1.4×10^2
2.0×10^3	$k_t[mg/d]$	2.5×10^3
0	$\eta_n[m(d/g)^{1/2}]$	7.2×10
0.5	μ	0.2
about 0.3	e	about 0.2

Figure 2: 2次元の砂山と3次元の砂山のパラメーター

3 頂点位置のゆらぎ

砂山の形状を表す量の1つとして頂点があり、頂点の位置はなだれや新しく粒子が積み上がることによって移動する。頂点の位置は砂山内でもっとも高い位置にある粒子の重心とする。他の粒子と接触している粒子を砂山内の粒子として頂点位置を決める。頂点位置の時系列のパワースペクトルは低波数領域で巾関数で近似できることを報告した [34]。また、供給の時間間隔 T と高さ H を変化させたときもパワースペクトルが巾関数で近似され、巾の指数 α は $w = 80d$ のとき T に依存して変化し、H には依存しないことがわかった。以前の報告では砂山のサイズ $w = 80d$ の2次元の砂山のみについて述べた。本論文では頂点のパワースペクトルが巾的になる現象の普遍性について調べるために、頂点のゆらぎの砂山サイズ w や粒子供給の水平位置への依存性の有無について調べる。さらに3次元の砂山についても頂点位置のゆらぎを調べる。

3.1 2次元の砂山について

2次元の砂山における頂点位置の水平成分 x_{top} の時系列を図3に示す。図3では T が小さいためになだれが頻発し、頂点移動が頻繁に起きている。

頂点の時系列の特徴を調べるために、時系列のパワースペクトル $S(f)$ を求める。時系列のセットが確実に互いに相関を持たないようにするために、複数の乱数を用いて時系列を生成し、その結果得られたパワースペクトルの平均をパワースペクトルとする。2次元の砂山の $w = 80d, T = 2\sqrt{d/g}, H = 20d$ の場合の $S(f)$ は図4のように $1/f$ の巾関数で近似することができる。

$w = 20d, 40d, 160d$ の場合についてもそれぞれ初期山を作りシミュレーションを行い、頂点の時系列のパワースペクトルを求める。その結果、システム

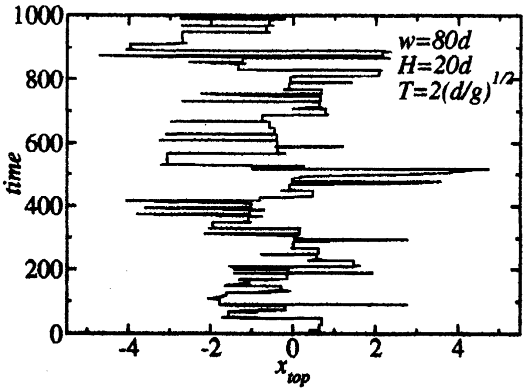

Figure 3: $w = 80d, H = 20d, T = 2\sqrt{d/g}$ の場合の頂点の時系列

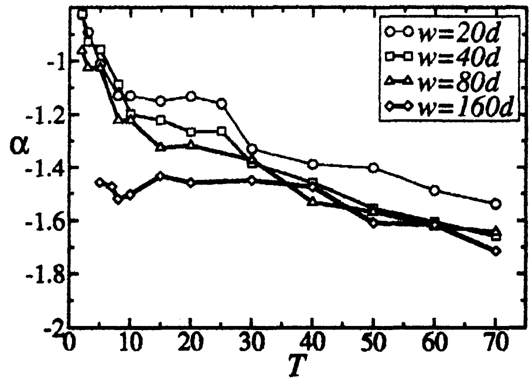

Figure 5: x_{top} のパワースペクトルの巾の指数 α の T 依存性。$H = 20d$

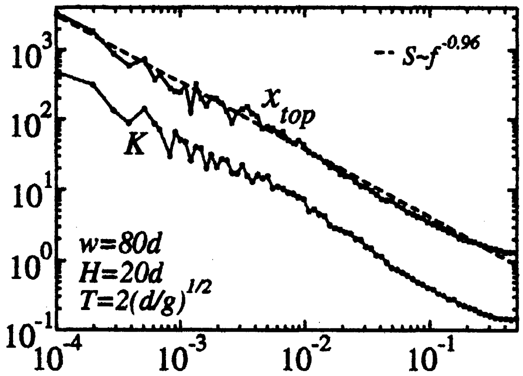

Figure 4: $w = 80d, H = 20d, T = 2\sqrt{d/g}$ の場合の頂点と K のパワースペクトル。点線は巾関数 $S \sim f^{-0.96}$。

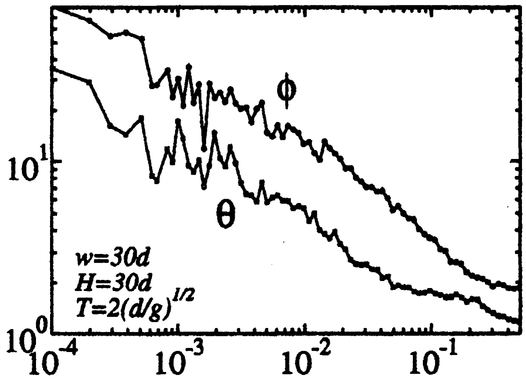

Figure 6: 3次元の砂山について、頂点の方向 ϕ となだれの方向 θ のパワースペクトル。$w = 30d, H = 30d, T = 2\sqrt{d/g}$。線が重なるため θ についてのプロットを下にずらした。

サイズ w によらず広い T の範囲で頂点のパワースペクトルが巾的になることがわかった。

さらに巾の指数 α の T 依存性に関してを幾つかの w について調べる。両対数プロットしたパワースペクトル $S(f)$ を最小自乗法で直線フィットし、巾の指数 α を求める。波数 f とし、$0.0005 < f < 0.01$ の範囲でフィットする。供給の周期とフィットする範囲とを離すため、$T \leq 70\sqrt{d/g}$ とする。図5に T に対する α の変化を示す。w を $20d, 40d, 80d$ と変化させても T が小さいとき α は T の減少にたいして急激に増加し、$S(f) \sim 1/f$ が現れる。一方で w が小さいほど α が大きくなる傾向が見られる。$w = 160d$ のとき、α は T が小さいときの増加が少なく、さらに T が小さくなると $S(f)$ の長波長領域が巾からずれる。$w = 160d$ の場合については5節において考察する。

3.2 3次元の砂山について

3次元の砂山での頂点のゆらぎについて調べる。3次元では頂点の方向 ϕ についてパワースペクトルを計算する。ϕ は頂点の位置の水平成分 (x_{top}, y_{top}) の x 軸からの角度 $(-\pi \leq \phi \leq \pi)$ とする。ϕ の時系列のパワースペクトルを計算すると、$T = 2\sqrt{d/g}$ のとき図6のように長波長領域で巾関数で近似でき、3次元の砂山についても頂点のパワースペクトルが巾関数で近似できる。

ϕ のパワースペクトルの指数 α_ϕ の T に対する変化を調べ、図7に示す。α_ϕ を求めるためにパワースペクトルを2次元の場合と同様に巾関数でフィットする。図5と同様に α_ϕ は T が増加するにつれて減少し、T が比較的小さい場合にパワースペクトルが $1/f$ 的になることがわかった。α_ϕ は図5の α より値が大きい。これは3次元の砂山が $w = 30d$ と小さいため、有限サイズ効果と次元の違いによるものと考

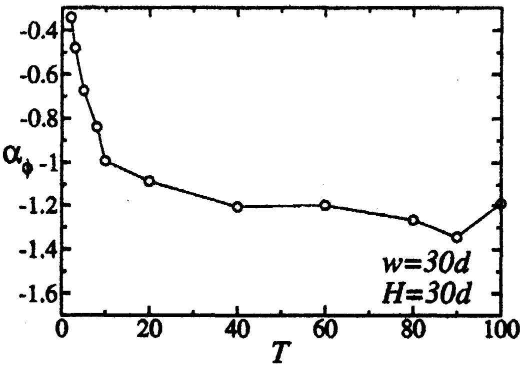

Figure 7: 3次元の砂山について、ϕ のパワースペクトルの巾の指数, α_ϕ, の T 依存性。

えられる。

4 頂点移動となだれ

2次元の砂山ではなだれと頂点移動の方向は水平成分において逆向きの関係にある。この節では、まずなだれについて以前報告した内容に簡単に述べ、なだれの状態によって定義されるモードについて考察する。さらに3次元の砂山についても、2次元のモードに対応するなだれの方向の時間変化と頂点のゆらぎの関係について調べる。

4.1 2次元の砂山におけるモードのswitchingと頂点のゆらぎ

2次元の砂山において T が小さいときのモードのswitching の時系列と頂点移動の時系列が長時間の振舞いにおいて一致することを以前報告した。ここでは2次元のモードの switching について簡単にまとめる。$x>0$ の斜面でなだれが起きている状態を右モード、$x<0$ でなだれが起きている状態を左モードと呼ぶ。T が小さいときには常にどちらかの砂山斜面でなだれが起きている状態にあるため、モードをなだれが優勢な斜面を測定することによって決める。

なだれを測るために運動エネルギーを用いる。砂山の左側の粒子の運動エネルギーの総和を k_l、右側についての総和を k_r とする。ここで左側とは $x<-d$ の領域を指し、右側とは $x>d$ の領域を指す。(6) のように k_r, k_l の大小関係で K を定義すると、K の変化でモードの switching が表される。

$$K(t)=\begin{cases} 1 & k_l(t)<k_r(t) \text{ のとき} \\ -1 & \text{それ以外} \end{cases} \qquad (6)$$

K のパワースペクトルは図4のように x_{top} のパワースペクトルと長波長領域で近似的に巾の指数が一致する。このことから頂点移動とモードのswitching は長時間の振る舞いにおいて等しいことがわかる。

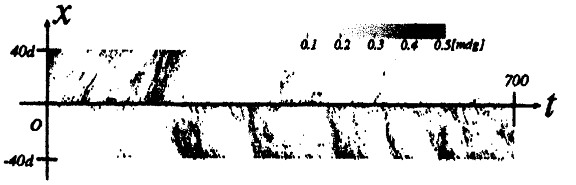

Figure 8: 2次元の砂山の運動エネルギーの時空プロット。$w=80d, H=20d, T=2\sqrt{d/g}$。

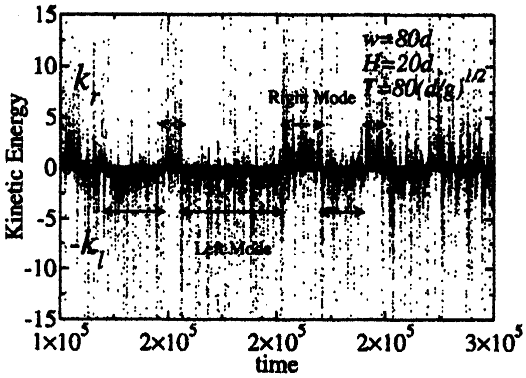

Figure 9: $-k_l$ と k_r。$w=80d, H=20d, T=80\sqrt{d/g}$。右モードと左モードの状態について図中に示す。

K は T が小さいときにモードの switching をよく表すが、T が大きくなるにしたがってなだれが間欠的になるため、モードの観測が難しくなる。

4.2 2次元の砂山におけるなだれ

なだれが時間的・空間的にどのように発生するのか知るために、運動エネルギーの時空プロットを図8に示す。図8では2次元の砂山について位置 x にある粒子の運動エネルギーの総和を表す。運動エネルギーの高さを色の濃淡で示す。$x=0$ で運動エネルギーが高い理由は供給された粒子の落下地点のためである。図8において、T が小さいためなだれが連続して起きている。図8でははじめに $x>0$ の領域でなだれが発生し、途中から $x<0$ の領域でのなだれに移行しており、モードの switching が起きている。また一連のなだれが継続する時間は粒子の供給時間間隔 T に比べて十分に長いことがわかる。

ここでは2次元の砂山において一連のなだれが同じ斜面で継続する状態をモードと再定義する。この定義によって T が大きいときでもモードが定義できる。図9に $T=80\sqrt{d/g}$ のときの $-k_l$ と k_r の時系列を示す。右モードと左モードそれぞれが観察され

る。左モードが時間にして $1.0 \times 10^5\sqrt{d/g}$ の間続いており、T が小さい場合と同様にモードは長時間継続する。図 9 ではモードが競合している状態が見られ、両方の斜面で小さななだれが起きるようなモードを競合モードと定義する。

次にモードが長時間継続する原因を調べる。シミュレーションの途中で粒子供給を停止し、砂山の粒子が静止した後に供給を再開して、供給停止前と再開後のモードを比較する。粒子供給の停止があってもモードが維持されていれば、モードの記憶は停止前後で変化しない砂山の形に存在すると考えられる。実験は以下のように行う。粒子供給の再開と次の停止の間には十分長い時間 τ_f をとる。停止前後のそれぞれで、時間 τ_m の間の K の $+1$ と -1 の割合によってモードを判定する。今回 $\tau_f = 1000\sqrt{d/g}, \tau_m = 500\sqrt{d/g}$ とし、$0.8\tau_m$ の間 K が同符号であれば左右どちらかのモードと判断する。$k_l, k_r < 1.0 \times 10^{-6}$ のとき粒子が静止ししたとし、粒子供給を再開する。$w = 80d$ で $T = 2\sqrt{d/g}$ の場合について実験を行い、その結果は次のようになる。

	Mode
Same Mode	56%
CS	42%
Another Mode	2%
total number	139

	Competitive Situation(CS)
CS	73%
Mode	27%
total number	211

2 つの表の上の行は供給停止前の状態を表し、上の表は停止前に左右どちらかのモードが存在する場合で、下の表は停止前は競合モードの場合について示す。2 つの表のそれぞれ縦の欄は供給再開後のモードの状態を表し、供給停止前にモードや競合状態であったものをそれぞれ 100% としたときの再開後の様子を示す。それぞれの表の一番下の行はデータ数である。表は停止前と再開後でほとんどモードが変化しないことを示している。このことから、モードの記憶は粒子運動でなく砂山の形に残ることがわかる。モードから競合状態への変化は高い確率で発生するが、これは τ_m を大きく設定したため、競合モードと判断されやすくなったことによる。

砂山の形状が長時間モードを記憶するために、なだれや頂点移動に長時間相関が現れると考えられる。砂山形状のどの部分が長時間相関に関係するか調べるために、粒子の供給位置を変えて頂点のパワースペクトルを測定する。供給位置の水平成分 x_f を 1 回の供給毎にランダムに選択して決めるとする。供給位置の範囲を砂山全体とする場合と頂点付近を除く範囲とする場合について調べる。まず、範囲を砂山全体とする場合について述べる。この場合の x_{top} のパワースペクトルは x_f を固定する場合と同様に $w = 80d, T = $

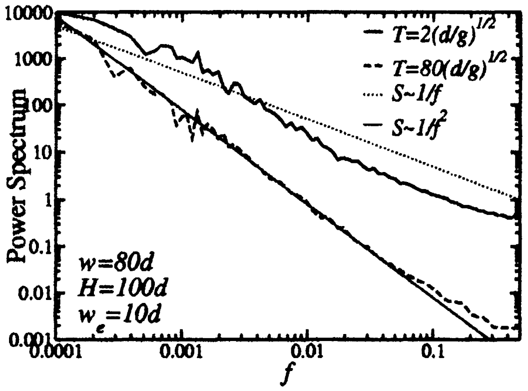

Figure 10: 粒子を $-w_e < x < w_e$ の範囲を除いた範囲で一様に供給するときの、頂点のパワースペクトル S(f)。$w = 80d, H = 100d, T = 2\sqrt{d/g}, 80\sqrt{d/g}, w_e = 10d$。参考のため $S(f) \sim 1/f$ と $S(f) \sim 1/f^2$ を載せる。

$2\sqrt{d/g}$ のとき $1/f$ で近似され、$T = 80\sqrt{d/g}$ のとき $S(f) \sim 1/f^2$ に近付くことがわかった。次に、頂点付近 $(-w_e, w_e)$ の範囲を除いた範囲で供給位置を設定する場合について調べる。$w = 80d, H = 100d$ とし、このとき頂点移動の範囲はおよそ $(-10d, 10d)$ であるため、$w_e = 10d$ とする。頂点のパワースペクトルは図 10 のようになり、$T = 80\sqrt{d/g}$ の場合は供給位置を固定する場合と同じように $S(f) \sim 1/f^2$ に近いべキ関数となるが、$T = 2\sqrt{d/g}$ の場合には $S(f) \sim 1/f$ とならずべキの指数は -2 に近くなる。これらのことより頂点のパワースペクトルのべキの指数が T に依存して変化するという現象には砂山頂点付近の形状変化が密接に関係していることがわかった。また頂点付近に粒子を供給しない場合と供給位置を固定する場合で比較して、T が小さいときにはパワースペクトルが変化するが T が大きいときには変化しないことについて以下のような理由が考えられる。T が大きいときには斜面が長時間固体的状態を保ち、斜面で発生したなだれによって頂点は受動的に移動するため、なだれの起き方は粒子を供給する位置が頂点付近を含むかどうかによらない。そのため、頂点のパワースペクトルも供給位置に依存しない。一方で T が小さいときには斜面が流動的であり、頂点付近からなだれが発生し、粒子の流れは頂点付近の形状に依存するため、頂点はなだれに能動的に影響をあたえる。したがって、粒子の供給位置が頂点付近を含む場合と含まない場合で頂点のパワースペクトルは変化すると考えられる。

4.3 3次元の砂山におけるなだれと頂点のゆらぎ

3次元の砂山については、なだれの水平方向を粒子の運動量のテーブルと水平な成分を用いて表す。粒子の x 方向と y 方向の運動量の平均, $(\bar{p_1}, \bar{p_2})$, を用いる。

$$\bar{p_l} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i v_{i,l}, \quad (l = 1, 2) \tag{7}$$

N はテーブル上にある全粒子数である。$v_{i,1}, v_{i,2}$ はそれぞれ i 番目の粒子の x 方向と y 方向の速度とする。θ は頂点についての角度 ϕ と同様に、$(\bar{p_1}, \bar{p_2})$ の x 軸との角度とし、θ の範囲は $-\pi \le \theta \le \pi$ とする。θ の時系列のパワースペクトルを計算すると、図6のように ϕ のパワースペクトルと $f \le 1.0 \times 10^{-2}$ の長波長での振る舞いが近似的に一致する。これらの結果から、2次元・3次元どちらの場合でもモードやなだれの方向の時系列は長時間相関を持ち、頂点の時系列と長時間の振る舞いが等しいことがわかった。

5 砂山斜面の流動状態

斜面の状態と頂点のパワースペクトルの関係については、T が小さいときに砂山斜面は流動的になり、頂点のパワースペクトルは $1/f$ に近づくようにみえる。本論文では斜面の状態とパワースペクトルの関係について定量的に調べる。

5.1 斜面の状態の砂山サイズへの依存性

これまでの結果から斜面が流動的であるとき頂点のパワースペクトルのベキの指数は小さく、斜面の状態が固体的なるにつれて指数が小さくなる傾向がある。したがって図5では、$w = 160d$ の場合は T が小さいときの α の値が他の w の場合より小さくなることから、$w = 160d$ のときは他の場合のように斜面が流動的でないと予想される。

斜面の状態を調べるために、粒子の運動量 k_l の時系列を $w = 20d$ の場合と $w = 160d$ の場合とで比較する。$w = 160d, T = 5\sqrt{d/g}$ のときの k_l を図11に示すと、k_l の値は平均的に小さく、$k_l \equiv 0$ にある時間が長いことから、斜面の状態は固体的であることがわかった。一方で、$w = 20d, T = 5\sqrt{d/g}$ の場合は図12に示すように、図11の場合と比較して k_l の振幅は大きく、砂山斜面の状態は流動状態を保っていることが確認できる。これらの結果から、斜面の状態は T だけでなく w にも依存し、w が大きいほど状態は固体的になり、α が小さくなる傾向があると考えられる。

斜面の状態はなだれの頻度によって決まり、T と w に依存するため、なだれに関する T と w に依存する時間スケールが存在し、そのタイムスケールによって斜面の状態を特徴づけることができると考えられる。次節では、なだれに関するタイムスケールについて考察する。

5.2 なだれに関するタイムスケール

なだれに関する時間スケールとして、なだれが起きるまでにかかる時間となだれのLifetimeの2つが挙げられる。これらのタイムスケールの大小関係によって斜面の状態が変化すると考えられる。なだれが起きるまでにかかる時間がLifetimeと同程度の長さであれば、なだれが継続している間に次のなだれを引き起こすための十分な量の供給があるため、さらになだれは継続し斜面は流動的になる。なだれにかかるまでの時間がLifetimeより十分長ければ、なだれが終わってから次のなだれまでに長い時間がかかるために斜面の状態は固体的になる。以下ではそれぞれのタイムスケールについて考察する。

なだれが起きるまでにかかる時間をなだれを引き起こすために十分な量の粒子が斜面にたまるためにかかる時間 T_s によって定義する。T_s は供給の時間間隔 T に比例し、w に依存すると考えられるため

$$T_s = Tf(w) \tag{8}$$

と表される。$f(w)$ は1度のなだれで流れる典型的な粒子数で表される。$f(w)$ はシミュレーションによって決める。砂山の右半分にある粒子数 N_r と左半分にある粒子数 N_l はなだれによって変動する。N_r と N_l の標準的な変動幅が $f(w)$ に対応していると考えられるため、これらの標準偏差を $f(w)$ とする。N_r と N_l を測定するとき次のようにパラメータの設定を行う。粒子供給位置 $x = 0$ では粒子の出入りが頻繁に起きるため、供給位置付近を除き砂山の右半分の範囲を $x > 1.5d$ とし、左半分を $x < -1.5d$ とする。測定は一つ一つのなだれが区別できる状態で行う必要があるため、$T = 80\sqrt{d/g}$ とする。標準偏差をとるため十分長時間のシミュレーションが必要であり、シミュレーション内の時間にして $2.0 \times 10^6\sqrt{d/g}$ のデータから N_l, N_r を計算する。

次になだれのLifetimeについて述べる。Lifetimeは1つのなだれのLifetimeの平均 T_a とする。ここでは運動エネルギー $k_l, k_r > 1[mdg]$ のときなだれが継続しているとし、T_a をシミュレーションにより測定する。N_r, N_l を測定したときと同様に T をとり、十分長時間のシミュレーションを行う。

5.3 斜面の状態と α の関係

5.2節で定義した T_s と T_a を用いて斜面の状態と α につて述べる。$f(w)$ は定義にしたがって計算すると、図13のように w が増えるにしたがって増加し、(8)より T_s も w に依存する。T_a についてもシミュレーションにより計算すると、w に関わらずおおよそ3から4の値をとることがわかった。

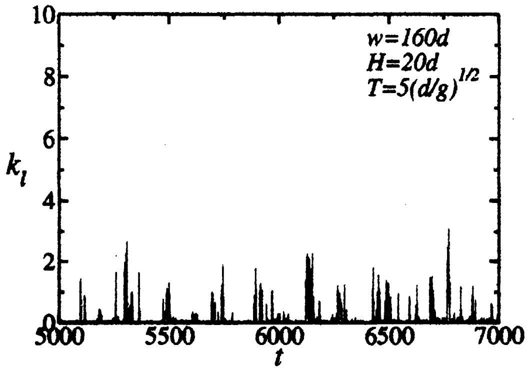

Figure 11: 2次元の砂山のについて $w = 160d$ のときの運動エネルギー k_l の時系列。 $H = 20d, T = 5\sqrt{d/g}$。

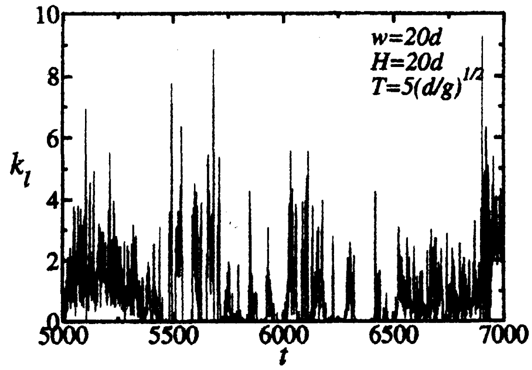

Figure 12: 2次元の砂山のについて $w = 20d$ のときの運動エネルギー k_l の時系列。 $H = 20d, T = 5\sqrt{d/g}$。

これらの結果からなだれが起きるまでにかかる時間 T_s となだれの Lifetime T_a から斜面の状態と T, w の関係が表される。T と w が小さい場合には、T_s が T_a と同程度の長さになり、斜面の流動状態は持続する。一方で、T か w が大きい場合は、$T_a \ll T_s$ となり、斜面の状態は固体的になる。

次に斜面の状態と頂点のパワースペクトルの巾の指数 α の関係について考える。図5より T が大きく斜面の状態が流動的であるとき、α は大きくなる。一方で、5.1節で述べたように w か T が大きく、斜面が固体的な状態にある場合は α は小さくなる。斜面の状態は T_s と T_a に依存することから、$T^* = T_a/f(w)$ で図5をリスケールすると図14のようになり、データ点がよくそろう。

T/T^* で α が決まる可能性はあるが、そのためにはより精度が必要なため長時間のデータが必要であり、精度の向上が今後の課題である。

6 議論

砂山への粒子の供給量を変化させると、頂点のパワースペクトルの巾の指数が変化することを報告した。同様に鉛直パイプ内の粉体流れについても、密度波のパワースペクトルが巾的になることがシミュレーションと実験により調べられており、解析的研究もされている [19,21,23,28,35–41]。特に Nakahara、Isoda の実験 [21] と Yamazaki らの実験 [40] ではパイプへの粒子の流入量を変化させるとパワースペクトルの巾の指数が変化することが報告されている。Nakahara、Isoda の実験ではパイプ内の流体として水やシリコンオイルを用い、Yamazaki らの実験では空気を使ったが、どちらの実験でも流入量が少ないときは wite-noise 的になり、多い場合は巾的になる。これらの実験では巾の指数は水やシリコンオイルの場合に約 -0.8 となり空気の場合には $-4/3$ と近似される。

パイプ内の流れも砂山上の流れについても、それぞれの粒子が重力をうけて自由に流れる場合にはパワースペクトルの指数が0に近づく。これは砂山では粒子の供給量が多く、斜面が流動的である場合にあたる。一方で、粒子がなんらかの拘束条件によってクラスター化し、集団運動をする場合には巾の指数は小さくなる傾向がみられる。パイプ内の流れでは、流入量が多くなるとパイプ内の粉体密度が大きくなり、流体がパイプ内を上昇するときに粉体を減速させ、クラスター化する。これに対応する砂山での現象は、粒子の供給量が少ないときに砂山斜面上の粒子にあたえられる運動エネルギーが小さいために、なだれが間欠的になることである。

パイプ内の粉体の流れと砂山斜面上の粒子の流れについて、粒子運動の特徴とパワースペクトルの変化が共通することから、この現象は多体系における普遍的な特徴を含むと考えられる。今後はこれらの研究を発展させることによって、粒子集団の流動的・固体的といった部分的な状態が系全体が長時間の記憶における役割についての総合的かつ解析的な理解が期待される。

また Bak、 Tang、 Wiesenfeld の数理モデルによって砂山のサイズ分布がベキ的になることが知られており [42]、 Held、Solina らの実験によりベキの指数は -2 となることが報告されている [43]。これらの研究で調べられている砂山の状況は T が大きい極限に対応している。T が大きい場合には砂山斜面が固体的になりそれぞれの斜面で独立になだれが発生し、頂点はそのなだれによって受動的に動かされる傾向があり、パワースペクトルが $S(f) \sim 1/f^2$ に近くなる。T が小さくなると斜面は流動的になり頂点の位置は能動的になだれの発生に影響をあたえ、それぞれの斜面のなだれは頂点の位置を通して相互作

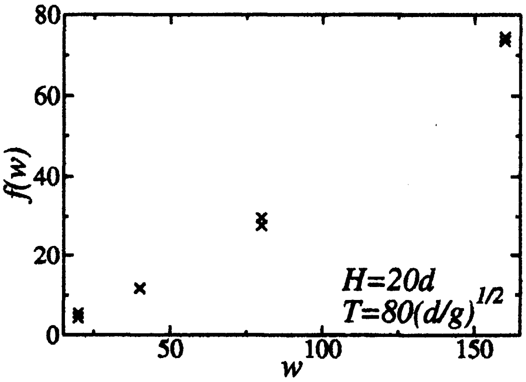

Figure 13: $f(W)$ のプロット。$H = 20d, T = 80\sqrt{d/g}$。

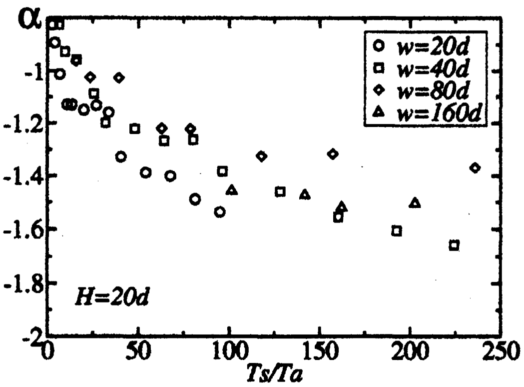

Figure 14: T_s/T_a に対する α の変動。$H = 20d$。

用をするようになる。このとき状況は大きく変化するにもかかわらず、パワースペクトルがベキ的であることは変わらず、ベキの指数に変化が現れる。また、頂点付近に粒子を供給しない場合では T が小さいときにもパワースペクトルが $S(f) \sim 1/f^2$ に近くなることから、頂点付近の砂山形状変化がなだれの発生にあたえる影響が小さいとき $S(f) \sim 1/f^2$ に近付き、頂点付近の影響が大きいときベキの指数は大きくなると考えられる。

7 まとめ

砂山形成過程における頂点移動のゆらぎとなだれの関係について2次元と3次元の離散要素法を用いて調べた。砂山は幅 w の有限のテーブル上に作るとし、砂山に1粒子づつ時間間隔 T で供給するとした。なだれによって移動する頂点位置を測定し、その時系列のパワースペクトル $S(f)$ を計算すると、$S(f)$ は巾的にになり、T が小さいときに $S(f) \sim 1/f$ になることがわかった。パワースペクトルを $S(f) \sim f^{\alpha}$ で近似すると、T が減少するにしたがって α が増加することがわかった。また、w が大きい場合は他の場合と比べて α が小さくなる傾向がある。

なだれについては2次元と3次元でそれぞれ運動エネルギーと運動量を用いて測定した。2次元の砂山では頂点によって分けられた2つの斜面があり、時間によってなだれが起きる斜面は異なる。本研究では、2次元の砂山において一連のなだれが同一斜面で起きる状態をモードと定義した。T が小さいときモードの switching と頂点移動はパワースペクトルを計算することにより、長時間の振る舞いが一致することがわかった。モードは T に比べて十分長い時間継続することが観測された。3次元の場合はモードをなだれの方向と読みかえ、なだれの方向を求めると、2次元の場合と同様にそのパワースペクトルは頂点のパワースペクトルと長波長領域での振る舞いが近似的に一致することがわかった。

T の大きさに関わらず、モードは T に比べて十分長時間継続する傾向があることが観測により明らかになった。2次元の砂山において、1つのモードが続いている途中で、粒子の供給を長時間停止した後に再開してみると、再開後も停止前と同じモードが現れる傾向があることがわかった。供給を停止することにより、粒子の運動エネルギーは失われるためモードの記憶は砂山の形に残ると考えられ、モードの維持には砂山形状が変らないことが必要である。また頂点付近を除いて粒子を供給すると頂点のパワースペクトルのベキの指数は T が小さいときも $1/f$ 的にならないため、頂点付近の形状がベキの指数変化に影響をあたえると考えられる。T が大きいときには供給量が小さく砂山の表面の状態が固体的であり、モードは長時間維持する。T が小さいときには供給量が多くなるため、砂山形状が変らないためには斜面の流動状態の維持が必要である。

砂山の斜面の状態はなだれの Lifetime T_a となだれが起きるまでにかかる時間 T_s の大小関係に依存する。シミュレーションの結果から T_a は w に依存せず一定の値をとるのに対し、T_s は T と w に依存することがわかった。T と w が小さいときは $T_a \sim T_s$ となり、斜面の状態は流動状態を保ちやすくなる。一方で T か w が大きいときは $T_a \ll T_s$ となり、状態は間欠的に発生するなだれを除いて固体的である。T に対する α の変化のグラフと比較すると、流動状態にあるとき α は大きく、固体状態にあるとき α は小さくなる傾向がある。$T_a = T_s$ となるときの T の値によって α のグラフをリスケールすると、比較的よくそろうことがわかった。

粒子集団の状態に依存してパワースペクトルが変化するという現象は鉛直パイプ内の粉体流でも現れる。パイプ内では供給量が少ないときに粉体は一様

に流れ、その密度波は white-nise 的になる。一方で供給量が多くなると、粉体流にはクラスターが現れ、密度波は指数が負の巾関数で近似されるようになる。パイプ内の粉体流でも砂山上の流れでも、粉体流が一様に流動的であるときにパワースペクトルの巾の指数は大きく、クラスターがあるなど流れにむらがあるときには指数が小さくなることが共通しており、このような現象は多粒子系で普遍的に見られるものではないかと予想される。

謝辞

本研究について実りある議論をしていただいた早川尚男氏、冨田博之氏、武末真二氏、佐野光貞氏、狐崎創氏に感謝いたします。数値計算は京都大学 基礎物理学研究所の Altix3700 BX2 で行いました。

References

[1] R. M. Nedderman. Cambridge University Press, 1992.

[2] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 68, pp. 1259–1273, 1996.

[3] L. P. Kadanoff. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 71, pp. 435–444, 1999.

[4] J. Duran. Springer, 2000.

[5] T. Pöschel and S. Luding. Springer-Verlag, 2001.

[6] T. Pöschel and N. Brilliantov. Springer-Verlag, 2003.

[7] 早川尚男. 岩波講座 物理の世界 物理と数理 4 散逸粒子系の力学. 岩波書店, 2003.

[8] J. P. Wittmer, P. Claudin, M. E. Cates, and J.-P. Bouchaud. *Nature*, Vol. 382, pp. 336–338, 1996.

[9] P. G. de Gennes. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 71, pp. S374–S382, 1999.

[10] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R. P. Behringer, and E. Clément. *Phys. Rev. E*, Vol. 60, pp. R5040–R5043, 1999.

[11] J. P. Bouchaud, P. Claudin, D. Levine, and M. Otto. *The European Physical Journal E*, Vol. 4, pp. 451–457, 2001.

[12] D. Serero, G. Reydellet, P. Claudin, É. Clément, and D. Levine. *The European Physical Journal E*, Vol. 6, pp. 169–179, 2001.

[13] J. Geng, D. Howell, E. Longhi, R. P. Behringer, G. Reydellet, L. Vanel, E. Clément, and S. Luding. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 87, pp. 035506–035509, 2001.

[14] J. Geng, E. Longhi, R. P. Behringer, and D. W. Howell. *Phys. Rev. E*, Vol. 64, pp. 060301–060304, 2001.

[15] J. E. S. Socolar, D. G. Schaeffer, and P. Claudin. *The European Physical Journal E*, Vol. 7, pp. 353–370, 2002.

[16] C. Goldenberg and I. Goldhirsch. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 89, pp. 084302–084305, 2002.

[17] R. R. Hartley and R. P. Behringer. *Nature*, Vol. 421, pp. 928–931, 2003.

[18] G. W. Baxter, R. Leone, and R. P. Behringer. *Europhys. Lett.*, Vol. 21, pp. 569–574, 1993.

[19] S. Horikawa, T. Isoda, T. Nakayama, A. Nakahara, and M. Matsushita. *Physica A*, Vol. 233, pp. 699–708, 1996.

[20] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. *Phys. Today*, Vol. 49, pp. 32–38, 1996.

[21] A. Nakahara and T. Isoda. *Phys. Rev. E*, Vol. 55, pp. 4264–4273, 1997.

[22] T. P. C. van Noije, M. H. Ernst, R. Brito, and J. A. G. Orza. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, pp. 411–414, 1997.

[23] H. Hayakawa and K. Nakanishi. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, Vol. 130, pp. 57–75, 1998.

[24] O. Pouliquen. *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 542–548, 1999.

[25] T. S. Komatsu, S. Inagaki, N. Nakagawa, and S. Nasuno. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 86, pp. 1757–1760, 2001.

[26] L. E. Silbert, D. Ertaş, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine, and S. J. Plimpton. *Phys. Rev. E*, Vol. 64, pp. 051302–051315, 2001.

[27] N. Mitarai, H. Hayakawa, and H. Nakanishi. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 88, pp. 174301–174304, 2002.

[28] Y. Yamazaki, S. Tateda, A. Awazu, T. Arai, O. Moriyama, and M. Matsushita. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 71, pp. 2859–2862, 2002.

[29] N. Mitarai and H. Nakanishi. *J. Fluid Mech.*, Vol. 507, pp. 309–334, 2004.

[30] M. Bretz, J. B. Cunningham, P. L. Kurczynski, and F. Nori. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 69, pp. 2431–2434, 1992.

[31] V. Frette, K. Christensen, A. Malthe-Sørenssen, J. Feder, T. Jøssang, and P. Meakin. *Nature*, Vol. 379, pp. 49–52, 1996.

[32] E. Altshuler, O. Ramos, C. Martínez, L. E. Flores, and C. Noda. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 86, pp. 5490–5493, 2001.

[33] N. Yoshioka. *Earth Planets Space*, Vol. 55, pp. 283–289, 2003.

[34] C. Urabe. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 74, p. 2475, 2005.

[35] G. Peng and H. J. Herrmann. *Phys. Rev. E*, Vol. 49, p. R1796, 1994.

[36] G. Peng and H. J. Herrmann. *Phys. Rev. E*, Vol. 51, p. 1745, 1995.

[37] S. Horikawa, A. Nakahara, T. Nakayama, and M. Matsushita. *J. Phys. Soc. Jpn.*, Vol. 64, pp. 1870–1873, 1995.

[38] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita, and H. Hayakawa. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 80, pp. 2833–2836, 1998.

[39] O. Moriyama, N. Kuroiwa, T. Isoda, T. Arai, S. Tateda, Y. Yamazaki, and M Matsushita. In M. Fukui, Y. Sugiyama, M. Schreckenberg, and D. E. Wolf, editors, *TRAFFIC AND GRANULAR FLOW '01*, pp. 437–448. Springer, 2001.

[40] O. Moriyama, N. Kuroiwa, S. Tateda, T. Arai, A. Awazu, Y. Yamazaki, and M. Matsushita. *Prog. Theor. Phys. Supp.*, Vol. 150, pp. 136–146, 2003.

[41] H. Hayakawa. *Phys. Rev. E*, Vol. 72, p. 031102, 2005.

[42] C. Tang P. Bak and K. Wiesenfeld. *Phys. Rev. Lett.*, 1987.

[43] G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane II, W. J. Haag, P. M. Horn, and G. Grinstein. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 65, pp. 1120–1123, 1990.